Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 394, 2011 г.

С. О. Иванов

САМОИНЪЕКТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ СТАБИЛЬНОЙ КАЛАБИ–ЯУ РАЗМЕРНОСТИ ТРИ

Введение

Одна из целей некоммутативной алгебраической геометрии заключается в том, чтобы понять, как устроены $\mathbf{k}$-линейные триангулированные категории над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$, свойства которых близки к свойствам производных категорий $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh(X)})$ ограниченных комплексов когерентных пучков на проективном многообразии X над $\mathbf{k}$. Функтором Серра триангулированной $\mathbf{k}$-линейной Hom-конечной категории $\mathcal{T}$, вслед за А. И. Бондалом и М. М. Капрановым [1], назовем триангулированную автоэквивалентность $F : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ такую, что имеет место естественный изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(T, S) \cong D\mathrm{Hom}_{\mathcal{T}}(S, F(T))$$

(согласованный с функтором сдвига; см. [2]), где $D = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(-, \mathbf{k})$. Если функтор Серра существует, то он единственен с точностью до изоморфизма. Тогда для гладкого проективного многообразия X размерности n и канонического пучка $\omega_X = \bigwedge^n \Omega_X$ классическая двойственность Серра

$$H^i(X, \mathscr{F}) \cong D\mathrm{Ext}^{n-i}(\mathscr{F}, \omega_X),$$

где $\mathscr{F} \in \mathrm{coh}(X)$, является следствием того, что $F = - \otimes \omega_X[n]$ – функтор Серра на производной категории ограниченных комплексов когерентных пучков $\mathscr{D}^b(\mathrm{coh}(X))$. Если на $\mathbf{k}$-линейной Hom-конечной триангулированной категории $\mathcal{T}$ есть функтор Серра, то мы будем

Ключевые слова: Калаби–Яу размерность, стабильная категория модулей, самоинъективная алгебра, алгебра путей колчана с соотношениями.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00635), а также при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ, ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” (2010-1.1-111-128-033, госконтракт 14.740.11.0344). Кроме того, работа автора поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского государственного университета, “Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической K-теории”.

говорить, что $\mathcal{T}$ – триангулированная категория с двойственностью Серра.

Важным примером триангулированной категории с двойственностью Серра является производная категория $\mathscr{D}^b(\text{mod-}A)$, где mod-$A$ – категория конечнопорожденных модулей над конечномерной $\mathbf{k}$-алгеброй A конечной глобальной размерности (см. [3]). Кроме того, в статье [4] дано полное описание нетеровых наследственных абелевых категорий $\mathscr{A}$ таких, что на производной категории $\mathscr{D}^b(\mathscr{A})$ имеется двойственность Серра. Таким образом, триангулированные категории с двойственностью Серра вызывают большой интерес.

Следуя Концевичу [5], триангулированную $\mathbf{k}$-линейную Hom-конечную категорию $\mathcal{T}$ назовем категорией Калаби–Яу, если существует такое n, что n-кратный функтор сдвига $[n]$ (рассматриваемый как триангулированный функтор) является функтором Серра. В этом случае наименьшее такое $n \geqslant 0$ называется размерностью Калаби–Яу категории $\mathcal{T}$ и обозначается $\mathrm{CYdim}(\mathcal{T})$; если категория $\mathcal{T}$ не является категорией Калаби–Яу, то положим $\mathrm{CYdim}(\mathcal{T}) = \infty$.

В том случае, когда конечномерная алгебра A самоинъективна, кроме производной категории $\mathscr{D}^b(\text{mod-}A)$ этой алгебре можно сопоставить еще одну триангулированную $\mathbf{k}$-линейную Hom-конечную категорию – стабильную категорию модулей $\underline{\text{mod}}\text{-}A$, функтором сдвига в которой является обратный Ω_A^{-1} к функтору сизигии Хеллера Ω_A. В этом случае, следуя К. Эрдманн и А. Скowронски [6], определим стабильную размерность Калаби–Яу алгебры A, как размерность Калаби–Яу стабильной категории $\underline{\text{mod}}\text{-}A$, и обозначим ее $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A)$. К. Эрдманн и А. Сковронски доказали, что $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = n$ тогда и только тогда, когда n – наименьшее неотрицательное число, для которого $\Omega_A^{n+1} \cong \underline{\nu}^{-1}$, где $\underline{\nu}^{-1} : \underline{\text{mod}}\text{-}A \to \underline{\text{mod}}\text{-}A$ – функтор, индуцированный обратным функтором Накаямы $\nu^{-1} : \text{mod-}A \to \text{mod-}A$. Кроме того, они описали алгебры стабильной размерности Калаби–Яу $0, 1$ и 2, доказали, что для алгебр кватернионного типа $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 3$, и вычислили стабильные размерности Калаби–Яу для некоторых других классов алгебр.

В настоящей работе нас будут интересовать самоинъективные алгебры стабильной Калаби–Яу размерности три.

Как известно, над алгебраически замкнутым полем любая конечномерная алгебра Морита-эквивалентна некоторой алгебре путей колчана Q с соотношениями $\mathbf{k}Q/I$. Из определения следует, что стабильная

Калаби–Яу размерность является инвариантом Морита-эквивалентности, следовательно, в вопросах, связанных со стабильной Калаби–Яу размерностью, достаточно ограничиваться только этими алгебрами.

Основная цель нашей статьи заключается в том, чтобы предъявить некоторое легко проверяемое свойство для самоинъективных алгебр путей колчана с соотношениями $A = \mathbf{k}Q/I$, которое удовлетворяет следующим условиям.

- Оно должно явно формулироваться на языке колчана Q и идеала соотношений I.
- Из этого условия должно следовать, что $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A) = 3$.
- Этому условию должны удовлетворять все известные алгебры путей с соотношениями стабильной Калаби–Яу размерности три. В частности, все алгебры кватернионного типа из списка Эрдманн [7, сс. 303–306].

Таким свойством оказывается наличие у алгебры так называемого DTI-семейства соотношений, которое мы определяем в пункте 3.

В качестве предварительного результата, в первом пункте явно предъявляются первые два дифференциала минимальной проективной резольвенты бимодуля A в виде прямых сумм и матриц, используя при этом хорошо известные описания этих дифференциалов на другом языке [8, предложение 2.2.6], [9]. В пункте 2 мы вводим и исследуем функтор транспозиции на категории бимодулей $(-)^{t^e} : \text{bimod-}A \to \text{bimod-}A$, который аналогичен классическому функтору транспозиции $(-)^t = \mathrm{Hom}_A(-, A) : \text{mod-}A \to A\text{-mod}$. В пункте 4 мы доказываем основную теорему о том, что алгебра, допускающая DTI-семейство соотношений, за некоторым исключением, имеет стабильную Калаби–Яу размерность равную трем (теорема 4.3). Пункты 5, 6, 7 посвящены различным примерам алгебр, допускающих семейство DTI-соотношений. В частности, в пункте 6 доказывается, что все алгебры кватернионного типа из списка Эрдманн [7, сс. 303–306] допускают DTI-семейство соотношений. Затем в пункте 8 мы предъявляем явно минимальную бимодульную резольвенту для самоинъективных алгебр с DTI-семейством соотношений (теорема 8.6). Для этого в начале доказываются некоторые факты, касающиеся структуры фробениусовой алгебры на самоинъективной алгебре путей колчана с соотношениями. В частности, доказывается, что всегда можно выбрать такую фробениусову форму, что соответствующий автоморфизм Накаямы

$\widetilde{\nu}$ удовлетворяет свойству $\widetilde{\nu}(e_i) = e_j$, где e_i – идемпотенты, соответствующие вершинам колчана.

1. Начальные члены минимальной проективной бимодульной резольвенты алгебры.

Пусть $\mathbf{k}$ – поле и A – конечномерная $\mathbf{k}$-алгебра. Тогда через mod-A обозначим категорию конечно порожденных правых A-модулей, через A-mod категорию конечно порожденных левых A-модулей, и через bimod-A категорию конечно порожденных A-бимодулей. Если не оговорено противное, будем считать все модули правыми, и все модули и бимодули конечно порожденными.

В этом пункте мы опишем как устроены первые три члена минимальной проективной резольвенты бимодуля A и дифференциалы между ними. В этом пункте не доказывается ничего нового, а только приводятся некоторые известные результаты в удобной для нас форме (см. [8, предложение 2.2.6], [9]).

Пусть Q – колчан, $\mathbf{k}Q$ – алгебра путей колчана Q. Произведение стрелок в этой алгебре мы записываем слева направо. Начало стрелки α обозначаем через $s(\alpha)$, конец через $t(\alpha)$. Через J обозначим идеал, порожденный стрелками $\alpha \in Q_1$. Нас будут интересовать алгебры путей колчана с соотношениями $A = \mathbf{k}Q/I$, где I – допустимый идеал. Образ идеала J в алгебре A – это радикал алгебры A, он будет обозначаться через J_A.

Через $\mathbf{k}Q_0$ обозначим подалгебру в $\mathbf{k}Q$, порожденную идемпотентами $\{e_i\}_{i\in Q_0}$; ясно, что $\mathbf{k}Q_0 \cong \mathbf{k}Q/J \cong A/J_A$. Эта алгебра изоморфна произведению $|Q_0|$ экземпляров поля $\mathbf{k}$, и поэтому она сепарабельна. Категория бимодулей над алгеброй $\mathbf{k}Q_0$ устроена очень просто. $\mathbf{k}Q_0$-бимодуль S полностью определяется набором векторных пространств $\{e_iSe_j\}$. И если S,T – $\mathbf{k}Q_0$-бимодули, то гомоморфизм бимодулей $f : S \to T$ – это линейное отображение, для которого $f(e_iSe_j) \subseteq e_iTe_j$.

Ненулевые элементы $\mathbf{k}Q_0$-бимодуля S, принадлежащие одному из пространств e_iSe_j, назовем направленными; для направленных элементов $x \in e_iSe_j$ вершину $s(x) := i$ назовем началом элемента x, вершину $t(x) := j$ – концом элемента x, а пару $(s(x), t(x))$ назовем направлением элемента x. Эти понятия обобщают соответствующие понятия для путей из алгебры $\mathbf{k}Q$. В этой терминологии гомоморфизм $\mathbf{k}Q_0$-бимодулей – это линейное отображение, которое сохраняет направление направленных элементов.

