Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 394, 2011 г.

И. Б. Кобызев

АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ АНАЛОГ КОНСТРУКЦИИ БОРЕЛЯ И ЕЕ СВОЙСТВА

1. Введение

В топологической литературе хорошо известна конструкция, называемая конструкцией Бореля, позволяющая по замкнутой подгруппе H компактной группы Ли G отождествить представления группы H с G-эквивариантными векторными расслоениями на многообразии G/H (см, например, классическую статью Атьи и Хирцебруха [1]). Однако соответствующая ей алгебраическая конструкция нигде в литературе в деталях не прописана. Настоящая работа посвящена восстановлению этого существенного пробела, причем данные нами определения, конструкции и доказательства даны в ситуации над произвольной нетеровой базисной схемой. Наибольшую эвристическую сложность вызвало нахождение удачного определения понятия G-эквивариантного расслоения на многообразии G/H. Следует отметить, что в статье Панина [2] эта алгебраическая конструкция была сформулирована, но все детали были пропущены.

Основные определения и формулировка результата собраны в разделе 2. Остальная часть работы посвящена детальному доказательству основной теоремы.

Автор выражает признательность своему научному руководителю И. А. Панину за постановку задачи и постоянную поддержку.

2. Основные определения

Пусть R – коммутативное нетерово кольцо с единицей, $X = \operatorname{Spec}(R)$ – аффинная схема. Пусть H – аффинная строго плоская групповая схема над X, $R[H]$ – R-алгебра, соответствующая аффинной X-схеме H.

Замечание 1. В дальнейшем при написании тензорного произведения над кольцом R мы будем вместо $\otimes_R$ писать просто $\otimes$.

Ключевые слова: эквивариантные векторные расслоения, комодули, торсоры, котензорное произведение, строго плоский спуск, конструкция Бореля.

Определение 1. *Пусть W – конечно порожденный проективный модуль над R. Левое $R[H]$-кодействие на W – это гомоморфизм R-модулей $\rho : W \to R[H] \otimes W$, такой что диаграммы*

$$
\begin{tikzcd}
R[H] \otimes R[H] \otimes W & R[H] \otimes W \arrow[l, "\mathrm{id}_H \times \rho"'] \\
R[H] \otimes W \arrow[u, "{\mu_H}^* \otimes \mathrm{id}"] & W \arrow[l, "\rho"'] \arrow[u, "\rho"']
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\rho"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_W"'] & R[H] \otimes W \arrow[d, "e^* \otimes \mathrm{id}"] \\
& R \otimes W
\end{tikzcd}
$$

коммутативны. Пара (W, ρ) называется левым $R[H]$-комодулем.

Определение 2. *Гомоморфизм левых $R[H]$-комодулей*

$$(W, \rho) \to (W_1, \rho_1)$$

– это такой гомоморфизм R-модулей $W \xrightarrow{\phi} W_1$, что диаграмма

$$
\begin{tikzcd}
W \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\phi"'] & R[H] \otimes W \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes \phi"'] \\
W_1 \arrow[r, "\rho_1"] & R[H] \otimes W_1
\end{tikzcd}
$$

коммутативна.

Определение правого $R[H]$-комодуля вводится аналогично с очевидными изменениями.

Определение 3. *Объекты категории $\mathrm{Rep}_X(H)$ – это левые $R[H]$-комодули (W, ρ).*

Морфизмы в категории $\mathrm{Rep}_X(H)$ – это гомоморфизмы левых $R[H]$-комодулей.

Всюду в работе нам будет необходимо использовать понятие торсора (или главного однородного H-расслоения). Дадим соответствующие определения.

Определение 4. *Пусть H – аффинная строго плоская X-групповая схема, Y – схема над X. Правый H-торсор над Y (правое главное* *однородное H-расслоение над Y) – это пара* $(q : \mathcal{H} \to Y, \nu : \mathcal{H} \times_X H \to \mathcal{H})$, *такая что*:

(0) $\mathcal{H}$ – *Y-схема,*

(a) ν – *морфизм Y-схем, являющийся правым H-действием,*

(b) *морфизм* $\psi = (\mathrm{pr}_{\mathcal{H}}, \nu) : \mathcal{H} \times_X H \to \mathcal{H} \times_Y \mathcal{H}$ – *изоморфизм Y-схем,*

(c) *морфизм q – строго плоский.*

Если дополнительно предположить, что Y и $\mathcal{H}$ – аффинные схемы, то ясно, что задание правого H-торсора над Y эквивалентно заданию пары $(q^* : R[Y] \to R[\mathcal{H}], \nu^* : R[\mathcal{H}] \to R[\mathcal{H}] \otimes R[H])$ *такой, что:*

(a$'$) ν^* – *гомоморфизм $R[Y]$-алгебр, являющийся правым $R[H]$-кодействием,*

(b$'$) *морфизм* $\psi^* : R[\mathcal{H}] \otimes_{R[Y]} R[\mathcal{H}] \to R[\mathcal{H}] \otimes R[H]$, *заданный правилом* $\psi^*(f \otimes g) = (f \otimes 1) \cdot \nu^*(g)$, *является изоморфизмом.*

(c$'$) q^* – *строго плоский гомоморфизм R-алгебр.*

Определение 5. *Морфизм правых H-торсоров над Y*:

$$(\mathcal{H} \xrightarrow{q} Y, \nu) \longrightarrow (\mathcal{H}' \xrightarrow{q'} Y, \nu')$$

это морфизм Y-схем $\alpha : \mathcal{H} \to \mathcal{H}'$, согласованный с действиями ν и ν', т.е. такой, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H} \times_X H & \xrightarrow{\nu} & \mathcal{H} \\ {\scriptstyle \alpha \times \mathrm{id}} \big\downarrow & & {\scriptstyle \alpha} \big\downarrow \\ \mathcal{H}' \times_X H & \xrightarrow{\nu'} & \mathcal{H}' \end{array}$$

коммутативна.

Снова, если предположить, что Y и $\mathcal{H}$ – аффинные схемы, то задание морфизма левых H-торсоров над Y равносильно заданию гомоморфизма $R[Y]$-алгебр $\alpha^* : R[\mathcal{H}'] \to R[\mathcal{H}]$ *такого, что коммутативна диаграмма $R[Y]$-алгебр*:

$$\begin{array}{ccc} R[\mathcal{H}] \otimes R[H] & \xleftarrow{\nu^*} & R[\mathcal{H}] \\ {\scriptstyle \alpha^* \otimes \mathrm{id}} \big\uparrow & & {\scriptstyle \alpha^*} \big\uparrow \\ R[\mathcal{H}'] \otimes R[H] & \xleftarrow{\nu'^*} & R[\mathcal{H}']. \end{array}$$

Пусть G – аффинная строго плоская X-групповая схема. Пусть $H \subset G$ – замкнутая строго плоская X-групповая подсхема (таким образом, H – тоже аффинная схема – см. [3]).

Определение 6. *X-фактор схемой G/H называется такая X-схема Y, что пара $(G \xrightarrow{q} Y, \nu_H : G\times_X H \to G)$ является правым H-торсором над Y, где $\nu_H : (g,h) \mapsto gh$.*

Будем предполагать, что в нашей ситуации X-фактор схема G/H существует и является аффинной. Пусть также она является строго плоской X-схемой и к тому же нетерова. Будем впредь обозначать ее Y.

Пусть отображение $\theta : G\times_X Y \to Y$ есть левое G-действие (морфизм X-схем). Обозначим через $y_0 = \bar{e} : X \to Y$ соответствующее сечение.

Пусть $\theta^* : R[Y] \to R[G] \otimes R[Y]$ – соответствующий гомоморфизм R-алгебр.

Определение 7. *Объект категории $\mathrm{Vect}_X^G(G/H) = \mathrm{Vect}_X^G(Y)$ – это пара*

$$(\mathcal{V}, \widehat{\rho} : \mathcal{V} \to R[G] \otimes \mathcal{V}), \qquad \textit{такая что:}$$

(a) *$\mathcal{V}$ – $R[Y]$-модуль локально свободный и конечно порожденный,*

(b) *$\widehat{\rho}$ – левое $R[G]$-кодействие на R-модуле $\mathcal{V}$.*

(c) *если на $R[G] \otimes \mathcal{V}$ рассмотреть структуру $R[Y]$-модуля, заданную правилом*

$$f \cdot (a \otimes s) = \theta^*(f) \cdot (a \otimes s), \quad a \in R[G], f \in R[Y], s \in \mathcal{V},$$

то гомоморфизм $\widehat{\rho}$ становится гомоморфизмом $R[Y]$-модулей, то есть $\widehat{\rho}(f \cdot s) = \theta^*(f) \cdot \widehat{\rho}(s)$.

Пусть $(\mathcal{V}, \widehat{\rho})$ и $(\mathcal{V}_1, \widehat{\rho}_1)$ – два объекта категории $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$.

Морфизм $(\mathcal{V}, \widehat{\rho}) \to (\mathcal{V}_1, \widehat{\rho}_1)$ в категории $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$ – это гомоморфизм $R[Y]$-модулей $\widehat{\phi} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}_1$, согласованный с $\widehat{\rho}$ и $\widehat{\rho}_1$, то есть диаграмма $R[Y]$-модулей

$$\begin{tikzcd} R[G] \otimes \mathcal{V} \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\widehat{\phi}"'] & \mathcal{V} \arrow[l, "\widehat{\rho}"'] \arrow[d, "\widehat{\phi}"] \\ R[G] \otimes \mathcal{V}_1 & \mathcal{V}_1 \arrow[l, "\widehat{\rho}_1"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Основная цель нашей работы – доказать, что имеют место две взаимно-обратные эквивалентности категорий:

$$\mathrm{Rep}_X(H) \underset{\mathrm{Res}}{\overset{\mathrm{Ind}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Vect}_X^G(Y)\ .$$

Причем в обеих категориях есть операция тензорного произведения и указанные функторы строго перестановочны с указанными тензорными произведениями. Детали даются ниже.

Определение 8. *Пусть* (V,ρ), $(V_1,\rho_1)\in \mathrm{Ob}(\mathrm{Rep}_X(H))$. *Рассмотрим композицию*

$$V\otimes V_1 \xrightarrow{\rho\otimes\rho_1} R[H]\otimes V\otimes R[H]\otimes V_1 \xrightarrow{\Delta_H^*\otimes \mathrm{id}} R[H]\otimes V\otimes V_1$$

где $\Delta_H^* : R[H]\otimes R[H]\to R[H]$, $\Delta_H^*(a\otimes b)=ab$, *а последняя стрелка определена так:* $a\otimes v\otimes b\otimes w\mapsto ab\otimes v\otimes w$. *Для краткости обозначим сквозную стрелку через* $\Delta_H^*\circ(\rho\otimes\rho_1)$.

Положим: $(V,\rho)\otimes(V_1,\rho_1)=(V\otimes V_1,\Delta_H^*\circ(\rho\otimes\rho_1))$.

Можно проверить, что $\Delta_H^*\circ(\rho\otimes\rho_1)$ *– это левое* $R[H]$*-кодействие. Таким образом,* $(V,\rho)\otimes(V_1,\rho_1)$ *– объект* $\mathrm{Rep}_X(H)$. *Он называется тензорным произведением левых* $R[H]$*-комодулей.*

Определение 9. *Пусть* $(\mathcal{V},\widehat{\rho})$ *и* $(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1)$ *– объекты* $\mathrm{Vect}_X^G(H)$. *Рассмотрим композицию*

$$\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1 \xrightarrow{\hat\rho\otimes\hat\rho_1} (R[G]\otimes\mathcal{V})\otimes_{R[Y]}(R[G]\otimes\mathcal{V}_1) \xrightarrow{\Delta_G^*} R[G]\otimes\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1$$

где последняя стрелка определена так: $a\otimes s\otimes b\otimes s_1\mapsto ab\otimes(s\otimes s_1)$. *Несложно проверить, что это гомоморфизм* $R[Y]$*-модулей.*

Обозначим сквозную стрелку $\Delta_G^*\circ(\widehat{\rho}\otimes\widehat{\rho}_1)$, *легко проверяется, что она есть* $R[G]$*-кодействие на* R*-модуле* $\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1$. *Далее,* $\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1$ *– локально свободный конечно порожденный* $R[Y]$*-модуль. Гомоморфизм* $\Delta_G^*\circ(\widehat{\rho}\otimes\widehat{\rho}_1)$ *является* $R[Y]$*-модульным по построению.*

Таким образом, $(\mathcal{V},\widehat{\rho})\otimes_{R[Y]}(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1)=(\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1,\Delta_G^*\circ(\widehat{\rho}\otimes\widehat{\rho}_1))$ *– объект* $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$.

