Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 395, 2011 г.

А. К. Абдикалыков, Х. Д. Икрамов

ОБ ОДНОВРЕМЕННОМ ОВЕЩЕСТВЛЕНИИ ПАРЫ КОМПЛЕКСНЫХ МАТРИЦ ПОСРЕДСТВОМ УНИТАРНОГО ПОДОБИЯ

1. Пусть $M_n(\mathbf{C})$ – множество комплексных $n \times n$-матриц. Рассмотрим следующую задачу: каким условиям должны удовлетворять матрицы $A, B \in M_n(\mathbf{C})$ для того, чтобы они могли быть сделаны вещественными посредством одного и того же унитарного подобия? Иными словами, существует ли унитарная матрица $U \in M_n(\mathbf{C})$ такая, что обе матрицы

$$\hat{A} = U^*AU, \qquad \hat{B} = U^*BU \tag{1}$$

вещественны?

Очевидно, необходимым условием для этого является существование овеществляющей унитарной матрицы для каждой из матриц A и B по отдельности. (В этом случае пишут $A, B \in \mathcal{U}R_n$.) Необходимое и достаточное условие для включения $A \in \mathcal{U}R_n$ получено в [1].

Теорема 1. *Матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ тогда и только тогда принадлежит классу $\mathcal{U}R_n$, когда A унитарно подобна своей поэлементно сопряжённой матрице $\bar{A}$ и унитарная матрица P в соотношении*

$$\bar{A} = P^*AP \tag{2}$$

может быть выбрана симметричной.

Назовём матрицу $A \in M_n(\mathbf{C})$ *неприводимой*, если A и A^* не имеют общих нетривиальных инвариантных подпространств. Иначе говоря, матрица A неприводима, если не существует унитарного подобия, которое превращало бы A в прямую сумму матриц меньшего порядка. В настоящей публикации задача об одновременном овеществлении рассматривается при дополнительном предположении, что одна из матриц заданной пары неприводима. Для определённости будем считать, что неприводима матрица A.

Основным результатом данной статьи является алгоритм, определяющий возможность одновременного овеществления заданной пары

Ключевые слова: одновременное подобие, неприводимая матрица, полярное разложение, теорема Такаги.

(A, B) с неприводимой матрицей A посредством унитарного подобия. Этот алгоритм изложен в разделе 4, а теоретические положения, на которых он основан, формулируются в разделах 2 и 3.

2. Если для матрицы $A \in M_n(\mathbf{C})$ выполнено соотношение (2), то, в общем случае, унитарная матрица P в нём определена неоднозначно. Говоря это, мы игнорируем очевидную неоднозначность, состоящую в возможности умножения P на числа модуля 1. Однако дело обстоит иначе, если матрица A неприводима.

Теорема 2. *Если неприводимая матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ удовлетворяют соотношению* (2)*, то унитарная матрица P в нём должна быть симметричной или кососимметричной.*

Этот факт был отмечен в [2]. Мы добавим к этому, что, не меняя по существу доказательства теоремы 2, можно показать, что матрица P (симметричная либо кососимметричная) определена однозначно (с точностью до умножения на числа модуля 1).

Как проверить, симметрична или кососимметрична матрица P из теоремы 2? Алгоритм, позволяющий найти матрицу P, предложен в [3]. Приведём его описание.

Алгоритм 1. 1. Рассматривая равенства

$$Z\bar{A} = AZ, \qquad ZA^T = A^*Z, \tag{3}$$

как систему линейных однородных уравнений относительно элементов матрицы Z, установить, имеется ли среди ее решений невырожденная матрица. Это делается следующим образом. Пусть для системы (3) найдена некоторая фундаментальная система решений и пусть этим решениям соответствуют матрицы $Z_1, Z_2, \ldots, Z_k$. Тогда любое решение Z может быть представлено как линейная комбинация $Z = \alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \cdots + \alpha_k Z_k$. Вычисляя определитель $\det(\alpha_1 Z_1 + \alpha_2 Z_2 + \cdots + \alpha_k Z_k)$ в точках решетки $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ со сторонами, параллельными координатным осям, и с $n+1$ узлами в каждом направлении, мы либо найдем точку $(\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_k^*)$, которой соответствует ненулевой определитель, либо таких точек в данной решетке нет. В первом случае $Z = \alpha_1^* Z_1 + \alpha_2^* Z_2 + \cdots + \alpha_k^* Z_k$ есть искомая невырожденная матрица, во втором случае невырожденных решений системы (3) не существует. Не существует поэтому и матрицы P, удовлетворяющей соотношению (2).

2. Найдём унитарный множитель P в полярном разложении матрицы Z. В силу невырожденности Z, матрица P определена единственным образом. Она и будет удовлетворять соотношению (2).