Легко видеть, что множество направленных элементов $\mathcal{B}$ порождает $\mathbf{k}Q_0$-бимодуль S тогда и только тогда, когда оно порождает его как векторное пространство. Назовем базис, составленный из направленных элементов, направленным базисом. Если $\mathcal{B}$ – направленный базис $\mathbf{k}Q_0$-бимодуля S, то для любого набора направленных элементов $\{t_b \in T\}_{b\in\mathcal{B}}$ таких, что направления b и t_b совпадают, существует единственный гомоморфизм $\mathbf{k}Q_0$-бимодулей $f : S \to T$ такой, что $f(b) = t_b$. Из этого описания легко видеть, что категория $\mathbf{k}Q_0$-бимодулей полупроста, и понятно, как явно строить расщепления мономорфизмов и эпиморфизмов.

Пусть $\alpha \in Q_1$, обозначим через $\frac{\partial}{\partial\alpha} : \mathbf{k}Q \to A \otimes A$ линейное отображение, заданное на путях по формуле

$$\frac{\partial(\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_m)}{\partial\alpha} = \sum_{i\,:\,\alpha_i=\alpha} \alpha_1\ldots\alpha_{i-1}e_{s(\alpha)} \otimes e_{t(\alpha)}\alpha_{i+1}\ldots\alpha_n.$$

Например, если α и β – две петли вокруг вершины $i \in Q_0$, то

$$\frac{\partial\alpha^2\beta\alpha}{\partial\alpha} = e_i \otimes \alpha\beta\alpha + \alpha \otimes \beta\alpha + \alpha^2\beta \otimes e_i.$$

Легко видеть, что $\frac{\partial}{\partial\alpha}$ – дифференцирование.

Проективные неразложимые бимодули обозначим следующим образом: $P_{i,j} = Ae_i \otimes e_jA$, и будем считать их вложенными в обертывающую алгебру $A^e = A^{\mathrm{op}} \otimes A$. Если есть два проективных неразложимых бимодуля $P_{i,j}$ и $P_{k,l}$, то любой гомоморфизм бимодулей $P_{i,j} \to P_{k,l}$ – это умножение слева на элемент пространства $e_iAe_k \otimes e_lAe_j \subseteq A^e$, и это сопоставление задает изоморфизм

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(P_{i,j}, P_{k,l}) \cong e_iAe_k \otimes e_lAe_j.$$

Мы будем отождествлять гомоморфизм и элемент, умножением на который он задается. Гомоморфизм между прямыми суммами проективных неразложимых бимодулей задается матрицей из таких элементов.

Если M – A-бимодуль, то его верхушкой назовем бимодуль

$$\mathrm{top}(M) = M/(J_AM + MJ_A).$$

Гомоморфизм проекции на верхушку обозначим через $\pi_M : M \to \mathrm{top}(M)$. В частности, простой бимодуль, соответствующий вершинам

i, j описывается следующим образом: $S_{ij} = \mathrm{top}(P_{ij})$. Теперь рассмотрим идеал $I \triangleleft \mathbf{k}Q$ как $\mathbf{k}Q$-бимодуль. По аналогии положим

$$\mathrm{top}(I) = \frac{I}{JI + IJ}.$$

Введем обозначение для канонической проекции $\pi = \pi_I : I \to \mathrm{top}(I)$. ($\mathbf{k}Q$-бимодуль $\mathrm{top}(I)$ может не совпадать с верхушкой $\mathbf{k}Q$-бимодуля I с точки зрения общей теории колец и модулей. Но он совпадает с топологической верхушкой этого бимодуля, если рассматривать $\mathbf{k}Q$ как топологическую алгебру с топологией, порожденной идеалом J, и бимодуль I как топологический бимодуль.)

На протяжении всей статьи используется следующее обозначение. Если X – некоторое множество и $x, y \in X$, то

$$\delta_{x,y} = \begin{cases} 1, & \text{если } x = y, \\ 0, & \text{если } x \neq y. \end{cases}$$

Предложение 1.1. *Пусть* $A = \mathbf{k}Q/I$, *и* $\mathscr{R} = \{r_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ – *направленное семейство элементов* I, *образ которого* $\pi\mathscr{R}$ *образует базис в* $\mathrm{top}(I)$. *Тогда следующая последовательность образует начало минимальной проективной резольвенты бимодуля* A :

$$\mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} \xrightarrow{\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}}} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\mathbf{d}_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{m} A \longrightarrow 0,$$

где

$$\mathbf{P}_0 = \bigoplus_{i\in Q_0} P_{i,i},\ \mathbf{P}_1 = \bigoplus_{\alpha\in Q_1} P_{s(\alpha),t(\alpha)},\ \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} = \bigoplus_{i\in\mathfrak{I}} P_{s(r_i),t(r_i)},$$

$m = (m_i)_{i\in Q_0}^{\top}$, $m_i(a\otimes b) = ab$, *где* $a \in Ae_i, b \in e_iA$.
$\mathbf{d}_1 = (d_{i,\alpha})_{(i,\alpha)\in Q_0\times Q_1}$, $d_{i,\alpha} = \delta_{i,s(\alpha)}(e_{s(\alpha)}\otimes\alpha) - \delta_{i,t(\alpha)}(\alpha\otimes e_{t(\alpha)})$,
$\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}} = \left(\frac{\partial r_i}{\partial\alpha}\right)_{(\alpha,i)\in Q_1\times\mathfrak{I}}$.

Доказательство. Для доказательства этого предложения нам потребуются некоторые вспомогательные определения и утверждения.

Пусть S – $\mathbf{k}Q_0$-бимодуль, тогда A-бимодуль $\mathscr{P}(S) = A\otimes_{\mathbf{k}Q_0}S\otimes_{\mathbf{k}Q_0}A$ – проективен. В [9, лемма 2.3] доказано, что если M – A-бимодуль, то

$$\sigma_M : \mathscr{P}(\mathrm{top}(M)) \twoheadrightarrow M,$$

$$\sigma_M(a\otimes m\otimes b) = a\cdot\iota(m)\cdot b$$

– проективное накрытие, где ι – произвольное расщепление эпиморфизма π_M в категории $\mathbf{k}Q_0$-бимодулей.

Рассмотрим линейное отображение $\Delta : \mathbf{k}Q \to \mathscr{P}(J/J^2)$, которое задается на путях следующим образом

$$\Delta(\alpha_1 \dots \alpha_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \otimes \alpha_i \otimes \alpha_{i+1} \dots \alpha_n.$$

Оно является дифференцированием. Так как I лежит в аннуляторе бимодуля $\mathscr{P}(J/J^2)$, то из этого следует, что $\Delta|_I$ – гомоморфизм $\mathbf{k}Q$-бимодулей и $\Delta|_{I^2} = 0$.

В [8, предложение 2.2.6] доказано, что имеет место следующая точная последовательность A-бимодулей

$$0 \to I/I^2 \xrightarrow{c} \mathscr{P}(J/J^2) \xrightarrow{d} \mathscr{P}(\mathbf{k}Q_0) \xrightarrow{\mu} A \to 0,$$

где $\mu(a \otimes b \otimes c) = abc$, $d(1 \otimes \alpha \otimes 1) = 1 \otimes 1 \otimes \alpha - \alpha \otimes 1 \otimes 1$, а c индуцировано Δ.

Легко видеть, что $\mathrm{top}(I) \cong \mathrm{top}(I/I^2)$. Обозначим композицию проекции $\pi_{I/I^2} : I/I^2 \twoheadrightarrow \mathrm{top}(I/I^2)$ и этого изоморфизма через $\pi' : I/I^2 \to \mathrm{top}(I)$. Тогда отображение

$$\sigma' : \mathscr{P}(\mathrm{top}(I)) \twoheadrightarrow I/I^2,$$

$$\sigma'(a \otimes x \otimes b) = a \cdot \iota'(x) \cdot b$$

является проективным накрытием, где ι' – произвольное расщепление π' в категории $\mathbf{k}Q_0$-бимодулей. Пусть теперь $\mathscr{R} = \{r_i\}_{i \in \mathfrak{I}}$ – некоторое семейство направленных элементов из I такое, что их образы в $\mathrm{top}(I)$ образуют направленный базис. Тогда выберем $\iota' : \mathrm{top}(I) \to I/I^2$ так, что $\iota'(r_i + JI + IJ) = r_i + I^2$.

Если мы рассмотрим композицию $\widetilde{c} = c \circ \sigma'$, то получим начало минимальной проективной бимодульной резольвенты

$$\mathscr{P}(\mathrm{top}(I)) \xrightarrow{\widetilde{c}} \mathscr{P}(J/J^2) \xrightarrow{d} \mathscr{P}(\mathbf{k}Q_0) \xrightarrow{\mu} A \to 0.$$

Причем для любого $i \in \mathfrak{I}$ выполнено $\widetilde{c}(1 \otimes r_i \otimes 1) = \Delta(r_i)$. (В этой записи сознательно допущена неточность. Иногда, когда это не будет вызывать путаницы, мы будем обозначать образ элемента при факторизации той же буквой, что и сам элемент.)

Для доказательства осталось построить изоморфизмы $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ такие, что диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\bigoplus\limits_{i\in\mathfrak{I}} P_{s(r_i),t(r_i)} \arrow[r, "\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}}"] \arrow[d, "\varphi_2"] & \bigoplus\limits_{\alpha\in Q_1} P_{s(\alpha),t(\alpha)} \arrow[r, "\mathbf{d}_1"] \arrow[d, "\varphi_1"] & \bigoplus\limits_{i\in Q_0} P_{i,i} \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\varphi_0"] & A \arrow[d, equal] \\
\mathscr{P}(\mathrm{top}(I)) \arrow[r, "\widetilde{c}"] & \mathscr{P}(J/J^2) \arrow[r, "d"] & \mathscr{P}(\mathbf{k}Q_0) \arrow[r, "\mu"] & A
\end{tikzcd}$$

коммутативна.