В части 5 покажем, что определенные произведения ассоциативны, коммутативны и имеют единицу.

Сформулируем основную теорему, которую будем доказывать в частях 3, 4 и 5.

Основная теорема. *Пусть* G, $H\subset G$, Y, $\theta: G\times_X Y\to Y$, $\theta^*: R[Y]\to R[G]\otimes R[Y]$ *такие, как перед определением 7. Тогда имеют место взаимно-обратные тензорные эквивалентности категорий:*

$$\mathrm{Ind}:\mathrm{Rep}_X(H)\to \mathrm{Vect}_X^G(Y),$$
$$\mathrm{Res}:\mathrm{Vect}_X^G(Y)\to \mathrm{Rep}_X(H).$$

Другими словами, функторы Res∘Ind *и* Ind∘Res *изоморфны тождественным и, кроме того, имеются изоморфизмы (функториальные по каждому аргументу)*

$$\mathrm{Ind}(V,\rho)\otimes_{R[Y]}\mathrm{Ind}(V_1,\rho_1)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Ind}((V,\rho)\otimes(V_1,\rho_1)),$$

$$\mathrm{Res}(\mathcal{V},\widehat{\rho})\otimes\mathrm{Res}(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Res}((\mathcal{V},\widehat{\rho})\otimes_{R[Y]}(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1)),$$

в категориях $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$ *и* $\mathrm{Rep}_X(H)$*, соответственно.*

Обозначение 1. Пусть $(\mathcal{H}\xrightarrow{q}Y,\nu)$ – правый H-торсор над Y. Будем обозначать $i\nu:\mathcal{H}\times_X H\to\mathcal{H}$ отображение $(y,h)\mapsto yh^{-1}$.

Теперь перейдем к построению функторов Ind и Res.

3. Описание функторов Res и Ind

Функтор Ind

Прежде всего, фиксируем следующие данные. Пусть $X=\mathrm{Spec}(R)$, Y – аффинная нетерова строго плоская X-схема, H – аффинная групповая X-схема, $\mathcal{H}$ – аффинная схема. Более того, $(\mathcal{H}\xrightarrow{q}Y,\nu:\mathcal{H}\times_X H\to\mathcal{H})$ – правый H-торсор над Y. Пусть (V,ρ) – левый $R[H]$-комодуль.

Определение 10.

$$R[\mathcal{H}]\square_{R[H]}V=\ker\left(R[\mathcal{H}]\otimes V\underset{-\mathrm{id}\otimes\rho}{\overset{(i\nu)^*\otimes\mathrm{id}}{\rightrightarrows}}R[\mathcal{H}]\otimes R[H]\otimes V\right).$$

Введем на $R[\mathcal{H}]\square_{R[H]}V$ структуру $R[Y]$-модуля. Для этого введем стуктуры $R[Y]$-модулей на $R[\mathcal{H}]\otimes V$ и $R[\mathcal{H}]\otimes R[H]\otimes V$ следующим образом: $f\cdot(a\otimes v)=q^*(f)a\otimes v$ и $f\cdot(a\otimes(h\otimes v))=q^*(f)a\otimes(h\otimes v)$. Очевидно, что тогда отображения $(i\nu)^*\otimes\mathrm{id}$ и $\mathrm{id}\otimes\rho$ становятся гомоморфизмами $R[Y]$-модулей, а значит, $R[\mathcal{H}]\square_{R[H]}V$ – $R[Y]$-подмодуль $R[Y]$-модуля $R[\mathcal{H}]\otimes V$.

Конструкция в определении 10 называется котензорным произведением пары $(R[\mathcal{H}],\nu^*)$ и (V,ρ).

Утверждение 3.1. *Пусть* $(\mathcal{H}_1\xrightarrow{q_1}Y,\nu_1)\xrightarrow{\cong\phi}(\mathcal{H}_2\xrightarrow{q_2}Y,\nu_2)$ *– изоморфизм правых H-торсоров над Y. Пусть (V,ρ) – $R[H]$-комодуль. Тогда изоморфизм $R[Y]$-модулей:*

$$R[\mathcal{H}_2]\otimes V\xrightarrow{\phi^*\otimes\mathrm{id}_V}R[\mathcal{H}_1]\otimes V$$

индуцирует изоморфизм $R[Y]$-модулей:

$$R[\mathcal{H}_2]\square_{R[H]}V \xrightarrow[\cong]{\phi^*\square\mathrm{id}_V} R[\mathcal{H}_1]\square_{R[H]}V.$$

Доказательство. Этот факт немедленно следует из коммутативности диаграммы $R[Y]$-модулей

$$\begin{tikzcd}
R[\mathcal{H}_2]\otimes R[H]\otimes V \arrow[r, "\phi^*\otimes\mathrm{id}_H\otimes\mathrm{id}_V", "\cong"'] & R[\mathcal{H}_1]\otimes R[H]\otimes V \\
R[\mathcal{H}_2]\otimes V \arrow[u, shift right, "(i\nu_2)^*\otimes\mathrm{id}_V"] \arrow[u, shift left, "-\mathrm{id}_{\mathcal{H}_2}\otimes\rho"'] \arrow[r, "\phi^*\otimes\mathrm{id}_V", "\cong"'] & R[\mathcal{H}_1]\otimes V. \arrow[u, shift right, "(i\nu_1)^*\otimes\mathrm{id}_V"] \arrow[u, shift left, "-\mathrm{id}_{\mathcal{H}_1}\otimes\rho"']
\end{tikzcd}$$

Коммутативность этой диаграммы следует из того, что ϕ согласован с действиями ν_1 и ν_2. $\square$

Утверждение 3.2. *Пусть $(\mathcal{H}\xrightarrow{q}Y,\nu)$ – правый H-торсор над Y. Пусть $(V_1,\rho_1)\xrightarrow{\psi}(V_2,\rho_2)$ – гомоморфизм левых $R[H]$-комодулей. Тогда гомоморфизм $R[Y]$-модулей: $R[\mathcal{H}]\otimes V_1 \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\otimes\psi} R[\mathcal{H}]\otimes V_2$ индуцирует гомоморфизм $R[Y]$-модулей:*

$$R[\mathcal{H}]\square_{R[H]}V_1 \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\square\psi} R[\mathcal{H}]\square_{R[H]}V_2.$$

Доказательство. Доказательство аналогично предыдущему утверждению. $\square$

Утверждение 3.3. *Пусть $(\mathcal{H},\nu)$ – правый H-торсор над Y, пусть $Y'\xrightarrow{f}Y$ – морфизм X-схем и $(\mathcal{H}',\nu')$ – замена базы H-торсора $(\mathcal{H},\nu)$ при помощи f. Пусть (V,ρ) – левый $R[H]$-комодуль. Тогда стандартный изоморфизм $R[Y']$-модулей*

$$R[Y']\otimes_{R[Y]}(R[\mathcal{H}]\otimes V)\xrightarrow{\cong}(R[Y']\otimes_{R[Y]}R[\mathcal{H}])\otimes V = R[\mathcal{H}']\otimes V$$

индуцирует изоморфизм $R[Y']$-модулей

$$R[Y']\otimes_{R[Y]}(R[\mathcal{H}]\square_{R[H]}V)\xrightarrow{\cong}R[\mathcal{H}']\square_{R[H]}V.$$

Доказательство. Доказательство сразу следует из коммутативности диаграммы $R[Y']$-модулей:

$$\begin{tikzcd}
R[Y']\otimes_{R[Y]}(R[\mathcal{H}]\otimes R[H]\otimes V) \arrow[r, "\simeq"] & (R[Y']\otimes_{R[Y]}R[\mathcal{H}])\otimes R[H]\otimes V \\
R[Y']\otimes_{R[Y]}(R[\mathcal{H}]\otimes V) \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u, shift right, "\mathrm{id}_{Y'}\otimes(i\nu)^*\otimes\mathrm{id}_V"] \arrow[u, shift left, "-\mathrm{id}_{Y'}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\otimes\rho"'] & (R[Y']\otimes_{R[Y]}R[\mathcal{H}])\otimes V. \arrow[u, shift right, "(i\nu_{H'})^*\otimes\mathrm{id}_V"] \arrow[u, shift left, "-\mathrm{id}\otimes\rho"']
\end{tikzcd}$$

$\square$

Утверждение 3.4. *Пусть* $(\mathcal{H},\nu)$ *– тривиальный правый* H*-торсор, то есть* $(Y\times_X H\xrightarrow{\mathrm{pr}} Y, \mathrm{id}\times\mu_H : (Y\times_X H)\times_X H\to Y\times_X H)$*. Тогда для любого левого* $R[Y]$*-комодуля* (V,ρ) *имеет место изоморфизм* $R[Y]$*-модулей (функториальный по* (V,ρ)*):*

$$R[Y]\otimes V\cong R[Y\times_X H]\square_{R[H]}V.$$

Доказательство. По определению,

$$R[\mathcal{H}]\square_{R[H]}V=\ker(R[Y]\otimes R[H]\otimes V \underset{-\mathrm{id}_Y\otimes\mathrm{id}_H\otimes\rho}{\overset{\mathrm{id}_Y\otimes(i\mu_H)^*\otimes\mathrm{id}_V}{\rightrightarrows}} R[Y]\otimes R[H]\otimes R[H]\otimes V)=$$

(вынесем $R[Y]$ за скобки, так как по предположению $R[Y]$ – плоская R-алгебра)

$$=R[Y]\otimes\ker(R[H]\otimes V \underset{\mathrm{id}_H\otimes\rho}{\overset{(i\mu_H)^*\otimes\mathrm{id}_V}{\rightrightarrows}} R[H]\otimes R[H]\otimes V).$$

Нам осталось показать, что V изоморфно ядру разности стрелок. Для начала заметим, что есть вложение: $\rho: V\hookrightarrow R[H]\otimes V$. Это следствие того, что единица действует тождественно:

$$\begin{tikzcd}
V=R\otimes V & R[H]\otimes V \arrow[l, "e^*\otimes\mathrm{id}"'] & V. \arrow[l, "\rho"'] \arrow[ll, bend left, "\mathrm{id}"]
\end{tikzcd}$$

Коммутативная диаграмма из определения 1 показывает, что:

$$\rho(V)\subseteq\ker((i\mu_H)^*\otimes\mathrm{id}_V-\mathrm{id}_H\otimes\rho).$$

Для доказательства сюръективности ρ возьмем $\alpha \in \ker((i\mu_H)^* \otimes \mathrm{id}_V - \mathrm{id}_H \otimes \rho)$ и рассмотрим диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
R[H] \otimes V \arrow[d, "\mu^*\otimes\mathrm{id}"] \arrow[dd, bend right=60, "\mathrm{id}"'] & V \arrow[l, hook', "\rho"'] \arrow[d, hook, "\rho"] \\
R[H] \otimes R[H] \otimes V \arrow[d, "e^*\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"] & R[H] \otimes V \arrow[l, "\mathrm{id}\otimes\rho"] \arrow[d, "e^*\otimes\mathrm{id}"] \\
R \otimes R[H] \otimes V & R \otimes V = V. \arrow[l, "\mathrm{id}_R\otimes\rho"]
\end{tikzcd}$$

Видно, что $1\otimes\alpha = (\mathrm{id}_R\otimes\rho)(1\otimes\beta)$, где $\beta \in V$ – единственный элемент V, такой что $1\otimes\beta = (e^*\otimes\mathrm{id}_V)\alpha$. Поэтому в $R[H]\otimes V$ имеем $\alpha = \rho(\beta)$. □

Утверждение 3.5. *Пусть* $(\mathcal{H} \xrightarrow{q} Y, \nu)$ *– правый H-торсор над Y. Рассмотрим морфизм $q : \mathcal{H} \to Y$ как замену базы, получим правый H-торсор $(\mathcal{H}\times_Y\mathcal{H} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathcal{H}, \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \times_Y \nu)$ над $\mathcal{H}$. Утверждается, что изоморфизм $\mathcal{H}$-схем из пункта (b) определения 4:*

$\psi = (\mathrm{pr}_{\mathcal{H}}, \nu) : \mathcal{H}\times_X H \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}\times_Y\mathcal{H}$ является изоморфизмом правых H-торсоров над $\mathcal{H}$.