3. Пусть в заданной паре (A, B) матрица A удовлетворяет соотношению (2) и применение алгоритма 1 показало, что матрица P симметрична. (Если оказалось, что P кососимметрична, то A не может быть овеществлена посредством унитарного подобия и тем более не может быть овеществлена пара (A, B).)

В дальнейшем нам понадобится важный результат из теории матриц, называемый теоремой Такаги (см. [4, следствие 4.4.4]).

Теорема 3. *Если матрица $A \in M_n(\mathbf{C})$ симметрична, то существуют унитарная матрица $U \in M_n(\mathbf{C})$ и неотрицательная диагональная матрица $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$, такие, что $A = U\Sigma U^T$.*

Диагональные элементы матрицы Σ суть сингулярные числа матрицы A. Все сингулярные числа унитарной матрицы P равны единице, и если P симметрична, то её разложение Такаги принимает вид

$$P = UU^T, \tag{4}$$

где U – унитарная матрица.

Теорема 4. *Унитарное подобие с трансформирующей матрицей U овеществляет матрицу A, т.е. матрица $R = U^*AU$ вещественна.*

Доказательство. В самом деле, $\bar{R} = U^T\bar{A}\bar{U}$, но $\bar{A} = P^*AP$, где $P = UU^T$. Таким образом, $\bar{R} = U^T(UU^T)^*A(UU^T)\bar{U} = U^*AU = R$. □

Пусть Q – любая другая унитарная матрица, овеществляющая неприводимую матрицу A, т.е. матрица $S = Q^*AQ$ вещественна.

Теорема 5. *Матрица Q может быть представлена в виде $Q = \alpha UV$, где V – вещественная ортогональная матрица.*

Доказательство. Ясно, что матрицы R и S унитарно подобны, но они вещественны, и поэтому существует вещественная ортогональная матрица V такая, что $S = V^TRV$. (Доказательство этого не вполне очевидного утверждения можно найти, например, в [5].) Тогда $Q^*AQ = V^TU^*AUV$, или, что то же самое, $UVQ^*A = AUVQ^*$, то есть матрицы UVQ^* и A коммутируют. Так как UVQ^* унитарна, а A неприводима, такое возможно только, если $UVQ^* = \beta I$, или $Q = \beta^{-1}UV$. □

Следствие. *Пусть U – унитарная матрица из равенства (4). Если матрица U^*BU не является вещественной, то никакая унитарная матрица, овеществляющая A, не может овеществить B.*

4. Мы можем теперь сформулировать алгоритм для проверки возможности овеществить заданную пару (A, B) с неприводимой матрицей A посредством одновременного унитарного подобия.

Алгоритм 2. 1. Применяя алгоритм 1 к матрице A, находим матрицу P и выясняем, принадлежит ли A классу $\mathcal{U}R_n$.

2. Допустим, что применение алгоритма 1 показало, что $A \in \mathcal{U}R_n$. Находим матрицу U из равенства (4).

3. Если матрица U^*BU вещественна, то значит, пара (A, B) овеществляется унитарным подобием, а именно подобием посредством матрицы U. В противном случае можно утверждать, что при любой унитарной матрице $\tilde{U}$ хотя бы одна из матриц $\tilde{U}^*A\tilde{U}$ и $\tilde{U}^*B\tilde{U}$ не является вещественной.

Литература

1. Х. Д. Икрамов, *О комплексных матрицах, унитарно подобных вещественным матрицам.* — Мат. заметки **88** (2010), 841–848.
2. Х. Д. Икрамов, *О латентно-вещественных матрицах и блочных кватернионах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **382** (2010), 47–54.
3. Х. Д. Икрамов, *О конечных алгоритмах для проверки унитарного подобия и унитарной конгруэнтности пары комплексных матриц.* — Докл. РАН **437** (2011), 151–153.
4. Р. Хорн, Ч. Джонсон, *Матричный анализ.* Мир, М., 1989.
5. Х. Д. Икрамов, *Об одном критерии квазидиагонализуемости вещественных матриц.* — Ж. вычисл. матем. и матем. физ. **40** (2000), 6–20.

Abdikalykov A. K., Ikramov Kh. D. Simultaneous decomplexification of a pair of complex matrices via a unitary similarity transformation.

Let (A, B) be a given pair of complex $n \times n$ matrices and let at least one of these matrices be unitarily irreducible. An algorithm for verifying whether A and B can be made real via the same unitary similarity transformation is proposed and justified.

Московский
государственный университет,
ГСП-1, Ленинские горыБ
119991 Москва, Россия
E-mail: adiko2008@gmail.com,
ikramov@cs.msu.su

Поступило 11 апреля 2011 г.