Обозначим единообразно следующие $\mathbf{k}Q_0$-бимодули:

$$T_0 := \mathbf{k}Q_0, \quad T_1 := J/J^2, \quad T_2 := \mathrm{top}(I).$$

Рассмотрим их направленные базисы: $\mathcal{B}_0 := \{e_i \in \mathbf{k}Q_0 \mid i \in Q_0\}$, $\mathcal{B}_1$ – образ Q_1 в J/J^2 и $\mathcal{B}_2 = \{\pi(r_i) \mid i \in \mathfrak{I}\}$. Определим гомоморфизм

$$\varphi_l : \bigoplus_{b\in\mathcal{B}_l} P_{s(b),t(b)} \to \mathscr{P}(T_l),$$

$$\varphi_l((x_b \otimes y_b)_b) = \sum_{b\in\mathcal{B}} x_b \otimes b \otimes y_b.$$

Чтобы доказать, что φ_l – изоморфизм, предъявим явно обратный гомоморфизм ψ_l. Обозначим через $\mathcal{B}_l^* = \{b^* \mid b \in \mathcal{B}_l\}$ сопряженный базис пространства $\mathrm{Hom}_{\mathbf{k}}(T_l, \mathbf{k})$. Тогда определим гомоморфизм

$$\psi_l : \mathscr{P}(T_l) \to \bigoplus_{b\in\mathcal{B}_l} P_{s(b),t(b)},$$

$$\psi_l(x \otimes t \otimes y) = \big(b^*(t) \cdot (xe_{s(b)} \otimes e_{t(b)}y)\big)_{b\in\mathcal{B}_l}.$$

Легко видеть, что этот гомоморфизм корректно определен и обратен φ_l.

Доказательство того, что полученная диаграмма коммутативна, оставляем читателю. □

2. Функтор $(-)^{t^e}$: **bimod**-$A \to$ **bimod**-A.

Пусть A – конечномерная алгебра. Функтором транспозиции над A назовем контравариантный функтор

$$\mathscr{T} = (-)^t = \mathrm{Hom}_A(-, A) : \mathrm{mod}\text{-}A \to A\text{-mod}.$$

Для произвольных векторных пространств U, V обозначим через $\mathrm{tw} : U \otimes V \to V \otimes U$ отображение перестановки, действующее по формуле $\mathrm{tw}(v \otimes u) = u \otimes v$.

Построим контравариантный функтор транспозиции над

$$A^e = A^{\mathrm{op}} \otimes A$$

на категории A-бимодулей. Каждый A-бимодуль можно рассматривать, как правый модуль над обертывающей алгеброй $A^e = A^{\mathrm{op}} \otimes A$, или как левый модуль над A^e по следующим правилам

$$m(a \otimes b) = amb = (b \otimes a)m.$$

Точнее говоря, имеется изоморфизм категорий

$$\text{bimod-}A \cong \text{mod-}A^e \cong A^e\text{-mod}.$$

Скомпоновав эти изоморфизмы с функтором двойственности относительно A^e, получим функтор

$$\mathscr{T}^e = (-)^{t^e} = \mathrm{Hom}_{A^e}(-, A \otimes A) : \text{bimod-}A \to \text{bimod-}A.$$

Другими словами, здесь подразумевается, что на пространстве $A \otimes A = A^e$ заданы две коммутирующие структуры A-бимодуля. Одна стандартная, которую мы будем называть внешней, индуцирована из структуры правого A^e-модуля на A^e:

$$a \cdot x \cdot b = x(a \otimes b) = ax_1 \otimes x_2 b,$$

где $x = x_1 \otimes x_2 \in A \otimes A$. Вторая, так называемая, внутренняя структура бимодуля на этом пространстве наследуется из структуры левого A^e-модуля на A^e. Ее мы обозначим следующим образом:

$$a \star x \star b = (b \otimes a)x = x_1 b \otimes a x_2 = \mathrm{tw}(a \cdot \mathrm{tw}(x) \cdot b).$$

Когда речь идет о гомоморфизмах бимодулей $f : M \to A \otimes A$, то подразумевается, что пространство $A \otimes A$ наделено внешней структурой бимодуля. А когда задается структура A-бимодуля на $\mathrm{Hom}_{A^e}(M, A \otimes A)$, то используется внутренняя структура бимодуля на пространстве $A \otimes A$. То есть если $f \in \mathrm{Hom}_{A^e}(M, A \otimes A)$, то $(afb)(m) = a \star f(m) \star b$.

Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – алгебра путей колчана с соотношениями. Выясним, как этот функтор действует на категории конечнопорожденных проективных бимодулей $\mathcal{P}$. Вначале построим меньшую категорию $\mathcal{P}_0$, которая будет эквивалентна $\mathcal{P}$, но которая для нас более удобна.

Пусть $\mathfrak{K}$ – некоторое конечное множество и $\{M_k\}_{k \in \mathfrak{K}}$ – семейство бимодулей. Положим

$$\bigoplus_{k \in \mathfrak{K}} M_k = \{x : \mathfrak{K} \to \bigcup_{k \in \mathfrak{K}} M_k \mid \forall k \in \mathfrak{K} \quad x(k) \in M_k\}.$$

Оснастим стандартным образом это множество структурой бимодуля. Будем называть этот бимодуль прямой суммой семейства $\{M_k\}_{k\in\mathfrak{K}}$. Его элементы будем записывать следующим образом $x = (x_k)_{k\in\mathfrak{K}}$, где $x_k = x(k)$. Обозначим через

$$\mathcal{P}_0 \subset \mathrm{bimod}\text{-}A$$

полную подкатегорию в категории bimod-A, состоящую из проективных бимодулей вида $\bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} P_{i_k,j_k}$, для конечных множеств $\mathfrak{K}$. Из теоремы Крулля–Шмидта следует эквивалентность категорий $\mathcal{P}_0 \simeq \mathcal{P}$. Любой морфизм $f : \bigoplus_{k\in\mathfrak{K}} P_{i_k,j_k} \to \bigoplus_{l\in\mathfrak{L}} P_{i_l,j_l}$ в категории $\mathcal{P}_0$ задается "матрицей" $(f_{lk})_{(l,k)\in\mathfrak{L}\times\mathfrak{K}}$, где $f_{lk} \in e_{i_k}Ae_{i_l} \otimes e_{j_l}Ae_{j_k}$, следующим образом $f((x_k)_{k\in\mathfrak{K}}) = (\sum_{k\in\mathfrak{K}} f_{lk}x_k)_{l\in\mathfrak{L}}$, с которой мы этот морфизм будем отождествлять. Когда это не будет вызывать путаницы, ради краткости множества индексов будем опускать.

Определим контравариантный функтор

$$\mathrm{TW} : \mathcal{P}_0 \to \mathrm{bimod}\text{-}A,$$

$$\mathrm{TW}\Big(\bigoplus P_{i_k,j_k}\Big) = \bigoplus P_{j_k,i_k},$$

и если $f : \bigoplus P_{i_k,j_k} \to \bigoplus P_{i_l,j_l}$, где $f = (f_{lk})_{l,k}$, то

$$\mathrm{TW}(f) = (\mathrm{tw}(f_{lk}))_{k,l}.$$

Легко проверить, что TW – контравариантный функтор (это следует из того, что $\mathrm{tw} : A^e \to A^e$ – инволюция).

Предложение 2.1. $\mathscr{T}^e|_{\mathcal{P}_0} \cong \mathrm{TW}$.

Доказательство. Построим изоморфизм функторов $\Theta : \mathscr{T}^e|_{\mathcal{P}_0} \to \mathrm{TW}$. Построим его сначала на неразложимых бимодулях.

$$\Theta_{P_{i,j}} : \mathrm{Hom}_{A^e}(P_{i,j}, A\otimes A) \to P_{j,i},$$

$$\Theta_{P_{i,j}}(f) = \mathrm{tw}\big(f(e_i \otimes e_j)\big).$$

Легко видеть, что $\Theta_{P_{i,j}}$ – изоморфизм. Теперь определим его на произвольном бимодуле $P = \bigoplus P_{i_k,j_k}$ категории $\mathcal{P}_0$:

$$\Theta_P : P^{t^e} \cong \bigoplus P^{t^e}_{i_k,j_k} \xrightarrow{\bigoplus \Theta_{P_{i_k,j_k}}} \mathrm{TW}(P).$$

Непосредственно проверяется, что это естественное преобразование. □

3. DTI-семейство соотношений.

Основной целью настоящей статьи является изучение алгебр путей колчана с соотношениями $A = \mathbf{k}Q/I$ (где I – допустимый идеал), для которых существует семейство соотношений с некоторыми специальными свойствами.

Определение 3.1. Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – алгебра путей с соотношениями. Q_1-индексированное семейство $\mathscr{R} = \{r_\alpha\}_{\alpha\in Q_1}$, составленное из элементов идеала I, назовем DTI-семейством соотношений (дифференциально twist-инвариантным семейством соотношений), если выполнены следующие три условия.
`(DTI-1)` $r_\alpha \in e_{t(\alpha)} I e_{s(\alpha)}$ для всех $\alpha \in Q_1$.
`(DTI-2)` $\frac{\partial r_\beta}{\partial\alpha} = \mathrm{tw}\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial\beta}\right)$ для всех $\alpha, \beta \in Q_1$.
`(DTI-3)` семейство $\pi\mathscr{R} = \{\pi(r_\alpha)\}_{\alpha\in Q_1}$ образует базис в $\mathrm{top}(I)$, где $\pi : I \to \mathrm{top}(I)$ – каноническая проекция.

Пункт `(DTI-1)` означает, что направление соотношения r_α противоположно направлению α. Из того, что семейство соотношений является DTI-семейством, не следует, что оно порождает идеал соотношений. Контрпримерами к этому являются алгебры кватернионного типа из списка Эрдманн, которые мы обсуждаем в пункте 6.