Доказательство. Утверждение следует из коммутативности диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
(\mathcal{H}\times_X H)\times_X H \arrow[r, "\psi\times\mathrm{id}_H"] \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\times\mu_H"] & (\mathcal{H}\times_Y\mathcal{H})\times_X H \arrow[d, "\mathrm{id}_{\mathcal{H}}\times\nu"] \\
\mathcal{H}\times_X H \arrow[r, "\psi"] & \mathcal{H}\times_Y\mathcal{H},
\end{tikzcd}$$

которая, в свою очередь, легко проверяется на элементах. □

Следствие 3.1. *Пусть $(\mathcal{H} \xrightarrow{q} Y, \nu)$ – правый H-торсор над Y. Пусть (V, ρ) – левый $R[H]$-комодуль. Тогда $R[\mathcal{H}]\square_{R[H]}V$ – локально свободный $R[Y]$-модуль ранга $\mathrm{rank}_R(V)$.*

Доказательство. Рассмотрим правый H-торсор

$$(\mathcal{H}\times_Y\mathcal{H} \xrightarrow{\mathrm{pr}_1} \mathcal{H}, \mathrm{id}_{\mathcal{H}} \times_Y \nu)$$

над $\mathcal{H}$ из утверждения 3.5. По утверждению 3.3:

$$R[\mathcal{H}]\otimes_{R[Y]}(R[\mathcal{H}]\square_{R[H]}V) = R[\mathcal{H}\times_Y\mathcal{H}]\square_{R[H]}V =$$

по утверждениям 3.5 и 3.1

$$= R[\mathcal{H}\times_X H]\square_{R[H]}V =$$

по утверждению 3.4

$$= R[\mathcal{H}] \otimes V.$$

Ясно, что $R[\mathcal{H}]\otimes V$ – плоский и конечно порожденный $R[\mathcal{H}]$-модуль.

Поскольку $R[\mathcal{H}]$ – строго плоская $R[Y]$-алгебра, то по теории строго плоского спуска (см., например, [4]) $R[Y]$-модуль $R[\mathcal{H}]\square_{R[H]}V$ тоже плоский и конечно порожденный, а значит, в силу предположения нетеровости кольца $R[Y]$, – локально свободный. $\square$

Сформулируем без доказательства стандартный факт из теории торсоров.

Утверждение 3.6. *Правые H-торсоры $(\mathcal{H} \xrightarrow{q} Y, \nu)$ и $(Y\times_X H, \mathrm{id}\times\mu_H)$ над Y изоморфны тогда и только тогда, когда существует сечение $s : Y \to \mathcal{H}$ проекции q. Более того, если s – такое сечение, то морфизм*

$$Y\times_X H \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}, \quad (y,h) \mapsto s(y)\cdot h,$$

является изоморфизмом правых H-торсоров над Y.

Пусть G, $H\subset G$, $Y = G/H$, $\theta : G\times_X Y \to Y$, $\theta^* : R[Y] \to R[G]\otimes R[Y]$, $y_0 = \bar{e} \in G/H = Y$ такие, как перед определением 7.

Для каждого левого $R[H]$-комодуля (V,ρ) рассмотрим $R[Y]$-модуль

$$\mathcal{V} := R[G]\square_{R[H]}V.$$

Далее рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathcal{V} \arrow[r, "i"] \arrow[d, dashed, "\hat{\rho}"'] & R[G]\otimes V \arrow[r, shift left, "(i\nu)^*\otimes\mathrm{id}_V"] \arrow[r, shift right, "-\mathrm{id}_G\otimes\rho"'] \arrow[d, "\mu_G^*\otimes\mathrm{id}_V"'] & R[G]\otimes R[H]\otimes V \arrow[d, "\mu_G^*\otimes\mathrm{id}_H\otimes\mathrm{id}_V"] \\
0 \arrow[r] & R[G]\otimes\mathcal{V} \arrow[r, "\mathrm{id}_G\otimes i"] & R[G]\otimes R[G]\otimes V \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}_G\otimes(i\nu)^*\otimes\mathrm{id}_V"] \arrow[r, shift right, "-\mathrm{id}_G\otimes\mathrm{id}_G\otimes\rho"'] & R[G]\otimes R[G]\otimes R[H]\otimes V.
\end{tikzcd}$$

Правый квадрат в этой диаграмме коммутативен по верхним и нижним стрелкам очевидным образом. Следовательно, стрелка $\mu_G^*\otimes\mathrm{id}_V$ индуцирует гомоморфизм R-модулей $\widehat{\rho} : \mathcal{V} \to R[G]\otimes\mathcal{V}$.

Лемма 1. *Если $R[G]\otimes\mathcal{V}$ рассмотреть как $R[Y]$-модуль, следуя определению 7, то $\widehat{\rho}$ – гомоморфизм $R[Y]$-модулей.*

Доказательство. Если мы рассмотрим $R[G] \otimes R[G] \otimes V$ как $R[G] \otimes R[Y]$-модуль, используя $\mathrm{id}_G \otimes q^*$, то гомоморфизм $\mathrm{id}_G \otimes i$ – гомоморфизм $R[G] \otimes R[Y]$-модулей. Действительно, пусть $a \otimes f \in R[G] \otimes R[Y]$ и $a_1 \otimes s \in R[G] \otimes \mathcal{V}$. Тогда

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_G \otimes i)((a \otimes f) \cdot (a_1 \otimes s)) &= (\mathrm{id}_G \otimes i)(aa_1 \otimes fs) = aa_1 \otimes i(fs) \\ &= aa_1 \otimes q^*(f) \cdot i(s) = (a \otimes q^*(f)) \cdot (a_1 \otimes i(s)) \\ &= (\mathrm{id}_G \otimes q^*)(a \otimes f) \cdot (\mathrm{id}_G \otimes i)(a_1 \otimes s).\end{aligned}$$

Если мы рассмотрим $R[G] \otimes R[G] \otimes V$ как $R[G]$-модуль, используя гомоморфизм $R[G]$-алгебр $\mu_G^* : R[G] \to R[G] \otimes R[G]$, то ясно, что $\mu_G \otimes \mathrm{id}_V$ станет гомоморфизмом $R[G]$-модулей.

Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} R[Y] \arrow[r, "q^*"] \arrow[d, "\theta^*"'] & R[G] \arrow[d, "\mu_G^*"'] \\ R[G] \otimes R[Y] \arrow[r, "\mathrm{id}_G \otimes q^*"] & R[G] \otimes R[G]. \end{tikzcd}$$

Пусть $f \in R[Y], s \in \mathcal{V}$ рассмотрим цепочку равенств, следующих из вышесказанного:

$$\begin{aligned}&(\mathrm{id}_G \otimes i)\widehat{\rho}(fs) = (\mu_G \otimes \mathrm{id}_V)i(fs) = (\mu_G \otimes \mathrm{id}_V)(q^*(f) \cdot i(s)) \\ &= (\mu_G^* q^*(f)) \cdot (\mu_G \otimes \mathrm{id}_V)(i(s)) = (\mathrm{id}_G \otimes q^*)(\theta^*(f)) \cdot (\mathrm{id}_G \otimes i)\widehat{\rho}(s) \\ &= (\mathrm{id}_G \otimes i)(\theta^*(f) \cdot \widehat{\rho}(s)).\end{aligned}$$

Так как $\mathrm{id}_G \otimes i$ – мономорфизм, то мы получили, что $\widehat{\rho}(fs) = \theta^*(f) \cdot \widehat{\rho}(s)$. □

Пара $(\mathcal{V}, \widehat{\rho})$ является объектом категории $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$. Действительно, $\mathcal{V}$ – это локально свободный и конечно порожденный $R[Y]$-модуль в силу следствия 3.1. $\widehat{\rho}$ является левым кодействием на R-модуле $\mathcal{V}$, так как диаграмма

$$\begin{tikzcd} R[G] \arrow[r, "\mu_G^*"] \arrow[d, "\mu_G^*"] & R[G] \otimes R[G] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \otimes \mu_G^*"] \\ R[G] \otimes R[G] \arrow[r, "\mu_G^* \otimes \mathrm{id}_G"] & R[G] \otimes R[G] \otimes R[G] \end{tikzcd}$$

коммутативна. Наконец, $\widehat{\rho}(fs) = \theta^*(f) \cdot \widehat{\rho}(s)$ по лемме.

Определение 11. *Для левого $R[H]$-комодуля (V, ρ) положим*

$$\mathrm{Ind}(V, \rho) = (\mathcal{V}, \widehat{\rho}) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Vect}_X^G(Y)).$$

Утверждение 3.7. *Пусть $(V, \rho) \xrightarrow{\phi} (V_1, \rho_1)$ – гомоморфизм левых $R[H]$-комодулей. Тогда гомоморфизм*

$$\mathcal{V} = R[G] \square_{R[H]} V \xrightarrow{\mathrm{id}_G \square \phi} R[G] \square_{R[H]} V_1 = \mathcal{V}_1,$$

построенный в утверждении 3.2*, является гомоморфизмом $(\mathcal{V}, \widehat{\rho}) \rightarrow (\mathcal{V}_1, \widehat{\rho}_1)$ в категории $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$.*

Доказательство. В утверждении 3.2 уже доказали, что $\mathrm{id}_G \square \phi := \widehat{\phi}$ – гомоморфизм $R[Y]$-модулей. Согласованность с $R[G]$-кодействиями следует из рассмотрения большой диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_1 \arrow[rrr, hook, "i_1"] \arrow[ddd, "\hat{\rho}_1"'] & & & R[G] \otimes V_1 \arrow[ddd, "\mu_G^* \otimes \mathrm{id}_{V_1}"'] \\
& \mathcal{V} \arrow[ul, "\hat{\phi}"'] \arrow[r, hook, "i"] \arrow[d, "\hat{\rho}"] & R[G] \otimes V \arrow[ur, "\mathrm{id}_G \otimes \phi"] \arrow[d, "\mu_G^* \otimes \mathrm{id}_V"] & \\
& R[G] \otimes \mathcal{V} \arrow[r, hook, "\mathrm{id}_G \otimes i"] \arrow[dl, "\mathrm{id}_G \otimes \hat{\phi}"] & R[G] \otimes R[G] \otimes V \arrow[dr, "\mathrm{id}_G \otimes \mathrm{id}_G \otimes \phi"] & \\
R[G] \otimes \mathcal{V}_1 \arrow[rrr, hook, "\mathrm{id}_G \otimes i_1"] & & & R[G] \otimes R[G] \otimes V_1.
\end{tikzcd}$$

Верхний, нижний, центральный и правый квадраты коммутативны, и внешний коммутативен. Гомоморфизм $\mathrm{id}_G \otimes i_1$ инъективен, так как $R[G]$ – плоская R-алгебра. Поэтому левый квадрат коммутативен. $\square$

Таким образом корректно следующее определение.