Замечание 3.2. Если у алгебры $A = \mathbf{k}Q/I$ есть DTI-семейство соотношений, то имеет место изоморфизм бимодулей

$$\mathrm{top}(I) \cong \bigoplus_{\alpha\in Q_1} S_{t(\alpha),s(\alpha)}.$$

Предложение 3.3. *Условие* `(DTI-3)` *в определении* DTI-*семейства соотношений, по модулю остальных условий, эквивалентно следующему условию* `(DTI-3′)=(DTI-3′a)∧(DTI-3′b)`*:*
`(DTI-3′a)` *семейство* $\pi\mathscr{R}_{i,j}$ *линейно независимо для любых* $i, j \in Q_0$*, где* $\mathscr{R}_{i,j} = \{r_\alpha\}_{\alpha:i\to j}$.
`(DTI-3′b)` $(\mathscr{R}) + JI + IJ = I$*, где* $(\mathscr{R})$ *– идеал, порожденный семейством* $\mathscr{R}$.

Замечание 3.4. В том случае, когда у колчана Q нет параллельных стрелок, условие `(DTI-3′a)` эквивалентно тому, что $\pi(r_\alpha) \neq 0$ для всех $\alpha \in Q_1$.

Доказательство предложения 3.3.

`(DTI-3)`$\Rightarrow$`(DTI-3′)`. Условие `(DTI-3′a)` очевидно. Так как $\pi\mathscr{R}$ порождает $\mathrm{top}(I)$ как векторное пространство, то оно его порождает и как $\mathbf{k}Q$-бимодуль. Следовательно,

$$I = \pi^{-1}(\langle\pi\mathscr{R}\rangle_{\mathbf{k}Q^e}) = \pi^{-1}(\pi(\langle\mathscr{R}\rangle_{\mathbf{k}Q^e})) = \langle\mathscr{R}\rangle_{\mathbf{k}Q^e} + \mathrm{Ker}(\pi) = (\mathscr{R}) + JI + IJ.$$

`(DTI-1)`$\wedge$`(DTI-2)`$\wedge$`(DTI-3′)`$\Rightarrow$`(DTI-3)`. Так как $\pi\mathscr{R}_{i,j}$ лежат в разных прямых слагаемых $\mathrm{top}(I) = \bigoplus e_i \mathrm{top}(I) e_j$, то из линейной независимости $\pi\mathscr{R}_{i,j}$ следует линейная независимость $\pi\mathscr{R}$.

Докажем, что $\pi\mathscr{R}$ порождает $\mathrm{top}(I)$ как векторное пространство. Из условия `(DTI-3′b)` следует, что $\pi\mathscr{R}$ порождает $\mathrm{top}(I)$ как $\mathbf{k}Q$-бимодуль. Так как идеал J лежит в аннуляторе бимодуля $\mathrm{top}(I)$, то из этого следует, что этот образ порождает его как $\mathbf{k}Q_0$-бимодуль. А так как $\pi\mathscr{R}$ состоит из направленных элементов, из этого следует, что оно порождает $\mathrm{top}(I)$ как векторное пространство. $\square$

Предложение 3.5. *Пусть* $A = \mathbf{k}Q/I$ *и* $\mathscr{R} = \{r_i\}_{i\in\mathfrak{I}}$ *– семейство элементов идеала* I*, образ которого образует базис в* $\mathrm{top}(I)$*, и* $d_2^{\mathscr{R}} : \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} \to \mathbf{P}_1$ *– морфизм из предложения* 1.1. *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *морфизм* $d_2^{\mathscr{R}}$ *инвариантен относительно функтора* TW *(в том смысле, что* $\mathrm{TW}(\mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}) = \mathbf{P}_1, \mathrm{TW}(\mathbf{P}_1) = \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}, \mathrm{TW}(d_2^{\mathscr{R}}) = d_2^{\mathscr{R}}$*);*

(2) $\mathfrak{I} = Q_1$ *и* $\mathscr{R}$ *–* DTI-*семейство соотношений.*

Доказательство. Напомним, что прямая сумма бимодулей $\bigoplus_{i\in\mathfrak{A}} M_i$ по конечному множеству индексов $\mathfrak{A}$ определяется как множество функций $\mathfrak{A} \to \bigcup_{i\in\mathfrak{A}} M_i$, для которых образ i лежит в M_i, с покоординатными действиями. Тогда из теоретико-множественного равенства двух прямых сумм следует, что множества индексов, по которым берется суммирование, совпадают. Таким образом, из того, что $\mathrm{TW}(\mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}) = \mathbf{P}_1$ следует, что $\mathfrak{I} = Q_1$.

Будем теперь считать, что $\mathfrak{I} = Q_1$. Легко видеть, что равенства $\mathrm{TW}(\mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}) = \mathbf{P}_1, \mathrm{TW}(\mathbf{P}_1) = \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}$ эквивалентны друг другу, поэтому достаточно следить только за одним из них. По определению имеем

$$\mathrm{TW}(\mathbf{P}_1) = \bigoplus_{\alpha\in Q_1} P_{t(\alpha),s(\alpha)}, \quad \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} = \bigoplus_{\alpha\in Q_1} P_{s(r_\alpha),t(r_\alpha)},$$

$$d_2^{\mathscr{R}} = \left(\frac{\partial r_\beta}{\partial \alpha}\right)_{(\alpha,\beta)\in Q_1\times Q_1}, \quad \mathrm{TW}(d_2^{\mathscr{R}}) = \left(\mathrm{tw}\left(\frac{\partial r_\beta}{\partial \alpha}\right)\right)_{(\beta,\alpha)\in Q_1\times Q_1}.$$

Из этого следует, что равенство $\mathrm{TW}(\mathbf{P}_1) = \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}}$ эквивалентно (DTI-1), а равенство $\mathrm{TW}(d_2^{\mathscr{R}}) = d_2^{\mathscr{R}}$ эквивалентно (DTI-2). Свойство (DTI-3) дано по условию. □

4. Стабильная Калаби–Яу размерность алгебр с DTI-семейством соотношений.

Пусть A – конечномерная алгебра. Напомним, что функтором Накаямы называется функтор

$$\nu = D((-)^t) : \text{mod-}A \to \text{mod-}A.$$

Он является автоэквивалентностью тогда и только тогда, когда A самоинъективна, и изоморфен тождественному тогда и только тогда, когда A – симметрическая алгебра. В дальнейшем мы будем предполагать, что алгебра A самоинъективна.

Алгебра A называется фробениусовой, если задано отображение $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ такое, что композиция

$$A \otimes A \xrightarrow{\mu} A \xrightarrow{\varepsilon} \mathbf{k}$$

$$a \otimes b \mapsto \varepsilon(ab)$$

является невырожденной билинейной формой. В этом случае ε называется фробениусовой формой. Фробениусовы алгебры самоинъективны.

Автоморфизмом Накаямы фробениусовой алгебры A называется отображение $\widetilde{\nu} : A \to A$, которое задается соотношением $\varepsilon(ab) = \varepsilon(b\widetilde{\nu}(a))$, для любых $a, b \in A$. Как легко видеть, это отображение является автоморфизмом алгебры A. Автоморфизм Накаямы алгебры A непосредственно связан с функтором Накаямы. Хорошо известно, что отображение $A \to D(A)$, $a \mapsto a\varepsilon$ задает изоморфизм левых модулей. Причем из определения автоморфизма Накаямы следует, что $\varepsilon a = \widetilde{\nu}(a)\varepsilon$. Откуда получаем, что имеет место изоморфизм бимодулей $A_{\widetilde{\nu}} \cong D(A)$, где $A_{\widetilde{\nu}}$ – бимодуль, подлежащее векторное пространство которого и умножение слева такие же, как на бимодуле A, а умножение справа задается по формуле: $m * a = m\widetilde{\nu}(a)$. Но известно, что $\nu \cong - \otimes_A D(A)$, следовательно, для фробениусовых алгебр функтор

Накаямы связан с автоморфизмом Накаямы следующим образом

$$\nu \cong (-)_{\widetilde{\nu}},$$

где $(-)_{\widetilde{\nu}}$: mod-$A \to$ mod-A – функтор, который не меняет подлежащее векторное пространство модуля, а умножение меняется следующим образом: $m * a = m\widetilde{\nu}(a)$.

Если F : mod-$A \to$ mod-A – $\mathbf{k}$-линейный функтор, который переводит проективные модули в проективные модули, то он индуцирует функтор на стабильной категории, который мы обозначим следующим образом: $\underline{F} : \underline{\mathrm{mod}}\text{-}A \to \underline{\mathrm{mod}}\text{-}A$.

Лемма 4.1. *Если A – конечномерная самоинъективная алгебра и $\Omega^{n+1}_{A^e}(A) \cong A^{t^e}$, то $\Omega^{n+1}_A \cong \underline{\nu}^{-1}$; в частности, $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) \leqslant n$.*

Доказательство. В [12] доказано, что

$$\nu^{-1} \cong - \otimes_A A^{t^e}. \tag{4.1}$$

Кроме того, легко проверить, что имеется изоморфизм функторов в стабильной категории $\Omega^{n+1}_A \cong \underline{- \otimes_A \Omega^{n+1}_{A^e}(A)}$, что и завершает доказательство. □

Обозначим через $A^{\mathrm{Nak}}_{n,m}$ следующую алгебру путей колчана с соотношениями

$$Q: \quad \begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[r, "\alpha_0"] & 1 \arrow[dr, "\alpha_1"] & \\
n-1 \arrow[ur, "\alpha_{n-1}"] & & & 2 \arrow[d, "\alpha_2"] \\
\vdots \arrow[u, "\alpha_{n-2}"] & & & \vdots
\end{tikzcd}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$\alpha_i \ldots \alpha_{i+m-1} = 0.$$

В последнем соотношении индексы рассматриваются по модулю n. Это связная алгебра Накаямы длины Лоэва m, имеющая n простых модулей. В [6] показано, что если $A = \mathbf{k}Q/I$ – связная самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями, то $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $A \cong A^{\mathrm{Nak}}_{n,2}$.

Предложение 4.2. *Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – связная самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями, не изоморфная алгебрам $\mathbf{k}[x]/(x^n)$ и $A_{3,2}^{\mathrm{Nak}}$. Тогда если $\Omega_{A^e}^4(A) \cong A^{t^e}$, то $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) = 3$.*

Доказательство. Из предыдущей леммы следует, что $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) \leqslant 3$. Нам нужно доказать, что $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) = 3$. Предположим обратное, пусть $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) \leqslant 2$.

Пусть $\Omega_A^3 \cong \underline{\nu}^{-1}$. Тогда из соотношений $\Omega_A^3 \cong \underline{\nu}^{-1}$ и $\Omega_A^4 \cong \underline{\nu}^{-1}$ следует, что $\Omega_A \cong \mathrm{Id}$, откуда вытекает $\underline{\nu}^{-1} \cong \Omega_A^3 \cong \mathrm{Id}$, а значит $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) = 0$. Таким образом, $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A)$ может быть равно только 0 или 1.

Если $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) = 1$, то из [6, предложение 2.2] следует, что $A \cong \mathbf{k}[x]/(x^n)$, что запрещено по условию.

Если $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) = 0$, то $A \cong A_{n,2}^{\mathrm{Nak}}$, причем $\underline{\nu}^{-1} \cong \Omega_A$. Из соотношений $\underline{\nu}^{-1} = \Omega_A$ и $\Omega_A^4 \cong \underline{\nu}^{-1}$ следует, что $\Omega_A^3 \cong \mathrm{Id}$. Откуда следует, что $\underline{\nu}^3 \cong \Omega_A^{-3} \cong \mathrm{Id}$. Алгебра $A_{n,2}^{\mathrm{Nak}}$ является фробениусовой алгеброй, автоморфизм Накаямы которой $\widetilde{\nu} : A_{n,2}^{\mathrm{Nak}} \to A_{n,2}^{\mathrm{Nak}}$ индуцируется поворотом колчана по часовой стрелке на угол $\frac{2\pi}{n}$. Так как для фробениусовых алгебр $\nu(M) \cong M_{\widetilde{\nu}}$, то из соотношения $\underline{\nu}^3 \cong \mathrm{Id}$ следует соотношение $\widetilde{\nu}^3 = \mathrm{id}$, откуда получаем, что $n = 3$ или $n = 1$. В первом случае $A \cong A_{3,2}^{\mathrm{Nak}}$, а во втором $A \cong A_{1,2}^{\mathrm{Nak}} \cong \mathbf{k}[x]/(x^2)$, и то, и другое запрещено по условию. □

Теорема 4.3. *Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями.*

(1) *Если у алгебры A есть* DTI*-семейство соотношений, то*
$$\Omega_{A^e}^4(A) \cong A^{t^e}.$$

(2) *Если, кроме того, аглебра A связна и не изоморфна алгебрам $\mathbf{k}[x]/(x^n)$ и $A_{3,2}^{\mathrm{Nak}}$, то $\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) = 3$.*

Доказательство. Ясно, что пункт (2) следует из пункта (1) и предложения 4.2. Докажем пункт (1).

Пусть $\mathscr{R}$ – DTI-семейство соотношений. По предложению 1.1 последовательность
$$\mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} \xrightarrow{\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}}} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\mathrm{d}_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{m} A \longrightarrow 0$$
является началом минимальной проективной резольвенты бимодуля A. Так как алгебра A самоинъективна, то и алгебра A^e самоинъективна,

следовательно, функтор $(-)^{t^e}$ точен и переводит проективные бимодули в проективные бимодули. Таким образом, после его применения к началу проективной резольвенты A получим начало инъективной резольвенты бимодуля A^{t^e}. Воспользовавшись тем, что $(-)^{t^e}|_{\mathcal{P}_0} \overset{\Theta}{\cong} \mathrm{TW}$, тем, что $\mathrm{TW}(\mathbf{P}_0) = \mathbf{P}_0$, и предложением 3.5, получаем, что последовательность

$$0 \longrightarrow A^{t^e} \xrightarrow{\Theta\circ m^{t^e}} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{\mathrm{TW}(\mathbf{d}_1)} \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} \xrightarrow{\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}}} \mathbf{P}_1$$

является минимальной инъективной резольвентой бимодуля A^{t^e}. Откуда получаем, что следующая последовательность точна:

$$0 \to A^{t^e} \xrightarrow{m'} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{\mathbf{d}_3} \mathbf{P}_2^{\mathscr{R}} \xrightarrow{\mathbf{d}_2^{\mathscr{R}}} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\mathbf{d}_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{m} A \to 0, \qquad (4.2)$$

где $\mathbf{d}_3 = \mathrm{TW}(\mathbf{d}_1)$, и $m' = \Theta \circ m^{t^e}$. Следовательно, $\Omega^4_{A^e}(A) \cong A^{t^e}$. □

5. Алгебры Накаямы $A^{\mathrm{Nak}}_{n,m}$ при $n \mid m+1$.

В этом пункте мы исследуем, в каких случаях у алгебр Накаямы $A^{\mathrm{Nak}}_{n,m}$, определенных в пункте 4, есть DTI-семейство соотношений.

Предложение 5.1. *Алгебра $A^{\mathrm{Nak}}_{n,m}$ допускает* DTI-*семейство соотношений тогда и только тогда, когда $n \mid m+1$.*

Следствие 5.2. *Если $m > 2$ и $n \mid m+1$, то* $\underline{\mathrm{CY}}\mathrm{dim}(A^{\mathrm{Nak}}_{n,m}) = 3$.

Доказательство предложения 5.1. Обозначим соотношения следующим образом $r_{\alpha_i} = \alpha_{i+1}\dots\alpha_{i+m}$, и семейство, составленное из них, обозначим через $\mathscr{R} = \{r_\alpha\}_{\alpha\in Q_1}$. Соотношение r_{α_i} направлено и начинается в вершине $i+1$, а заканчивается в вершине $i+m+1$. Эти соотношения порождают идеал I. Кроме того, легко видеть, что все соотношения r_{α_i} не лежат в $JI+IJ$, следовательно, выполнено условие `(DTI-3′)`.

Из замечания 3.2 следует, что для алгебр с DTI-семейством соотношений пространство $e_i(\mathrm{top}(I))e_j$ не равно 0 тогда и только тогда, когда $i = t(\alpha)$ и $j = s(\alpha)$, для некоторого $\alpha \in Q_1$. Но мы имеем $e_1 r_{\alpha_0} e_{m+1} = r_{\alpha_0}$, откуда получаем $e_1(\mathrm{top}(I))e_{m+1} \neq 0$. Следовательно, если $m+1 \not\equiv 0(\mathrm{mod} n)$, то у алгебры $A^{\mathrm{Nak}}_{n,m}$ нет DTI-семейства соотношений.

Пусть теперь $n \mid m+1$. Докажем, что смейство $\mathscr{R}$ является DTI-семейством соотношений для алгебры $A^{\mathrm{Nak}}_{n,m}$. Действительно, в этом случае $r_{\alpha_i} \in e_{i+1}Ie_i$, следовательно, `(DTI-1)` выполняется. И, как мы уже заметили, выполняется (DTI-3′). Остается проверить (DTI-2), то есть то, что $\frac{\partial r_{\alpha_j}}{\partial \alpha_i} = \mathrm{tw}\left(\frac{\partial r_{\alpha_i}}{\partial \alpha_j}\right)$. Это проверяется прямым вычислением. □

6. Алгебры кватернионного типа.

Пусть теперь $\mathbf{k}$ – алгебраически замкнутое поле. Следуя [7], конечномерную алгебру назовем алгеброй кватернионного типа, если A – связная, симметрическая, ручная, ее матрица Картана невырожденна и ее стабильный AR-колчан Γ^s_A состоит только из трубок ранга не больше 2. Этот класс алгебр содержит все блоки групповых алгебр конечных групп, у которых группа дефекта является обобщенной группой кватернионов. К. Эрдманн доказала, что любая алгебра кватернионного типа Морита-эквивалентна одной из алгебр, содержащихся в списке [7, сс. 303-306].

Теорема 6.1. *Алгебры кватернионного типа из списка К.Эрдманн* [7, сс. 303-306] *допускают* DTI-*семейство соотношений.*

Из теоремы, в частности, вытекает следующий известный факт [6, теорема 5.1].

Следствие 6.2. *Если A – алгебра кватернионного типа, то*

$$\underline{\mathrm{CY}}\dim(A) = 3.$$

В следующей таблице для каждой алгебры из списка Эрдманн в последнем столбце предъявляются порождающие идеала соотношений соответствующей алгебры, причем в нем же обозначены соотношения r_α для $\alpha \in Q_1$, которые, как мы докажем, составляют DTI-семейство соотношений для этой алгебры.

$\mathscr{Q}^k(a,b)$ $k \geqslant 2$, $a, b \in \mathbf{k}$	$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$	$r_\alpha = \alpha^2 - (\beta\alpha)^{k-1}\beta - a\alpha^3$, $r_\beta = \beta^2 - (\alpha\beta)^{k-1}\alpha - b\beta^3$, $\alpha^4,\ \beta^4$.
$\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c)$ $k \geqslant 2$ $c \in \mathbf{k}$	$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \end{tikzcd}$	$r_\beta = \gamma\beta\gamma - (\gamma\alpha\beta)^{k-1}\gamma\alpha$, $r_\gamma = \beta\gamma\beta - (\alpha\beta\gamma)^{k-1}\alpha\beta$, $r_\alpha = \alpha^2 - (\beta\gamma\alpha)^{k-1}\beta\gamma - c\alpha^3$, $\alpha^2\beta,\ \alpha^4$.