Определение 12. *Правила $(V, \rho) \longmapsto (\mathcal{V}, \widehat{\rho})$ и*

$$[\phi : (V, \rho) \rightarrow (V_1, \rho_1)] \longmapsto [\mathrm{id}_G \square \phi : (\mathcal{V}, \widehat{\rho}) \rightarrow (\mathcal{V}_1, \widehat{\rho}_1)]$$

задают функтор

$$\mathrm{Ind} : \mathrm{Rep}_X(H) \rightarrow \mathrm{Vect}_X^G(G/H) = \mathrm{Vect}_X^G(Y).$$

Функтор Res

Пусть $(\mathcal{V}, \widehat{\rho})$ – объект $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$. Здесь G, H, Y, θ^*, y_0 такие же, как перед определением 7.

Морфизм θ индуцирует морфизм $\theta_H : H \times_X Y \to Y$, такой что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
H \times_X Y \arrow[r, "\theta_H"] & Y \\
H \times_X X \arrow[u, "\mathrm{id}_H \times y_0"] \arrow[r, "p"] & X \arrow[u, "y_0"']
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Поэтому коммутативна диаграмма R-алгебр:

$$\begin{tikzcd}
R[H] \otimes R[Y] \arrow[d, "\mathrm{id}_H \otimes y_0^*"] & R[Y] \arrow[l, "\theta_H^*"'] \arrow[d, "y_0^*"] \\
R[H] \otimes R & R. \arrow[l, "p^*"']
\end{tikzcd}$$

Следовательно, $\ker(\mathrm{id}_H \otimes y_0^*) = R[H] \otimes I(y_0)$, где $I(y_0) = \ker(y_0^*)$ и $\theta_H^*(I(y_0)) \subseteq R[H] \otimes I(y_0)$.

Введем гомоморфизм $\widehat{\rho}_H$

$$\begin{tikzcd}
R[H] \otimes \mathcal{V} & R[G] \otimes \mathcal{V} \arrow[l, "\mathrm{in}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}}"'] & \mathcal{V} \arrow[l, "\widehat{\rho}"'] \arrow[ll, bend left, "\widehat{\rho}_H"]
\end{tikzcd} ,$$

который является гомоморфизмом $R[Y]$-модулей, если структура $R[Y]$-модуля на $R[H] \otimes \mathcal{V}$ задана правилом $f \cdot (a \otimes s) = \theta_H^*(f) \cdot (a \otimes s)$. Поэтому диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & R[H] \otimes \mathcal{V} & \mathcal{V} \arrow[l, "\widehat{\rho}_H"'] & \\
R[H] \otimes I(y_0) \otimes \mathcal{V} \arrow[ur, "\mathrm{id}_H \otimes (m_{\mathcal{V}} \circ j)"] \arrow[r, hook, "\mathrm{id}_H \otimes j"] & R[H] \otimes R[Y] \otimes \mathcal{V} \arrow[u, "\mathrm{id}_H \otimes m_{\mathcal{V}}"] & R[Y] \otimes \mathcal{V} \arrow[l, "\theta_H^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}}"'] \arrow[u, "m_{\mathcal{V}}"'] & I(y_0) \otimes \mathcal{V} \arrow[l, hook', "j"'] \arrow[ul, "m_{\mathcal{V}} \circ j"'] \arrow[lll, bend left, "\theta_H^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}}"]
\end{tikzcd}$$

коммутативна, где j – включение, $m_{\mathcal{V}}$ – $R[Y]$-модульная структура.

Коммутативность внешней трапеции показывает, что имеется единственный гомоморфизм R-модулей

$$R[H] \otimes \mathcal{V}(y_0) \xleftarrow{\widehat{\rho}_H(y_0)} \mathcal{V}(y_0) := \mathcal{V}/I(y_0)\mathcal{V},$$

делающий коммутативной диаграмму

$$\begin{tikzcd} R[H] \otimes \mathcal{V}(y_0) & \mathcal{V}(y_0) \arrow[l, "\widehat{\rho}_H(y_0)"'] \\ R[H] \otimes \mathcal{V} \arrow[u, "\mathrm{id}_H \otimes \pi(y_0)"'] & \mathcal{V}. \arrow[l, "\widehat{\rho}_H"'] \arrow[u, "\pi(y_0)"'] \end{tikzcd}$$

Поскольку $\widehat{\rho}_H$ – левое $R[H]$-кодействие, то и $\widehat{\rho}_H(y_0)$ – левое $R[H]$-кодействие.

Заметим, что $y_0^* : R[Y] \to R$ сюръективно, поэтому есть естественный изоморфизм $R[Y]/I(y_0) \cong R$, и можно переписать $\mathcal{V}/I(y_0)\mathcal{V} \cong R \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}$. Так как $\mathcal{V}$ конечно порожденный $R[Y]$-модуль, то $\mathcal{V}(y_0)$ – конечно порожденный R-модуль. Проективность R-модуля $\mathcal{V}(y_0)$ очевидна. Следовательно, $(\mathcal{V}(y_0), \widehat{\rho}_H(y_0))$ – левый $R[H]$-комодуль.

Определение 13. *Положим*

$$\mathrm{Res}(\mathcal{V}, \widehat{\rho}) = (\mathcal{V}(y_0), \widehat{\rho}_H(y_0)) \in \mathrm{Ob}(\mathrm{Rep}_X(H)).$$

Утверждение 3.8. *Пусть* $(\mathcal{V}, \widehat{\rho}) \xrightarrow{\Psi} (\mathcal{V}_1, \widehat{\rho}_1)$ *– морфизм в категории* $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$. *Тогда гомоморфизм*

$$\mathcal{V}(y_0) \xrightarrow{\Psi(y_0)} \mathcal{V}_1(y_0)$$

является гомоморфизмом левых $R[H]$*-комодулей.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
R[H]\otimes\mathcal{V}_1 \arrow[dr, "\mathrm{id}_H\otimes\pi_1(y_0)"] & & & \mathcal{V}_1 \arrow[lll, "\widehat{\rho}_{1H}"'] \arrow[dl, "\pi_1(y_0)"'] \\
& R[H]\otimes\mathcal{V}_1(y_0) & \mathcal{V}_1(y_0) \arrow[l, "\widehat{\rho}_{1H}(y_0)"'] & \\
& R[H]\otimes\mathcal{V}(y_0) \arrow[u, "\mathrm{id}_H\otimes\Psi(y_0)"'] & \mathcal{V}(y_0) \arrow[l, "\widehat{\rho}_H(y_0)"'] \arrow[u, "\Psi(y_0)"'] & \\
R[H]\otimes\mathcal{V} \arrow[uuu, "\mathrm{id}_H\otimes\Psi"'] \arrow[ur, "\mathrm{id}_H\otimes\pi(y_0)"] & & & \mathcal{V}. \arrow[lll, "\widehat{\rho}_H"'] \arrow[ul, "\pi(y_0)"'] \arrow[uuu, "\Psi"']
\end{tikzcd}$$

Коммутативность внутреннего квадрата следует из коммутативности всех остальных квадратов и сюръективности отображения $\mathrm{id}_H\otimes\pi_1(y_0)$. $\square$

Таким образом, имеет смысл следующее определение.

Определение 14. *Правила* $(\mathcal{V},\widehat{\rho})\longmapsto(\mathcal{V}(y_0),\widehat{\rho}_H(y_0))$ *и*

$$[\Psi:(\mathcal{V},\widehat{\rho})\to(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1)]\longmapsto[\Psi(y_0):\mathcal{V}(y_0)\to\mathcal{V}_1(y_0)]$$

задают функтор

$$\mathrm{Res}:\mathrm{Vect}_X^G(Y)\to\mathrm{Rep}_X(H).$$

4. Доказательство эквивалентности категорий $\mathrm{Rep}_X(H)$ и $\mathrm{Vect}_X^G(G/H)$

Разобьем доказательство эквивалентности на две теоремы.

Теорема 1. *Имеет место изоморфизм функторов*

$$\mathrm{id}_{\mathrm{Rep}_X(H)}\to\mathrm{Res}\circ\mathrm{Ind}.$$

Доказательство. Для каждого объекта (V,ρ) требуется построить изоморфизм левых $R[H]$-комодулей

$$\phi_{(V,\rho)}:(V,\rho)\xrightarrow{\cong}\mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(V,\rho))$$

и проверить, что для любого морфизма левых $R[H]$-комодулей $\psi:(V,\rho)\to(V_1,\rho_1)$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} V_1 \arrow[r, "\phi_{(V_1,\rho_1)}", "\cong"'] & \mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(V_1,\rho_1)) \\ V \arrow[u, "\psi"] \arrow[r, "\phi_{(V,\rho)}", "\cong"'] & \mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(V,\rho)) \arrow[u, "\mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(\psi))"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Согласно введенным выше обозначениям, $\mathcal{V} = R[G]\square_{R[H]}V$ – локально свободный $R[Y]$-модуль и $i : \mathcal{V} \to R[G]\otimes V$ – его вложение в качестве $R[Y]$-подмодуля.

Замена базы правого H-торсора $(G \xrightarrow{q} Y, \nu_H)$ посредством морфизма $X \xrightarrow{y_0} Y$ – это правый H-торсор $(H \to X, H\times_X H \xrightarrow{\mu_H} H)$. В частности, последний торсор тривиален. Диаграмма замены базы выглядит таким образом:

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rrr, "\mathrm{in}"] \arrow[ddd, "p"] & & & G \arrow[ddd, "q"] \\ & H\times_X H \arrow[ul, "\mu_H"'] \arrow[r, "\mathrm{in}\times\mathrm{id}"] \arrow[ddl] & G\times_X H \arrow[ur, "\nu_H"] \arrow[ddr] & \\ & & & \\ X \arrow[rrr, "y_0"] & & & Y . \end{tikzcd}$$

По утверждению 3.3 $\mathrm{id}\otimes_{R[Y]}i$ отождествляет $R\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}$ с $(R\otimes_{R[Y]}R[G])\square_{R[H]}V$ (то есть с ядром $\ker(\mathrm{id}_R \otimes (i\nu_H)^* \otimes \mathrm{id}_V - \mathrm{id}_R \otimes \mathrm{id}_G \otimes \rho)$). Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} R\otimes_{R[Y]}\mathcal{V} \arrow[r, hook, "\mathrm{id}\otimes i"] \arrow[d, "\cong m"'] & R\otimes_{R[Y]}R[G]\otimes V \arrow[r, shift left, "\mathrm{id}\otimes(i\nu_H)^*\otimes\mathrm{id}_V"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}_G\otimes\rho"'] \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}_V"] & R\otimes_{R[Y]}R[G]\otimes R[H]\otimes V \arrow[d, "\cong"', "\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}_H\otimes\mathrm{id}_V"] \\ \mathcal{V}(y_0) \arrow[r, "i(y_0)"] & R[H]\otimes V \arrow[r, shift left, "(i\mu_H)^*\otimes\mathrm{id}_V"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{id}_H\otimes\rho"'] & R[H]\otimes R[H]\otimes V . \end{tikzcd}$$

Здесь мы определяем $i(y_0)$ как $i(y_0) = (\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}_V)\circ(\mathrm{id}\otimes i)\circ m^{-1}$. Коммутативность правого квадрата следует из коммутативности диаграммы замены базы, приведенной выше.