$\mathscr{Q}^{k,s}(2\mathscr{B})_1(a,c)$
$k \geqslant 1, s \geqslant 3$
$k + s > 4$
$a \in \mathbf{k}^*, c \in \mathbf{k}$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[loop right, "\eta"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\gamma = \beta\eta - (\alpha\beta\gamma)^{k-1}\alpha\beta, \\ r_\beta = \eta\gamma - (\gamma\alpha\beta)^{k-1}\gamma\alpha, \\ r_\alpha = \alpha^2 - a(\beta\gamma\alpha)^{k-1}\beta\gamma + c\alpha^3, \\ r_\eta = \gamma\beta - \eta^s, \\ \alpha^2\beta, \alpha^4. \end{gathered}$$

$\mathscr{Q}^{s}(2\mathscr{B})_2(a,c,p)$
$s > 3,$
$a \in \mathbf{k}^*, c \in \mathbf{k}$
$p \in \mathbf{k}[t], p(0) = 1.$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[loop right, "\eta"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\gamma = \alpha\beta - \beta\eta,\ r_\beta = \gamma\alpha - \eta\gamma, \\ r_\alpha = \beta\gamma - \alpha^2 p(\alpha), \\ r_\eta = \eta^2 p(\eta) + a\eta^{s-1} + c\eta^s - \gamma\beta, \\ \alpha^{s+1},\ \eta^{s+1},\ \gamma\alpha^{s-1},\ \alpha^{s-1}\beta. \end{gathered}$$

$\mathscr{Q}^{t}(2\mathscr{B})_3(a,c,d)$
$t \geqslant 3,$
$a \in \mathbf{k}^*, c, d \in \mathbf{k}$
$t = 3 \Rightarrow a \neq 1$
$t \neq 3 \Rightarrow a = 1$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[loop right, "\eta"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\gamma = \alpha\beta - \beta\eta,\ r_\beta = \gamma\alpha - \eta\gamma, \\ r_\alpha = \beta\gamma - \alpha^2 + c\alpha^3, \\ r_\eta = a\eta^{t-1} + d\eta^t - \gamma\beta, \\ \alpha^4,\ \eta^{t+1},\ \gamma\alpha^2,\ \alpha^2\beta. \end{gathered}$$

$\mathscr{Q}^{a,b}(3\mathscr{A})_1(d)$
$a \geqslant b \geqslant 2,$
$d \in \mathbf{k}^*$
$a = b = 2 \Rightarrow d \neq 1$
$a \geqslant b \geqslant 3 \Rightarrow d = 1.$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "\delta"] & 2 \arrow[l, shift left, "\eta"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\gamma = \beta\delta\eta - (\beta\gamma)^{a-1}\beta, \\ r_\beta = \delta\eta\gamma - (\gamma\beta)^{a-1}\gamma, \\ r_\delta = \eta\gamma\beta - d(\eta\delta)^{b-1}\eta, \\ r_\eta = \gamma\beta\delta - d(\delta\eta)^{b-1}\delta, \\ \beta\delta\eta\delta,\ \eta\gamma\beta\gamma. \end{gathered}$$

$\mathscr{Q}^{k}(3\mathscr{A})_2$
$k \geqslant 2$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "\delta"] & 2 \arrow[l, shift left, "\eta"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\gamma = \beta\gamma\beta - (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\beta\delta\eta, \\ r_\beta = \gamma\beta\gamma - (\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\delta\eta\gamma, \\ r_\delta = \eta\delta\eta - (\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}\eta\gamma\beta, \\ r_\eta = \delta\eta\delta - (\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\gamma\beta\delta, \\ \beta\gamma\beta\delta,\ \eta\delta\eta\gamma. \end{gathered}$$

$\mathscr{Q}^{k,s}(3\mathscr{B})$
$k \geqslant 1, s \geqslant 3$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "\delta"] & 2 \arrow[l, shift left, "\eta"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\gamma = \alpha\beta - (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\beta\delta\eta, \\ r_\beta = \gamma\alpha - (\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\delta\eta\gamma, \\ r_\delta = \eta\delta\eta - (\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}\eta\gamma\beta, \\ r_\eta = \delta\eta\delta - (\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\gamma\beta\delta, \\ r_\alpha = \beta\gamma - \alpha^{s-1}, \\ \alpha^2\beta,\ \beta\delta\eta\delta. \end{gathered}$$

$\mathscr{Q}^{k,s}(3\mathscr{C})$
$k \geqslant 2, s \geqslant 3$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "\delta"] \arrow[loop below, "\rho"] & 2 \arrow[l, shift left, "\eta"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\gamma = \beta\rho,\ r_\beta = \rho\gamma, \\ r_\rho = \delta\eta - \gamma\beta - \rho^{s-1}, \\ r_\delta = \eta\rho - (\eta\delta)^{k-1}\eta, \\ r_\eta = \rho\delta - (\delta\eta)^{k-1}\delta, \\ \eta\rho^2,\ \rho^2\delta, \\ (\beta\gamma)^{k-1}\beta\delta,\ (\eta\delta)^{k-1}\eta\gamma. \end{gathered}$$

$\mathscr{Q}^{k,s,t}(3\mathscr{D})$
$k \geqslant 1,\ s,t \geqslant 3$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \arrow[r, shift left, "\delta"] & 2 \arrow[l, shift left, "\eta"] \arrow[loop right, "\xi"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\alpha = \beta\gamma - \alpha^{s-1}, \\ r_\beta = \gamma\alpha - (\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\delta\eta\gamma, \\ r_\gamma = \alpha\beta - (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\beta\delta\eta, \\ r_\xi = \eta\delta - \xi^{t-1}, \\ r_\eta = \delta\xi - (\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\gamma\beta\delta, \\ r_\delta = \xi\eta - (\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}\eta\gamma\beta, \\ \alpha^2\beta,\ \delta\eta\delta. \end{gathered}$$

$\mathscr{Q}^{a,b,c}(3\mathscr{K})$
$a \geqslant b \geqslant c \geqslant 2$

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[rr, shift left, "\beta"] \arrow[dr, shift left, "\kappa"] & & 1 \arrow[ll, shift left, "\gamma"] \arrow[dl, shift left, "\delta"] \\ & 2 \arrow[ul, shift left, "\lambda"] \arrow[ur, shift left, "\eta"] & \end{tikzcd}$$

$$\begin{gathered} r_\lambda = \beta\delta - (\kappa\lambda)^{a-1}\kappa, \\ r_\kappa = \eta\gamma - (\lambda\kappa)^{a-1}\lambda, \\ r_\beta = \delta\lambda - (\gamma\beta)^{b-1}\gamma, \\ r_\gamma = \kappa\eta - (\beta\gamma)^{b-1}\beta, \\ r_\delta = \lambda\beta - (\eta\delta)^{c-1}\eta, \\ r_\eta = \gamma\kappa - (\delta\eta)^{c-1}\delta, \\ \gamma\beta\delta,\ \delta\eta\gamma,\ \lambda\kappa\eta. \end{gathered}$$

Замечание 6.3. Для первых трех алгебр:

$$\mathscr{Q}^k(a,b), \quad \mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c), \quad \mathscr{Q}^{k,s}(2\mathscr{B})_1(a,c),$$

наши порождающие идеала соотношений отличаются от тех, которые выписаны в [7], но легко проверить, что они порождают тот же идеал.

Доказательство теоремы 6.1. Для доказательства теоремы нам нужно для каждой алгебры $A = \mathbf{k}Q/I$ из нашего списка доказать, что предъявленное в таблице семейство соотношений $\mathscr{R} = \{r_\alpha\}_{\alpha\in Q_1}$ является DTI-семейством соотношений. В каждом из рассматриваемых случаев ясно, что $r_\alpha \in e_{t(\alpha)}Ie_{s(\alpha)}$, и прямым вычислением проверяется, что $\frac{\partial r_\beta}{\partial\alpha} = \operatorname{tw}\left(\frac{\partial r_\alpha}{\partial\beta}\right)$ для всех $\alpha,\beta \in Q_1$. Таким образом, выполняются условия `(DTI-1)` и `(DTI-2)`. Осталось проверить свойство `(DTI-3′)=(DTI-3′a)`$\wedge$`(DTI-3′b)`.

`(DTI-3′a)`. Длину пути $w \in \mathbf{k}Q$ обозначим через $|w|$, длину идемпотентов e_i положим равной нулю. Для элемента $r = \sum \lambda_w w \in \mathbf{k}Q$ рассмотрим множество $\mathscr{W}(r) = \{w \mid \lambda_w \neq 0\}$, а также множество $\sigma(r) = \{w \in \mathscr{W}(r) \mid \forall w' \in \mathscr{W}(r) \quad |w| \leqslant |w'|\}$ кратчайших путей из $\mathscr{W}(r)$. Длину кратчайших путей r обозначим $\ell_\sigma(r)$. Кратчайшим путем множества $T \subseteq \mathbf{k}Q$ назовем любой кратчайший путь множества $\bigcup_{t\in T}\mathscr{W}(t)$. Множество кратчайших путей T обозначим через $\sigma(T)$.

Таким образом,

$$\sigma(T) = \bigcup\{\sigma(t) \mid \forall t' \in T\ \ell_\sigma(t) \leqslant \ell_\sigma(t')\}.$$

Длину кратчайших путей множества T обозначим $\ell_\sigma(T)$.

Лемма 6.4. *Пусть $\{r_i\}$ – семейство элементов $\mathbf{k}Q$, T – идеал $\mathbf{k}Q$ такой, что $\ell_\sigma(r_i) \leqslant \ell_\sigma(T)$ и*

$$\sigma(r_i) \setminus \Big(\bigcup_{i\neq j}\sigma(r_j) \cup \sigma(T)\Big) \neq \varnothing \quad \textit{для всех} \ \ i.$$

Тогда семейство $\{r_i + T\}$ линейно независимо в $\mathbf{k}Q/T$.

Заметим, что если есть произвольная линейная комбинация $\sum\lambda_k r_k$, тогда из того, что $\lambda_i \neq 0$, следует включение

$$\sigma(r_i) \setminus \big(\bigcup_{j\neq i}\sigma(r_j)\big) \subseteq \sigma(\sum\lambda_k r_k).$$

Докажем лемму. Предположим противное: пусть $\sum\lambda_k r_k \in T$, и $\lambda_i \neq 0$ для некоторого i. Тогда из того, что

$$\varnothing \neq \sigma(r_i) \setminus \big(\bigcup_{j\neq i}\sigma(r_j)\big) \subseteq \sigma(\sum\lambda_k r_k),$$

следует, что некоторый кратчайший путь элемента r_i является кратчайшим путем элемента $\sum\lambda_k r_k \in T$, следовательно,

$$\ell_\sigma(r_i) = \ell_\sigma(\sum\lambda_k r_k) \geqslant \ell_\sigma(T).$$

Но по условию $\ell_\sigma(r_i) \leqslant \ell_\sigma(T)$, следовательно,

$$\ell_\sigma(r_i) = \ell_\sigma(\sum\lambda_k r_k) = \ell_\sigma(T).$$

Из этого следует, что $\sigma(\sum\lambda_k r_k) \subseteq \sigma(T)$. Откуда получаем

$$\sigma(r_i) \setminus \Big(\bigcup_{i\neq j}\sigma(r_j) \cup \sigma(T)\Big) \subseteq \sigma\left(\sum\lambda_k r_k\right) \setminus \sigma(T) = \varnothing,$$

что противоречит условию.

Вернемся к доказательству теоремы 6.1. Если $\mathfrak{T}$ – множество образующих идеала T, то легко проверить, что $\sigma(T) = \sigma(\mathfrak{T})$. Следовательно, $\sigma(I)$ – это объединение множеств кратчайших путей образующих r с наимеьшим $\ell_\sigma(r)$ идеала I. А множество $\sigma(JI + IJ)$ состоит из элементов вида $\alpha w, w\alpha$ где $\alpha \in Q_1$, и $w \in \sigma(I)$. Таким образом, для каждой алгебры из списка можно легко выписать множества $\sigma(r_\alpha)$ и

$\sigma(JI+IJ)$, проверить, что $\ell_\sigma(r_\alpha) \leqslant \ell_\sigma(JI+IJ)$ и что все эти множества не пересекаются, а, следовательно, выполнено условие леммы, и семейство $\pi\mathscr{R}$ линейно независимо.

`(DTI-3′b).` Очевидно, что $(\mathscr{R})+JI+IJ \subseteq I$. Таким образом, необходимо доказать включение $I \subseteq (\mathscr{R})+JI+IJ$. Эта задача сводится к тому, чтобы для каждого элемента t из образующих идеала I, не лежащих в $\mathscr{R}$, доказать, что $t \in (\mathscr{R})+JI+IJ$.

Доказывать это будем следующим образом. Предъявим для каждой алгебры несколько элементов $t_1,\dots,t_l \in I$, среди которых есть все образующие идеала I, не лежащие в семействе $\mathscr{R}$, соответствующем данной алгебре. После чего докажем, что они выражаются через себя по модулю идеала $(\mathscr{R})$ следующим образом $t_k = \sum a_i t_i b_i (\mathrm{mod}(\mathscr{R}))$, где $a_i \in J$ или $b_i \in J$ для каждого i. Из этого будет следовать, что $t_i \in (\mathscr{R})+J^n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, так как I – допустимый идеал, $t_i \in (\mathscr{R})+JI+IJ$.

Таким образом, предъявление этого набора $t_1,\dots,t_l$, и равенств $t_k = \sum a_i t_i b_i (\mathrm{mod}(\mathscr{R}))$ таких, что $a_i \in J$ или $b_i \in J$ для каждого i, завершает доказательство. Ниже предъявлены соответствующие равенства для каждой алгебры из списка, в которых элементы t_i подчеркнуты, и над каждым равенством $\mathrm{mod}(\mathscr{R})$ написано, из какого соотношения r_α оно следует.

$$\mathscr{Q}^k(a,b).$$

$$\begin{aligned}
&\underline{\alpha^4} \overset{r_\alpha}{=\!=} (\beta\alpha)^{k-1}\underline{\beta\alpha^2} + a\alpha\underline{\alpha^4}, && \underline{\beta^4} \overset{r_\beta}{=\!=} (\alpha\beta)^{k-1}\underline{\alpha\beta^2} + b\beta\underline{\beta^4},\\
&\underline{\beta\alpha^2} \overset{r_\alpha}{=\!=} \underline{\beta^2\alpha}\beta(\alpha\beta)^{k-2} + a\underline{\beta\alpha^2}\alpha, && \underline{\alpha\beta^2} \overset{r_\beta}{=\!=} \underline{\alpha^2\beta}\alpha(\beta\alpha)^{k-2} + b\underline{\alpha\beta^2}\beta,\\
&\underline{\beta^2\alpha} \overset{r_\beta}{=\!=} (\alpha\beta)^{k-2}\alpha\underline{\beta\alpha^2} + b\beta\underline{\beta^2\alpha}, && \underline{\alpha^2\beta} \overset{r_\alpha}{=\!=} (\beta\alpha)^{k-2}\beta\underline{\alpha\beta^2} + a\alpha\underline{\alpha^2\beta}.
\end{aligned}$$

$$\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c).$$

$$\begin{aligned}
&\underline{\alpha^2\beta} \overset{r_\alpha}{=\!=} (\beta\gamma\alpha)^{k-2}\beta\gamma\underline{\alpha\beta\gamma\beta} + c\alpha\underline{\alpha^2\beta}, && \underline{\alpha^4} \overset{r_\alpha}{=\!=} (\beta\gamma\alpha)^{k-1}\beta\underline{\gamma\alpha^2} + c\alpha\underline{\alpha^4},\\
&\underline{\alpha\beta\gamma\beta} \overset{r_\gamma}{=\!=} \underline{\alpha^2\beta}(\gamma\alpha\beta)^{k-1}, && \underline{\gamma\alpha^2} \overset{r_\alpha}{=\!=} \underline{\gamma\beta\gamma\alpha}\beta\gamma(\alpha\beta\gamma)^{k-2} + c\gamma\alpha\underline{\alpha^4},\\
& && \underline{\gamma\beta\gamma\alpha} \overset{r_\beta}{=\!=} (\gamma\alpha\beta)^{k-1}\underline{\gamma\alpha^2}.
\end{aligned}$$

$$\mathscr{Q}^{k,s}(2\mathscr{B})_1(a,c).$$

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha^2\beta} &\xlongequal{r_\alpha} a(\beta\gamma\alpha)^{k-1}\beta\gamma\beta + c\alpha^3\beta \xlongequal{r_\eta} a(\beta\gamma\alpha)^{k-1}\beta\eta^s + c\alpha^3\beta\\
&\xlongequal{r_\gamma} a(\beta\gamma\alpha)^{k-1}(\alpha\beta\gamma)^{k-1}\alpha\beta\eta^{s-1} + c\alpha^3\beta\\
&\xlongequal{r_\gamma} a(\beta\gamma\alpha)^{k-1}(\alpha\beta\gamma)^{k-1}\underline{\alpha^2\beta}(\gamma\alpha\beta)^{k-1}\eta^{s-2} + c\alpha\underline{\alpha^2\beta},\\
\underline{\alpha^4} &\xlongequal{r_\alpha} a\underline{\alpha^2\beta}\gamma(\alpha\beta\gamma)^{k-1} + c\alpha\underline{\alpha^4}.
\end{aligned}$$

$$\mathscr{Q}^{s}(2\mathscr{B})_2(a,c,p).$$

Пусть $p(t) = 1 - t\cdot q(t), q_1(t) = q(t) - at^{s-4} - ct^{s-3}$.

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha^{s+1}} &\xlongequal{r_\alpha} \underline{\alpha^{s-1}\beta}\gamma + \underline{\alpha^{s+1}}\alpha q(\alpha),\\
\underline{\eta^{s+1}} &\xlongequal{r_\eta} \eta^{s+1}\eta q_1(\eta) + \eta^{s-1}\gamma\beta\\
&\xlongequal{r_\beta} \underline{\eta^{s+1}}\eta q_1(\eta) + \gamma\underline{\alpha^{s-1}\beta},\\
\underline{\alpha^{s-1}\beta} &\xlongequal{r_\gamma} \beta\eta^{s-1} \xlongequal{r_\eta} -a^{-1}\beta\eta^2 p(\eta) - a^{-1}c\beta\eta^s + a^{-1}\beta\gamma\beta\\
&\xlongequal{r_\alpha} -a^{-1}\beta\eta^2 p(\eta) - a^{-1}c\beta\eta^s + a^{-1}\alpha^2 p(\alpha)\beta\\
&\xlongequal{r_\gamma} -a^{-1}c\beta\eta^s \xlongequal{r_\gamma} -a^{-1}c\alpha\underline{\alpha^{s-1}\beta},\\
\underline{\gamma\alpha^{s-1}} &\xlongequal{r_\beta} \eta^{s-1}\gamma \xlongequal{r_\eta} -a^{-1}\eta^2 p(\eta)\gamma - a^{-1}c\eta^s\gamma + a^{-1}\gamma\beta\gamma\\
&\xlongequal{r_\alpha} -a^{-1}\eta^2 p(\eta)\gamma - -a^{-1}c\eta^s\gamma + a^{-1}\gamma\alpha^2 p(\alpha)\\
&\xlongequal{r_\beta} -a^{-1}c\eta^s\gamma \xlongequal{r_\beta} -a^{-1}c\underline{\gamma\alpha^{s-1}}\alpha.
\end{aligned}$$

$$\mathscr{Q}^{t}(2\mathscr{B})_3(a,c,d), t=3, a\neq 1.$$

Рассмотрим равенства по модулю идеала $(\mathscr{R})$.

$$\gamma\alpha^2 \xlongequal{r_\alpha} \gamma\beta\gamma + c\gamma\alpha^3 \xlongequal{r_\eta} a\eta^2\gamma + d\eta^3\gamma + c\gamma\alpha^3 \xlongequal{r_\beta} a\gamma\alpha^2 + (d+c)\gamma\alpha^3,$$
$$\alpha^2\beta \xlongequal{r_\alpha} \beta\gamma\beta + c\alpha^3\beta \xlongequal{r_\eta} a\beta\eta^2 + d\beta\eta^3 + c\alpha^3\beta \xlongequal{r_\gamma} a\alpha^2\beta + (d+c)\alpha^3\beta.$$

Из них следуют первые два равенства по модулю $(\mathscr{R})$ в следующем списке.