Нижняя строчка показывает, что $i(y_0)$ отождествляет $\mathcal{V}(y_0)$ с $R[H]\square_{R[H]}V$. Поэтому существует единственный гомоморфизм R-модулей $\phi_{(V,\rho)} : V \to \mathcal{V}(y_0)$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}(y_0) \arrow[r, hook, "i(y_0)"] & R[H]\otimes V \\
& V \arrow[u, "\rho"'] \arrow[ul, "\phi_{(V,\rho)}"]
\end{tikzcd}$$

коммутативна. Из сказанного следует, что $\phi_{(V,\rho)}$ – изоморфизм R-модулей. $\square$

Лемма 2. *Отображение $\phi_{(V,\rho)}$ – изоморфизм левых $R[H]$-комодулей.*

Доказательство. Для начала докажем, что $((i\mu_H)^* \otimes \mathrm{id}_V) \circ i(y_0) = (\mathrm{id}_H \otimes i(y_0)) \circ \widehat{\rho}_H(y_0)$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \arrow[rrr, "i"] \arrow[dr, two heads, "\pi(y_0)"] \arrow[ddd, "\hat{\rho}_H"'] & & & R[G]\otimes V \arrow[dl, "\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}_V"'] \arrow[ddd, "(\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}_G)\circ(i\mu_H)^*\otimes\mathrm{id}_V"] \\
& \mathcal{V}(y_0) \arrow[r, "i(y_0)"] \arrow[d, "\widehat{\rho}_H(y_0)"'] & R[H]\otimes V \arrow[d, "(i\mu_H)^*\otimes\mathrm{id}_V"] & \\
& R[H]\otimes\mathcal{V}(y_0) \arrow[r, "\mathrm{id}_H\otimes i(y_0)"'] & R[H]\otimes R[H]\otimes\mathcal{V}(y_0) & \\
R[H]\otimes\mathcal{V} \arrow[ur, "\mathrm{id}_H\otimes\pi(y_0)"] \arrow[rrr, "\mathrm{id}_H\otimes i"'] & & & R[H]\otimes R[G]\otimes\mathcal{V}. \arrow[ul, "\mathrm{id}_H\otimes\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}_V"']
\end{tikzcd}$$

Коммутативность центрального квадрата следует из коммутатвности остальных квадратов (а она очевидна) и сюръективности стрелки $\pi(y_0)$.

Чтобы доказать, что $\phi_{(V,\rho)} : (V,\rho) \to (\mathcal{V}(y_0), \widehat{\rho}_H(y_0))$ – изоморфизм левых $R[H]$-комодулей, достаточно проверить, что он согласован с левыми $R[H]$-кодействиями. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
R[H]\otimes R[H]\otimes V & & & R[H]\otimes V \arrow[lll, "(i\mu_H)^*\otimes \mathrm{id}_V"'] \\
& R[H]\otimes \mathcal{V}(y_0) \arrow[ul, "\mathrm{id}_H\otimes i(y_0)"'] & \mathcal{V}(y_0) \arrow[l, "\widehat{\rho}_H(y_0)"'] \arrow[ur, "i(y_0)"'] & \\
& R[H]\otimes V \arrow[u, "\mathrm{id}_H\otimes \phi_{(V,\rho)}"', "\cong"] \arrow[uul, bend left, "\mathrm{id}_H\otimes\rho"] & V. \arrow[l, "\rho"'] \arrow[u, "\phi_{(V,\rho)}", "\cong"'] \arrow[uur, bend right, "\rho"'] &
\end{tikzcd}$$

Коммутативность верхнего квадрата была доказана выше, правый треугольник коммутативен по определению $\phi_{(V,\rho)}$, внешний квадрат коммутативен, так как (V,ρ) – левый $R[H]$-комодуль. Так как гомоморфизм $\mathrm{id}_H\otimes i(y_0)$ инъективен, то нижний квадрат коммутативен. Таким образом, $\phi_{(V,\rho)}$ – изоморфизм левых $R[H]$-комодулей. $\square$

Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось доказать, что соответствие $(V,\rho)\to\phi_{(V,\rho)}$ – преобразование фукторов $\mathrm{id}_{\mathrm{Rep}_X(H)}\to \mathrm{Res}\circ\mathrm{Ind}$. Для этого надо взять гомоморфизм левых $R[H]$-комодулей $\psi:(V,\rho)\to(V_1,\rho_1)$ и проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}(y_0) \arrow[r, "\mathrm{Res}(\mathrm{Ind}(\psi))"] & \mathcal{V}_1(y_0) \\
V \arrow[u, "\phi_{(V,\rho)}"] \arrow[r, "\psi"] & V_1. \arrow[u, "\phi_{(V_1,\rho_1)}"']
\end{tikzcd}$$

Используем обозначение $\widehat{\psi}$ для $\mathrm{Ind}(\psi)$ и $\widehat{\psi}(y_0)$ для $\mathrm{Res}(\widehat{\psi})$. Рассмотрим диаграмму.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_1(y_0) \arrow[r, hook, "i_1(y_0)"'] & R[H]\otimes V_1 & V_1 \arrow[l, "\rho_1"] \arrow[ll, bend right, "\phi_{(V_1,\rho_1)}"'] \\
\mathcal{V}(y_0) \arrow[u, "\widehat{\psi}(y_0)"'] \arrow[r, hook, "i(y_0)"] & R[H]\otimes V \arrow[u, "\mathrm{id}_H\otimes\psi"'] & V. \arrow[l, "\rho"'] \arrow[u, "\psi"'] \arrow[ll, bend left, "\phi_{(V,\rho)}"]
\end{tikzcd}$$

В этой диаграмме верхний и нижний треугольники коммутативны по построению $\phi_{(V,\rho)}$, правый квадрат коммутативен, так как ψ

– гомоморфизм левых $R[H]$-комодулей. Если мы докажем коммутативность левого квадрата, то инъективность $i_1(y_0)$ повлечет за собой нужное нам равенство $\phi_{(V_1,\rho_1)} \circ \psi = \widehat{\psi}(y_0) \circ \phi_{(V,\rho)}$.

Для завершения доказательства рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_1 \arrow[rrr, "i_1"] \arrow[dr, two heads, "\pi(y_0)"] & & & R[G] \otimes V_1 \arrow[dl, "\mathrm{in}^* \otimes \mathrm{id}_{V_1}"'] \\
& \mathcal{V}_1(y_0) \arrow[r, "i_1(y_0)"] & R[H] \otimes V_1 & \\
& \mathcal{V}(y_0) \arrow[u, "\widehat{\psi}(y_0)"] \arrow[r, "i(y_0)"'] & R[H] \otimes V \arrow[u, "\mathrm{id}_H \otimes \psi"] & \\
\mathcal{V} \arrow[uuu, "\widehat{\psi}"] \arrow[ur, two heads, "\pi(y_0)"'] \arrow[rrr, "i"] & & & R[G] \otimes V. \arrow[ul, "\mathrm{in}^* \otimes \mathrm{id}_V"'] \arrow[uuu, "\mathrm{id}_G \otimes \psi"']
\end{tikzcd}$$

Коммутативность центрального квадрата (которую нам и осталось доказать) следует из коммутативности всех остальных квадратов и сюръективности $\pi(y_0)$.

Теорема 2. *Имеет место изоморфизм функторов*

$$\mathrm{id}_{\mathrm{Vect}_X^G(Y)} \to \mathrm{Ind} \circ \mathrm{Res}.$$

Доказательство. Пусть $(\mathcal{V}, \widehat{\rho}) \in \mathrm{Vect}_X^G(Y)$, $(\mathcal{V}(y_0), \widehat{\rho}_H(y_0)) = \mathrm{Res}(\mathcal{V}, \widehat{\rho})$. Пусть $i : \mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0)) \hookrightarrow R[G] \otimes \mathcal{V}(y_0)$ включение $R[Y]$-модулей, задающее $\mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0), \widehat{\rho}_H(y_0))$. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0)) \arrow[r, "i"] & R[G] \otimes \mathcal{V}(y_0) \arrow[r, shift left, "(i\nu_H)^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}(y_0)}"] \arrow[r, shift right, "-\mathrm{id}_G \otimes \widehat{\rho}_H(y_0)"'] & R[G] \otimes R[H] \otimes \mathcal{V}(y_0) \\
0 \arrow[r] & \mathcal{V} \arrow[u, dashed, two heads, "\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}"] \arrow[r, "\widehat{\rho}"] & R[G] \otimes \mathcal{V} \arrow[u, "\mathrm{id} \otimes \pi(y_0)"] \arrow[r, shift left, "(i\mu_H)^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}}"] \arrow[r, shift right, "-\mathrm{id}_G \otimes \widehat{\rho}"'] & R[G] \otimes R[G] \otimes \mathcal{V}. \arrow[u, "\mathrm{id}_G \otimes \mathrm{in}^* \otimes \pi(y_0)"']
\end{tikzcd}$$

Очевидно, что правый квадрат по верхним и нижним стрелкам коммутативен. Итак, мы видим, что имеется единственный гомоморфизм R-модулей $\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})} : \mathcal{V} \to \mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0))$, такой, что левый квадрат коммутативен.

Лемма 3. *Отображение* $\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})} : (\mathcal{V}, \widehat{\rho}) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0), \widehat{\rho}_H(y_0))$ *согласовано с* $R[G]$*-кодействием.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
R[G]\otimes \operatorname{Ind}(\mathcal{V}(y_0)) \arrow[rrr, hook, "\mathrm{id}_G\otimes i"] & & & R[G]\otimes R[G]\otimes \mathcal{V}(y_0) \\
& \operatorname{Ind}(\mathcal{V}(y_0)) \arrow[ul, "\operatorname{Ind}(\widehat{\rho}_H(y_0))"'] \arrow[r, "i"] & R[G]\otimes \mathcal{V}(y_0) \arrow[ur, "\mu_G^*\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}(y_0)}"] & \\
& \mathcal{V} \arrow[u, "\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}"] \arrow[r, "\widehat{\rho}"] \arrow[dl, "\widehat{\rho}"] & R[G]\otimes \mathcal{V} \arrow[u, "\mathrm{id}_G\otimes\pi(y_0)"'] \arrow[dr, "\mu_G^*\otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}}"] & \\
R[G]\otimes \mathcal{V} \arrow[uuu, "\mathrm{id}_G\otimes\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}"] \arrow[rrr, "\mathrm{id}_G\otimes\widehat{\rho}"] & & & R[G]\otimes R[G]\otimes \mathcal{V}. \arrow[uuu, "\mathrm{id}_G\otimes\mathrm{id}_G\otimes\pi(y_0)"']
\end{tikzcd}$$

Нам нужно показать коммутативность левого квадратика. Ясно, что все остальные квадраты (включая внешний) коммутативны. Гомоморфизм $\mathrm{id}\otimes i$ инъективен, так как i инъективен и $R[G]$ – плоская R-алгебра. Поэтому левый квадрат коммутативен. $\square$

Лемма 4. $\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})} : \mathcal{V} \to \operatorname{Ind}(\mathcal{V}(y_0))$ *есть гомоморфизм* $R[Y]$*-модулей.*

Доказательство. Поскольку $\operatorname{Ind}(\mathcal{V}(y_0)) \xrightarrow{i} R[G]\otimes\mathcal{V}(y_0)$ – инъективный гомоморфизм $R[Y]$-модулей, то достаточно проверить, что композиция

$$\mathcal{V} \xrightarrow{\widehat{\rho}} R[G]\otimes\mathcal{V} \xrightarrow{\mathrm{id}_G\otimes\pi(y_0)} R[G]\otimes\mathcal{V}(y_0)$$

является гомоморфизмом $R[Y]$-модулей, где на $R[G]\otimes\mathcal{V}(y_0)$ $R[Y]$-модульная структура задана как сразу после определения 10, то есть, формулой $f\cdot(a\otimes v) = q^*(f)a\otimes v$. Напомним, что $\widehat{\rho}$ удовлетворяет условию $\widehat{\rho}(fs) = \theta^*(f)\cdot\widehat{\rho}(s)$ (см. определение 7).

Имеем $(\mathrm{id}_G\otimes\pi(y_0))\widehat{\rho}(fs) = (\mathrm{id}_G\otimes\pi(y_0))(\theta^*(f)\cdot\widehat{\rho}(s)) = (\mathrm{id}_G\otimes y_0^*)(\theta^*(f))\cdot(\mathrm{id}_G\otimes\pi(y_0))\widehat{\rho}(s) = q^*(f)\cdot(\mathrm{id}_G\otimes\pi(y_0))\widehat{\rho}(s)$. Последнее равенство верно, так как композиция

$$G\times_X X \xrightarrow{\mathrm{id}\times y_0} G\times_X Y \xrightarrow{\theta} Y$$

совпадает с q. $\square$

Следствие 4.1. $\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}$ *– морфизм в категории* $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$.

Теперь докажем, что $\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}$ – изоморфизм. Доказательство проведем в несколько шагов.

Утверждение 4.1. $\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}(y_0) : \mathcal{V}(y_0) \to \mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0))(y_0)$ – *изоморфизм R-модулей.*

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
0 \arrow[d, hook] & & I(y_0)\cdot\mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0)) \arrow[ll] \arrow[d, hook, "\beta"] \\
R[H]\otimes\mathcal{V}(y_0) & R[G]\otimes\mathcal{V}(y_0) \arrow[l, "\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}"'] & \mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0)) \arrow[l, "i"'] \\
R[H]\otimes\mathcal{V} \arrow[u, "\mathrm{id}_H\otimes\pi(y_0)"] & R[G]\otimes\mathcal{V} \arrow[l, "\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{V}}"'] \arrow[u, "\mathrm{id}_G\otimes\pi(y_0)"] & \mathcal{V} \arrow[l, "\widehat{\rho}"'] \arrow[u, "\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}"] \\
R[H]\otimes I(y_0)\mathcal{V} \arrow[u, hook] \arrow[uuu, bend left=60] & & I(y_0)\mathcal{V}. \arrow[ll, "\widehat{\rho}_H"'] \arrow[u, hook, "\alpha"] \arrow[uuu, bend right=60, "\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}"']
\end{tikzcd}
$$

Правый квадратик (искривленный) коммутативен, так как $\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}$ – гомоморфизм $R[Y]$-модулей. Правый центральный квадратик коммутативен по определению $\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}$. Левый центральный и левый искривленный квадратики очевидно коммутативны. Покажем, что нижний квадрат коммутативен. Для этого достаточно проверить, что $((\mathrm{id}_H \otimes \pi(y_0)) \circ (\mathrm{in}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}}) \circ \widehat{\rho})(I(y_0)\mathcal{V}) = 0$. Последнее имеет место, так как для $f \in R[Y], s \in \mathcal{V}$ имеем

$$
\begin{aligned}
((\mathrm{in}^* \otimes \pi(y_0)) \circ \widehat{\rho})(f \cdot s) &= (\mathrm{in}^* \otimes \pi(y_0))(\theta^*(f)\widehat{\rho}(s)) \\
&= (\mathrm{in}^* \otimes y_0^*)\theta^*(f) \cdot (\mathrm{in}^* \otimes \pi(y_0))\widehat{\rho}(s).
\end{aligned}
$$

Если $f \in I(y_0)\mathcal{V}$, то равенство нулю достигается за счет коммутативности диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
H\times_X X \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{id}\times y_0"] & X \arrow[d, "y_0"] \\
H\times_X Y \arrow[r, "\theta_H"] & Y.
\end{tikzcd}
$$

Проверим коммутативность верхнего квадрата. Имеем $((\mathrm{in}^* \otimes \mathrm{id}) \circ i)(fs) = (\mathrm{in}^* \otimes \mathrm{id})(q^*(f) \cdot i(s)) = \mathrm{in}^*(q^*(f)) \cdot ((\mathrm{in}^* \otimes \mathrm{id})i(s)) = f(y_0) \cdot (x)$, где $x \in R[H] \otimes \mathcal{V}(y_0)$. Если $f \in I(y_0)\mathcal{V}$, то получится ноль.

Из коммутативности верхнего прямоугольника следует существование и единственность гомоморфизма $i'(y_0)$, делающего диаграмму

$$\begin{tikzcd} R[H] \otimes \mathcal{V}(y_0) & \mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0))(y_0) \arrow[l, "i'(y_0)"'] \\ R[G] \otimes \mathcal{V}(y_0) \arrow[u, "\mathrm{in}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}(y_0)}"'] & \mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0)) \arrow[l, "i"'] \arrow[u, "\pi(y_0)"'] \end{tikzcd}$$

коммутативной. Видно, что гомоморфизм $i'(y_0)$ совпадает с гомоморфизмом $i(y_0)$, построенным в доказательстве теоремы 1.

Из коммутативности большой диаграммы следует, что коммутативна:

$$\begin{tikzcd} R[H] \otimes \mathcal{V}(y_0) & \mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0))(y_0) \arrow[l, "i'(y_0)"'] \\ & \mathcal{V}(y_0). \arrow[ul, "\widehat{\rho}(y_0)"] \arrow[u, "\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}(y_0)"'] \end{tikzcd}$$

Но в силу теоремы 1 у нас есть похожая коммутативная диаграмма:

$$\begin{tikzcd} R[H] \otimes \mathcal{V}(y_0) & \mathrm{Ind}(\mathcal{V}(y_0))(y_0) \arrow[l, "i(y_0)"'] \\ & \mathcal{V}(y_0). \arrow[ul, "\widehat{\rho}(y_0)"] \arrow[u, "\cong", "\phi_{(\mathcal{V}(y_0),\hat{\rho}(y_0))}"'] \end{tikzcd}$$

Поскольку $i(y_0) = i'(y_0)$ инъективно, то $\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})}(y_0) = \phi_{(\mathcal{V}(y_0),\hat{\rho}(y_0))}$ – изоморфизм. $\square$

Предположим теперь, что $R = k$, то есть наше базовое кольцо является полем, а $X = \mathrm{Spec}(k) = \mathrm{pt}$ – точка. В этих предположениях докажем следующее утверждение.

Утверждение 4.2. *Пусть* $R = k$, $\Phi : (\mathcal{V}, \hat{\rho}) \to (\mathcal{V}_1, \hat{\rho}_1)$ *– морфизм в категории* $\mathrm{Vect}^G_{\mathrm{pt}}(Y)$. *Если* $\Phi(y_0) : \mathcal{V}(y_0) \to \mathcal{V}_1(y_0)$ *– изоморфизм* k*-векторных пространств, то* Φ *– изоморфизм в* $\mathrm{Vect}^G_{\mathrm{pt}}(X)$.

Доказательство. Для доказательства этого утверждения сформулируем определение и лемму.

Определение 15. *Для* $y \in Y$ *положим* $I(y) = \ker(k[Y] \xrightarrow{y^*} k)$, $\mathcal{V}(y) = \mathcal{V}/I(y)\mathcal{V}$. *Если* $g \in G$ *положим*

$$l^*_{g,Y} = g^* \circ \theta^* : \quad k[Y] \to k[G \times Y] \to k[Y],$$

$$l^*_{g,\mathcal{V}} = (g^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}}) \circ \hat{\rho} : \quad \mathcal{V} \to k[G] \otimes \mathcal{V} \to k \otimes \mathcal{V}.$$

Лемма 5. *Пусть* $(\mathcal{V}, \hat{\rho}) \in \mathrm{Vect}^G_{\mathrm{pt}}(Y)$. *Пусть* $gy_0 = y_1$, *где* $y_0, y_1 \in Y(k)$. *Тогда существует единственный изоморфизм* $\bar{l}^*_{g,\mathcal{V}} : \mathcal{V}(y_1) \to \mathcal{V}(y_0)$, *делающий диаграмму*

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V} \arrow[r, "\hat{\rho}"] \arrow[d] & k[G] \otimes \mathcal{V} \arrow[r] & k \otimes \mathcal{V} = \mathcal{V} \arrow[d] \\
\mathcal{V}(y_1) \arrow[rr, "\bar{l}^*_{g,\mathcal{V}}"] & & \mathcal{V}(y_0)
\end{tikzcd}$$

коммутативной.

Доказательство. Две коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
k[Y] \arrow[r, "\theta^*"] \arrow[d, "y_1^*"] & k[G] \otimes k[Y] \arrow[r, "g^* \otimes \mathrm{id}_Y"] \arrow[d, "g^* \otimes y_0^*"] & k \otimes k[Y] \arrow[r, equal] \arrow[d, "\mathrm{id} \otimes y_0^*"] & k[Y] \arrow[d, "y_0^*"] \\
k \arrow[r, "\mathrm{id}"] & k \arrow[r, "\mathrm{id}"] & k \arrow[r, equal] & k
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
I(y_1) \otimes \mathcal{V} \arrow[r, hook] \arrow[dr] & k[Y] \otimes \mathcal{V} \arrow[r, "\theta^* \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "m_{\mathcal{V}}"] & k[G] \otimes k[Y] \otimes \mathcal{V} \arrow[r, "g^* \otimes \mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G \otimes m_{\mathcal{V}}"] & k[Y] \otimes \mathcal{V} \arrow[d, "m_{\mathcal{V}}"] & I(y_0) \otimes \mathcal{V} \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \\
& \mathcal{V} \arrow[r, "\hat{\rho}"] & k[G] \otimes \mathcal{V} \arrow[r, "g^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{V}}"] & \mathcal{V} &
\end{tikzcd}$$

показывают, что имеет место коммутативная диаграмма изоморфизмов и включений:

$$\begin{tikzcd}
I(y_1) \otimes \mathcal{V} \arrow[r, "l^*_{g,Y} \otimes l^*_{g,\mathcal{V}}", "\cong"'] \arrow[d, hook] & I(y_0) \otimes \mathcal{V} \arrow[d, hook] \\
k[Y] \otimes \mathcal{V} \arrow[r, "l^*_{g,Y} \otimes l^*_{g,\mathcal{V}}", "\cong"'] & k[Y] \otimes \mathcal{V}.
\end{tikzcd}$$

Наконец, отсюда следует существование изоморфизма $\bar{l}^*_{g,\mathcal{V}}$. $\square$

Перейдем к доказательству утверждения 4.2. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_1(y_0) & \mathcal{V}_1(y_1) \arrow[l, "\bar{l}^*_{g,\mathcal{V}_1}"', "\cong"] \\ \mathcal{V}(y_0) \arrow[u, "\Phi(y_0)"', "\cong"] & \mathcal{V}(y_1). \arrow[l, "\bar{l}^*_{g,\mathcal{V}}"', "\cong"] \arrow[u, "\Phi(y_1)"'] \end{tikzcd}$$

По условию нам дано, что $\Phi(y_0)$ – изоморфизм. Чтобы показать, что $\Phi(y_1)$ – изоморфизм, следует доказать коммутативность этой диаграммы. Этот факт, в свою очередь следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}_1 & \mathcal{V}_1 \arrow[l, "l^*_{g,\mathcal{V}_1}"'] \\ \mathcal{V} \arrow[u, "\Phi"'] & \mathcal{V} \arrow[l, "l^*_{g,\mathcal{V}}"'] \arrow[u, "\Phi"'] \end{tikzcd}$$

и сюръективности гомоморфизма $\pi(y_1) : \mathcal{V} \to \mathcal{V}(y_1)$.

Таким образом, мы показали, что для любого $y \in Y$ отображение $\Phi(y)$ – изоморфизм.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{V}/I(y)\mathcal{V} \arrow[r, "\Phi(y)", "\cong"'] \arrow[d, equal] & \mathcal{V}_1/I(y)\mathcal{V}_1 \arrow[d, equal] \\ \mathcal{V}(y) \arrow[r] & \mathcal{V}_1(y). \end{tikzcd}$$

Поскольку $I(y) = \ker(k[Y] \to k)$ – максимальный идеал кольца $k[Y]$, а $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}_1$ – конечно порожденные локально свободные $k[Y]$-модули, то используя лемму Накаяма (подробности см. в [5]), нетрудно показать, что Φ – изоморфизм на ростках:

$$\mathcal{V}_y := \mathcal{V} \otimes_{k[Y]} (k[Y]_y) \xrightarrow{\cong} \mathcal{V}_1 \otimes_{k[Y]} (k[Y]_y).$$

Следовательно, Φ – изоморфизм. $\square$

Следствие 4.2. *Отображение* $\Phi_{(\mathcal{V},\hat{\rho})} : \mathcal{V} \to \operatorname{Ind}(\mathcal{V}(y_0))$ *– изоморфизм в категории* $\operatorname{Vect}^G_{\mathrm{pt}}(Y)$.

Теперь с помощью полученного результата докажем теорему в общем случае, когда R – произвольное коммутативное нетерово кольцо, $X = \mathrm{Spec}(R)$. Для начала введем некоторые обозначения. Пусть K – некоторое поле, $x : \mathrm{Spec}(K) \to X$ – морфизм схем. Рассмотрим диаграмму замены базы

$$\begin{tikzcd}
G_K \arrow[r] \arrow[dr, "q_K"] & G \arrow[dr, "q"] & \\
& Y_K \arrow[r, "j_x"] \arrow[d, "p_K"] & Y \arrow[d, "p"'] \\
& \mathrm{pt} = \mathrm{Spec}(K) \arrow[r, "x"] \arrow[u, bend left, "y_{0K}"] & X, \arrow[u, bend right, "y_0"']
\end{tikzcd}$$

где Y_K и G_K обозначены pull-back'и.

Утверждение 4.3. *Пусть* Φ *– морфизм в категории* $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$, *такой что* $\Phi(y_0) := \Phi|_{y_0(X)}$ *– изоморфизм. Тогда* Φ *– изоморфизм в* $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$.

Доказательство. По свойству замены базы Φ_K согласован с G_K-действиями, а значит, является морфизмом в категории $\mathrm{Vect}_{\mathrm{pt}}^{G_K}(Y_K)$. Так как $\Phi|_{y_0(X)}$ – изоморфизм, то очевидно, что $\Phi_K|_{y_{0K}(\mathrm{pt})}$ – изоморфизм. Тогда по утверждению 4.2 Φ_K – изоморфизм в $\mathrm{Vect}_{\mathrm{pt}}^{G_K}(Y_K)$.

Пусть $\mathfrak{p} \in Y$ – замкнутая точка, а $\mathfrak{q} \in X$ – ее образ при проекции p, который, вообще говоря, будет схемной точкой. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}(k(\mathfrak{p})) \arrow[dr, "i_x"] \arrow[drr, bend left, "y"] \arrow[dd, bend right] & & \\
& Y_K \arrow[r, "j_x"] \arrow[d, "p_K"] & Y \ni \mathfrak{p} \arrow[d, "p"] \\
& \mathrm{Spec}(K) = \mathrm{Spec}(k(\mathfrak{q})) \arrow[r, "x"] & X \ni \mathfrak{q},
\end{tikzcd}$$

где существование морфизма i_x следует из свойств pull-back'а. Так как мы показали, что $\Phi_K = j_x^*\Phi$ – изоморфизм, то также изоморфизмом будет $i_x^* j_x^* \Phi = y^*\Phi = k(\mathfrak{p}) \otimes_{R[Y]} \Phi$. Отсюда по лемме Накаяма несложно заключить, что $\Phi_{\mathfrak p} = (R[Y])_{\mathfrak p}\otimes_{R[Y]}\Phi$ – изоморфизм для любой замкнутой точки $\mathfrak p \in Y$. Значит, Φ – изоморфизм. $\square$

Следствие 4.3. *Отображение* $\Phi_{(\mathcal V,\hat\rho)} : \mathcal V \to \mathrm{Ind}(\mathcal V(y_0))$ – *изоморфизм в категории* $\mathrm{Vect}^G_X(Y)$.

Чтобы завершить доказательство теоремы, осталось доказать, что соответствие $(\mathcal V,\widehat\rho) \to \Phi_{(\mathcal V,\hat\rho)}$ есть преобразование фукторов

$$\mathrm{id}_{\mathrm{Vect}^G_X(Y)} \to \mathrm{Ind}\circ\mathrm{Res}.$$

Для этого надо взять гомоморфизм $\widehat\psi : (\mathcal V,\widehat\rho) \to (\mathcal V_1,\widehat\rho_1)$ и проверить коммутативность диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ind}(\mathcal V(y_0)) \arrow[r, "\mathrm{Ind}(\hat\psi(y_0))"] & \mathrm{Ind}(\mathcal V_1(y_0)) \\
\mathcal V \arrow[u, "\Phi_{(\mathcal V,\hat\rho)}"] \arrow[r, "\widehat\psi"] & \mathcal V_1. \arrow[u, "\Phi_{(\mathcal V_1,\hat\rho_1)}"']
\end{tikzcd}$$

Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
R[G]\otimes\mathcal V(y_0) \arrow[rrr, "\mathrm{id}_G\otimes\widehat\psi(y_0)"] & & & R[G]\otimes\mathcal V_1(y_0) \\
& \mathrm{Ind}(\mathcal V(y_0)) \arrow[ul, "i"'] \arrow[r, "\mathrm{Ind}(\widehat\psi(y_0))"] & \mathrm{Ind}(\mathcal V_1(y_0)) \arrow[ur, hook, "i_1"] & \\
& \mathcal V \arrow[u, "\Phi_{(\mathcal V,\hat\rho)}"] \arrow[r, "\widehat\psi"] \arrow[dl, "\widehat\rho"] & \mathcal V_1 \arrow[u, "\Phi_{(\mathcal V_1,\hat\rho_1)}"'] \arrow[dr, "\widehat\rho_1"] & \\
R[G]\otimes\mathcal V \arrow[uuu, "\mathrm{id}_G\otimes\pi(y_0)"] \arrow[rrr, "\mathrm{id}_G\otimes\widehat\psi"] & & & R[G]\otimes\mathcal V_1. \arrow[uuu, "\mathrm{id}_G\otimes\pi_1(y_0)"']
\end{tikzcd}$$

Здесь нижний квадрат коммутативен, так как $\widehat\psi$ согласован с $R[G]$-кодействием, левый и правый квадраты коммутативны по определению $\Phi_{(\mathcal V,\hat\rho)}$, верхний квадрат – по определению функтора Ind, внешний квадрат – по определению π. Инъективность i_1 и доставляет коммутативность центрального квадрата. $\square$

5. Тензорные произведения

Тензорное произведение в категориях $\mathrm{Rep}_X(H)$ и $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$ было определено нами в параграфе 2. Сейчас мы рассмотрим некоторые свойства тензорного произведения и докажем, что функторы Res и Ind согласованы с операциями тензорного произведения. Напомним основные обозначения:

$$(\mathcal{V},\widehat{\rho})\otimes_{R[Y]}(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1) = (\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1,\Delta_G^*\circ(\widehat{\rho}\otimes\widehat{\rho}_1)) =: (\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1,(\widehat{\rho\rho_1})),$$
$$(V,\rho)\otimes(V_1,\rho_1) = (V\otimes V_1,\Delta_H^*\circ(\rho\otimes\rho_1)) =: (V\otimes V_1,(\rho\rho_1)).$$

Лемма 6. *Тензорное произведение левых $R[H]$-комодулей ассоциативно, коммутативно и левый $R[H]$-комодуль $(R, i : R\to R[H])$ является двусторонней единицей относительно этого тензорного произведения. Другими словами, имеют место естественные изоморфизмы левых $R[H]$-комодулей:*

(a) $(V_1,\rho_1)\otimes((V_2,\rho_2)\otimes(V_3,\rho_3)) \cong ((V_1,\rho_1)\otimes(V_2,\rho_2))\otimes(V_3,\rho_3)$,

(b) $(V_1,\rho_1)\otimes(V_2,\rho_2)\cong(V_2,\rho_2)\otimes(V_1,\rho_1)$,

(c) $(V,\rho)\otimes(R,i)\cong(V,\rho)\cong(R,i)\otimes(V,\rho)$.

Доказательство. Для R-модулей эти свойства очевидны, а согласованность изоморфизмов с $R[H]$-кодействиями легко проверяется на элементах. □

Лемма 7. *Тензорное произведение в категории $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$ ассоциативно, коммутативно и объект $(R[Y],\theta^* : R[Y]\to R[G]\otimes R[Y])$ является двусторонней единицей относительно этого тензорного произведения. Другими словами, имеют место естественные изоморфизмы:*

(a) $(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1)\otimes_{R[Y]}((\mathcal{V}_2,\widehat{\rho}_2)\otimes_{R[Y]}(\mathcal{V}_3,\widehat{\rho}_3))$
$\cong((\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1)\otimes_{R[Y]}(\mathcal{V}_2,\widehat{\rho}_2))\otimes_{R[Y]}(\mathcal{V}_3,\widehat{\rho}_3)$,

(b) $(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1)\otimes_{R[Y]}(\mathcal{V}_2,\widehat{\rho}_2)\cong(\mathcal{V}_2,\widehat{\rho}_2)\otimes_{R[Y]}(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1)$,

(c) $(\mathcal{V},\widehat{\rho})\otimes_{R[Y]}(R[Y],\theta^*)\cong(\mathcal{V},\widehat{\rho})\cong(R[Y],\theta^*)\otimes_{R[Y]}(\mathcal{V},\widehat{\rho})$.

Доказательство. Аналогично предыдущей лемме. □

Сформулируем еще одну очевидную лемму.

Лемма 8. *Имеют место естественные изоморфизмы*:

$$\mathrm{Ind}(R,i) \cong (R[Y],\theta^*) \in \mathrm{Vect}_X^G(Y),$$

$$\mathrm{Res}(R[Y],\theta^*) \cong (R,i) \in \mathrm{Rep}_X(Y).$$

Утверждение 5.1. *Пусть* $\widehat{\phi} : (\mathcal{V},\widehat{\rho}) \to (\mathcal{W},\widehat{\eta})$, $\widehat{\psi} : (\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1) \to (\mathcal{W}_1,\widehat{\eta}_1)$ – *морфизмы в категории* $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$. *Тогда* $\widehat{\phi}\otimes\widehat{\psi} : \mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1 \to \mathcal{W}\otimes_{R[Y]}\mathcal{W}_1$ – *тоже морфизм в категории* $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$.

Доказательство. $(\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1, (\widehat{\rho}\widehat{\rho}_1))$ и $(\mathcal{W}\otimes_{R[Y]}\mathcal{W}_1, (\widehat{\eta}\widehat{\eta}_1))$ – объекты $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$. Покажем, что морфизм $R[Y]$-модулей $\widehat{\phi}\otimes\widehat{\psi}$ согласован с $R[G]$-кодействиями. Для этого рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1 \arrow[r, "\widehat{\rho}\otimes\widehat{\rho}_1"] \arrow[d, "\widehat{\phi}\otimes\widehat{\psi}"] & (R[G]\otimes\mathcal{V})\otimes_{R[Y]}(R[G]\otimes\mathcal{V}_1) \arrow[r, "\Delta_G^*"] \arrow[d, "\mathrm{id}_G\otimes\widehat{\phi}\otimes\mathrm{id}_G\otimes\widehat{\psi}"] & R[G]\otimes\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1 \arrow[d, "\mathrm{id}_G\otimes\widehat{\phi}\otimes\widehat{\psi}"] \\
\mathcal{W}\otimes_{R[Y]}\mathcal{W}_1 \arrow[r, "\widehat{\eta}\otimes\widehat{\eta}_1"] & (R[G]\otimes\mathcal{W})\otimes_{R[Y]}(R[G]\otimes\mathcal{W}_1) \arrow[r, "\Delta_G^*"] & R[G]\otimes\mathcal{W}\otimes_{R[Y]}\mathcal{W}_1.
\end{tikzcd}$$

Правый квадрат очевидно коммутативен, а левый коммутативен в силу того, что $\widehat{\phi}$ и $\widehat{\psi}$ – морфизмы в $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$. □

Утверждение 5.2. *Пусть* $\phi : (V,\rho) \to (W,\eta)$, $\psi : (V_1,\rho_1) \to (W_1,\eta_1)$ – *морфизмы в категории* $\mathrm{Rep}_X(H)$. *Тогда* $\phi\otimes\psi : V\otimes V_1 \to W\otimes W_1$ – *тоже морфизм в категории* $\mathrm{Rep}_X(H)$.

Доказательство. Аналогично предыдущему утверждению. □

Теорема 3. $(\mathcal{V},\widehat{\rho})$ *и* $(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1)$ – *объекты* $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$. *Тогда существует изоморфизм, функториальный по каждому аргументу*:

$$\mathrm{Res}(\mathcal{V},\widehat{\rho})\otimes\mathrm{Res}(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Res}((\mathcal{V},\widehat{\rho})\otimes_{R[Y]}(\mathcal{V}_1,\widehat{\rho}_1)).$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\Delta_Y : R[Y]\otimes R[Y] \to R[Y]$, определенное на элементах следующим образом: $s\otimes s_1 \mapsto ss_1$. Очевидно, что корректно определено его ограничение на $I(y_0)$: $I(y_0)\otimes I(y_0) \xrightarrow{\Delta_Y} I(y_0)$.

Рассмотрим естественное отображение R-модулей $\widehat{\chi} : \mathcal{V}\otimes\mathcal{V}_1 \to \mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1$ и сквозную стрелку:

$$\begin{tikzcd}(I(y_0)\mathcal{V}) \otimes (I(y_0)\mathcal{V}_1) \arrow[r, "\Delta_Y"] \arrow[rr, bend right, "\Delta_Y \circ \widehat{\chi}"'] & I(y_0)\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}_1 \arrow[r, "\widehat{\chi}"] & I(y_0)\mathcal{V} \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}_1.\end{tikzcd}$$

Ясно, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}_1 \arrow[r, "\widehat{\chi}"] & \mathcal{V} \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}_1 \\ (I(y_0)\mathcal{V}) \otimes (I(y_0)\mathcal{V}_1) \arrow[u, hook] \arrow[r, "\Delta_Y \circ \widehat{\chi}"] & I(y_0)\mathcal{V} \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}_1 \arrow[u, hook]\end{tikzcd}$$

коммутативна. Поэтому определен морфизм R-модулей $\chi : \mathcal{V}(y_0) \otimes \mathcal{V}_1(y_0) \to (\mathcal{V} \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}_1)(y_0)$, такой что диаграмма коммутативна:

$$\begin{tikzcd}\mathcal{V} \otimes \mathcal{V}_1 \arrow[r, "\widehat{\chi}"] \arrow[d, "\pi(y_0) \otimes \pi_1(y_0)"] & \mathcal{V} \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}_1 \arrow[d, "\pi_{01}(y_0)"] \\ \mathcal{V}(y_0) \otimes \mathcal{V}_1(y_0) \arrow[r, "\chi"] & (\mathcal{V} \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}_1)(y_0).\end{tikzcd}$$

Перепишем морфизм χ, используя изоморфизм $\mathcal{V}(y_0) \cong R \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}$:

$$\chi : (R \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}) \otimes (R \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}_1) \to R \otimes_{R[Y]} (\mathcal{V} \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}_1),$$

действие на элементах такое:

$$(c_1 \otimes_{R[Y]} v) \otimes (c_2 \otimes_{R[Y]} w) \longmapsto c_1 c_2 \otimes_{R[Y]} v \otimes_{R[Y]} w.$$

Очевидно, что он является изоморфизмом R-модулей (так как легко построить обратный к нему). Теперь покажем, что изоморфизм R-модулей χ согласован с $R[H]$-кодействиями. Для этого рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
 & (R[G]\otimes\mathcal{V})\otimes_{R[Y]}(R[G]\otimes\mathcal{V}_1) \arrow[d, "\Delta_G^*"'] & \\
R[H]\otimes(\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1) & R[G]\otimes\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1 \arrow[l, "\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}"'] & \mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1 \arrow[l, "(\hat\rho\hat\rho_1)"'] \arrow[ul, "\hat\rho\otimes\hat\rho_1"'] \\
R[H]\otimes\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}_1 \arrow[u, "id_H\otimes\hat\chi"'] & R[G]\otimes\mathcal{V}\otimes\mathcal{V}_1 \arrow[l, "\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\mathrm{id}_G\otimes\hat\chi"] & \mathcal{V}\otimes\mathcal{V}_1 \arrow[u, "\hat\chi"] \arrow[dl, "\hat\rho\otimes\hat\rho_1"] \\
R[H]\otimes\mathcal{V}\otimes R[H]\otimes\mathcal{V}_1 \arrow[u, "\Delta_H^*"'] & (R[G]\otimes\mathcal{V})\otimes(R[G]\otimes\mathcal{V}_1). \arrow[l, "\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}\otimes\mathrm{in}^*\otimes\mathrm{id}"'] \arrow[u, "\Delta_G^*"] &
\end{tikzcd}
$$

В ней все квадратики, очевидно, коммутативны.

Напомним обозначение $\widehat{\rho}_H = (\mathrm{in}^* \otimes \mathrm{id}) \circ \widehat{\rho}$. Рассмотрим диаграмму

$$
\begin{tikzcd}
R[H]\otimes(\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1)(y_0) & & (\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1)(y_0) \arrow[ll, "\mathrm{Res}((\hat\rho\hat\rho_1))"'] \\
R[H]\otimes(\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1) \arrow[u, "\mathrm{id}_H\otimes\pi_{01}(y_0)"'] & \mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1 \arrow[l, "(\hat\rho\hat\rho_1)_H"'] \arrow[ur, "\pi_{01}(y_0)"] & \\
R[H]\otimes\mathcal{V}\otimes R[H]\otimes\mathcal{V}_1 \arrow[u, "\Delta_H^*\otimes\hat\chi"'] \arrow[d, "\mathrm{id}\otimes\pi(y_0)\otimes\mathrm{id}\otimes\pi_1(y_0)"] & \mathcal{V}\otimes\mathcal{V}_1 \arrow[l, "\hat\rho_H\otimes\hat\rho_{1H}"'] \arrow[u, "\hat\chi"] \arrow[dr, "\pi(y_0)\otimes\pi_1(y_0)"] & \\
R[H]\otimes\mathcal{V}(y_0)\otimes R[H]\otimes\mathcal{V}_1(y_0) \arrow[uuu, bend left=60, "\Delta_H^*\otimes\chi"] & & \mathcal{V}(y_0)\otimes\mathcal{V}_1(y_0). \arrow[ll, "\mathrm{Res}(\rho)\otimes\mathrm{Res}(\rho_1)"'] \arrow[uuu, "\chi"']
\end{tikzcd}
$$

Коммутативность центрального квадрата доказана выше. Правый и левый квадраты коммутативны по построению χ. Верхний и нижний квадраты коммутативны по определению функтора Res. Сюръективность отображения $\pi(y_0) \otimes \pi_1(y_0)$ доставляет коммутативность внешнего обхода, который можно переписать так:

$$
\begin{tikzcd}
R[H]\otimes(\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1)(y_0) & (\mathcal{V}\otimes_{R[Y]}\mathcal{V}_1)(y_0) \arrow[l, "\mathrm{Res}((\widehat\rho\widehat\rho_1))"'] \\
R[H]\otimes\mathcal{V}(y_0)\otimes\mathcal{V}_1(y_0) \arrow[u, "\mathrm{id}_H\otimes\chi"] & \mathcal{V}(y_0)\otimes\mathcal{V}_1(y_0). \arrow[l, "(\rho\rho_1)"'] \arrow[u, "\chi"']
\end{tikzcd}
$$

Таким образом, χ – изоморфизм в категории $\mathrm{Rep}_X(H)$. Нам осталось проверить функториальность по каждому аргументу. Пусть $\widehat{\psi}: (\mathcal{V},\widehat{\rho}) \to (\mathcal{W},\widehat{\eta})$ – морфизм в категории $\mathrm{Vect}_X^G(Y)$. Рассмотрим диаграмму R-модулей:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Res}(\mathcal{V}) \otimes \mathrm{Res}(\mathcal{V}_1) \arrow[r, "\chi(\mathcal{V},\mathcal{V}_1)", "\cong"'] \arrow[d, "\mathrm{Res}(\widehat{\psi})\otimes\mathrm{id}"] & \mathrm{Res}(\mathcal{V} \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}_1) \arrow[d, "\mathrm{Res}(\widehat{\psi}\otimes\mathrm{id})"] \\
\mathrm{Res}(\mathcal{W}) \otimes \mathrm{Res}(\mathcal{V}_1) \arrow[r, "\chi(\mathcal{W},\mathcal{V}_1)", "\cong"'] & \mathrm{Res}(\mathcal{W} \otimes_{R[Y]} \mathcal{V}_1).
\end{tikzcd}$$

Она коммутативна (это легко проверяется на элементах). К тому же все стрелки в ней – это морфизмы $R[H]$-комодулей (вертикальные – в силу утверждений 5.1 и 5.2, горизонтальные – в силу доказанного выше). Таким образом, мы показали функториальность по первому аргументу. Аналогично проводится проверка функториальности по второму аргументу. □

Теорема 4. *Пусть* (V,ρ) *и* (V_1,ρ_1) *– объекты* $\mathrm{Rep}_X(H)$*. Тогда существует изоморфизм, функториальный по каждому аргументу*

$$\mathrm{Ind}((V,\rho)\otimes(V_1,\rho_1)) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Ind}(V,\rho) \otimes_{R[Y]} \mathrm{Ind}(V_1,\rho_1).$$

Доказательство. Рассмотрим сквозную стрелку

$$V\otimes V_1 \xrightarrow[\cong]{\phi_{(V,\rho)}\otimes\phi_{(V_1,\rho_1)}} \mathrm{Res}(\mathrm{Ind}V)\otimes\mathrm{Res}(\mathrm{Ind}V_1) \xrightarrow[\cong]{\chi} \mathrm{Res}(\mathrm{Ind}V\otimes_{R[Y]}\mathrm{Ind}V_1).$$

Первая стрелка изоморфизм в силу теоремы 1, а вторая – в силу теоремы 3. Для краткости обозначим их композицию $\chi\circ\phi$. Также рассмотрим другую сквозную стрелку

$$\mathrm{Ind}(V\otimes V_1) \xrightarrow[\cong]{\mathrm{Ind}(\chi\circ\phi)} \mathrm{Ind}(\mathrm{Res}(\mathrm{Ind}V\otimes_{R[Y]}\mathrm{Ind}V_1)) \xrightarrow[\cong]{\Phi^{-1}} (\mathrm{Ind}V)\otimes_{R[Y]}(\mathrm{Ind}V_1).$$

В последней стрелке для краткости вместо $\Phi^{-1}_{\mathrm{Ind}V\otimes_{R[Y]}\mathrm{Ind}V_1}$ написано просто Φ^{-1} – изоморфизм, построенный в теореме 2. Эта сквозная стрелка и есть доказываемый изоморфизм. Его функториальность сразу следует из построения. □

Мы показали, что оба функтора Res и Ind согласованы с тензорными произведениями и тем самым полностью завершили доказательство основной теоремы.

Литература

1. M.-F. Atiyah, F. Hirzebruch, *Vector bundles and homogeneous spaces.* — Proc. Symp. Pure Math. **3**, A.M.S., (1961), 7–38.
2. I. A. Panin, *On the algebraic K-theory of twisted flag varieties.* — K-Theory **8**, No. 6 (1994), 541–585.
3. Р. Хартсхорн, *Алгебраическая геометрия.* Мир, М. (1981).
4. Дж. Милн, *Этальные когомологии.* Мир, М., 1983.
5. М. Атья, И. Макдональд, *Введение в коммутативную алгебру.* Мир, М. (1972).

Kobyzev I. B. The algebraic analog of the Borel construction and its properties.

Suppose that G is an affine algebraic group scheme faithfully flat over another affine scheme $X = \mathrm{Spec}R$, H is a closed faithfully flat X-subscheme and G/H is an affine X-scheme. In this case we prove the equivalence of two categories: left $R[H]$-comodules and G-equivariant vector bundles over G/H, and that this equivalence respects tensor products. Our algebraic construction is based on the well-known geometric Borel construction.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ivanuskobbus@gmail.com

Поступило 13 октября 2011 г.