$\underline{\gamma\alpha^2} = \frac{d+c}{1-a} \cdot \underline{\gamma\alpha^2}\alpha$, $\underline{\alpha^2\beta} = \frac{d+c}{1-a} \cdot \alpha\underline{\alpha^2\beta}$, $\underline{\alpha^4} \xlongequal{r_\alpha} \beta\underline{\gamma\alpha^2} + c\underline{\alpha^4}\alpha$,
$\underline{\eta^4} \xlongequal{r_\eta} a^{-1}\gamma\beta\eta^2 - a^{-1}d\eta^5 \xlongequal{r_\gamma} a^{-1}\gamma\underline{\alpha^2\beta} - a^{-1}d\underline{\eta^4}\eta$.

$$\mathscr{Q}^t(2\mathscr{B})_3(a,c,d), t \geqslant 4, a = 1.$$

$\underline{\gamma\alpha^2} \xlongequal{r_\alpha} \gamma\beta\gamma+c\gamma\alpha^3 \xlongequal{r_\eta} \eta^{t-1}\gamma+d\eta^t\gamma+c\gamma\alpha^3 \xlongequal{r_\beta} \underline{\gamma\alpha^2}(\alpha^{t-3}+d\alpha^{t-2}+c\alpha)$,
$\underline{\alpha^2\beta} \xlongequal{r_\alpha} \beta\gamma\beta+c\alpha^3\beta \xlongequal{r_\eta} \beta\eta^{t-1}+d\beta\eta^t+c\alpha^3\beta \xlongequal{r_\gamma} (\alpha^{t-3}+d\alpha^{t-2}+c\alpha)\underline{\alpha^2\beta}$,
$\underline{\alpha^4} \xlongequal{r_\alpha} \beta\underline{\gamma\alpha^2} + c\underline{\alpha^4}\alpha$,
$\underline{\eta^{t+1}} \xlongequal{r_\eta} \gamma\beta\eta^2 - d\eta^{t+2} \xlongequal{r_\gamma} \gamma\underline{\alpha^2\beta} - d\underline{\eta^{t+1}}\eta$.

$$\mathscr{Q}^{a,b}(3\mathscr{A})_1(d), a = b = 2, d \neq 1.$$

Рассмотрим равенства по модулю $(\mathscr{R})$.

$\beta\delta\eta\delta \xlongequal{r_\alpha} \beta\gamma\beta\delta \xlongequal{r_\eta} d\beta\delta\eta\delta$, $\eta\gamma\beta\gamma \xlongequal{r_\delta} d\eta\delta\eta\gamma \xlongequal{r_\beta} d\eta\gamma\beta\gamma$.

Из них следуют равенства по модулю $(\mathscr{R})$ в следующем списке.

$\underline{\beta\delta\eta\delta} = 0$, $\underline{\eta\gamma\beta\gamma} = 0$.

$$\mathscr{Q}^{a,b}(3\mathscr{A})_1(d), a \geqslant b \geqslant 3, d = 1.$$

$\underline{\beta\delta\eta\delta} \xlongequal{r_\alpha} (\beta\gamma)^{a-2}\beta\gamma\beta\delta \xlongequal{r_\eta} (\beta\gamma)^{a-2}\underline{\beta\delta\eta\delta}(\eta\delta)^{b-2}$,
$\underline{\eta\gamma\beta\gamma} \xlongequal{r_\delta} (\eta\delta)^{b-2}\eta\delta\eta\gamma \xlongequal{r_\beta} (\eta\delta)^{b-2}\underline{\eta\gamma\beta\gamma}(\beta\gamma)^{a-2}$.

$$\mathscr{Q}^k(3\mathscr{A})_2.$$

$\underline{\beta\gamma\beta\delta} \xlongequal{r_\gamma} (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\beta\delta\eta\delta \xlongequal{r_\eta} (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\underline{\beta\gamma\beta\delta}(\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}$,
$\underline{\eta\delta\eta\gamma} \xlongequal{r_\delta} (\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}\eta\gamma\beta\gamma \xlongequal{r_\beta} (\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}\underline{\eta\delta\eta\gamma}(\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}$.

$$\mathscr{Q}^{k,s}(3\mathscr{B}).$$

$\underline{\alpha^2\beta} \xlongequal{r_\gamma} \alpha\beta\delta\eta(\gamma\beta\delta\eta)^{k-1} \xlongequal{r_\gamma} (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\underline{\beta\delta\eta\delta}\eta(\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}$,
$\underline{\beta\delta\eta\delta} \xlongequal{r_\eta} \beta\gamma\beta\delta(\eta\gamma\beta\delta)^{k-1} \xlongequal{r_\alpha} \alpha^{s-3}\underline{\alpha^2\beta}\delta(\eta\gamma\beta\delta)^{k-1}$.

$$\mathscr{Q}^{k,s}(3\mathscr{C}).$$

Рассмотрим равенство по модулю $(\mathscr{R})$.

$$\beta\gamma\beta \xlongequal{r_\rho} \beta\delta\eta - \beta\rho^{s-1} \xlongequal{r_\gamma} \beta\delta\eta.$$

Из него по индукции выводится, что $\beta(\gamma\beta)^i = \beta(\delta\eta)^i$ по модулю $(\mathscr{R})$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Из него, в свою очередь, следует первое равенство по модулю $(\mathscr{R})$ в следующем списке.

$$\begin{aligned}
\underline{\beta(\gamma\beta)^{k-1}\delta} &= \beta(\delta\eta)^{k-1}\delta \xlongequal{r_\eta} \beta\rho\delta \xlongequal{r_\gamma} 0,\\
\underline{(\eta\delta)^{k-1}\eta\gamma} &\xlongequal{r_\delta} \eta\rho\gamma \xlongequal{r_\beta} 0,\\
\underline{\eta\rho^2} &\xlongequal{r_\delta} (\eta\delta)^{k-2}\eta\delta\eta\rho \xlongequal{r_\rho} (\eta\delta)^{k-2}\eta\gamma\beta\rho + (\eta\delta)^{k-2}\eta\rho^s\\
&\xlongequal{r_\beta} (\eta\delta)^{k-2}\underline{\eta\rho^2}\rho^{s-2},\\
\underline{\rho^2\delta} &\xlongequal{r_\eta} \rho\delta\eta\delta(\eta\delta)^{k-2} \xlongequal{r_\rho} \rho\gamma\beta\delta(\eta\delta)^{k-2} + \rho^s(\eta\delta)^{k-2}\\
&\xlongequal{r_\beta} \rho^{s-2}\underline{\rho^2\delta}(\eta\delta)^{k-2}.
\end{aligned}$$

$$\mathscr{Q}^{k,s,t}(3\mathscr{D}).$$

$$\begin{aligned}
\underline{\alpha^2\beta} &\xlongequal{r_\gamma} \alpha\beta\delta\eta(\gamma\beta\delta\eta)^{k-1} \xlongequal{r_\gamma} (\beta\delta\eta\gamma)^{k-1}\beta\underline{\delta\eta\delta}\eta(\gamma\beta\delta\eta)^{k-1},\\
\underline{\delta\eta\delta} &\xlongequal{r_\xi} \delta\xi^{t-1} \xlongequal{r_\eta} (\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\gamma\beta\delta\xi^{t-2}\\
&\xlongequal{r_\eta} (\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\underline{\gamma\beta\gamma}\beta(\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\xi^{t-3},\\
\underline{\gamma\beta\gamma} &\xlongequal{r_\alpha} \gamma\alpha^{s-1} \xlongequal{r_\beta} (\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\delta\eta\gamma\alpha^{s-2}\\
&\xlongequal{r_\beta} (\delta\eta\gamma\beta)^{k-1}\underline{\delta\eta\delta}\eta(\gamma\beta\delta\eta)^{k-1}\alpha^{s-3}.
\end{aligned}$$

$$\mathscr{Q}^{a,b,c}(3\mathscr{K}).$$

$$\begin{aligned}
\underline{\gamma\beta\delta} &\xlongequal{r_\lambda} \gamma(\kappa\lambda)^{a-1}\kappa \xlongequal{r_\eta} (\delta\eta)^{c-2}\delta\underline{\eta\delta\lambda}\kappa(\lambda\kappa)^{a-2},\\
\underline{\eta\delta\lambda} &\xlongequal{r_\beta} \eta(\gamma\beta)^{b-1}\gamma \xlongequal{r_\kappa} (\lambda\kappa)^{a-2}\lambda\underline{\kappa\lambda\beta}\gamma(\beta\gamma)^{b-2},\\
\underline{\kappa\lambda\beta} &\xlongequal{r_\delta} \kappa(\eta\delta)^{c-1}\eta \xlongequal{r_\gamma} (\beta\gamma)^{b-2}\beta\underline{\gamma\beta\delta}\eta(\delta\eta)^{c-2},\\
\underline{\delta\eta\gamma} &\xlongequal{r_\kappa} \delta(\lambda\kappa)^{a-1}\lambda \xlongequal{r_\beta} (\gamma\beta)^{b-2}\gamma\underline{\beta\gamma\kappa}\lambda(\kappa\lambda)^{a-2},
\end{aligned}$$

$$\underline{\beta\gamma\kappa} \xlongequal{r_\eta} \beta(\delta\eta)^{c-1}\delta \xlongequal{r_\lambda} (\kappa\lambda)^{a-2}\kappa\underline{\lambda\kappa\eta}\delta(\eta\delta)^{c-2},$$
$$\underline{\lambda\kappa\eta} \xlongequal{r_\gamma} \lambda(\beta\gamma)^{b-1}\beta \xlongequal{r_\delta} (\eta\delta)^{c-2}\eta\underline{\delta\eta\gamma}\beta(\gamma\beta)^{b-2}.$$

□

7. Еще один пример алгебры, допускающей DTI-семейство соотношений.

Этот пункт посвящен тому, чтобы привести еще один простой пример алгебры, допускающей DTI-семейство соотношений. Этот пример показывает, что класс алгебр, допускающих DTI-семейство соотношений, не сводится к объединению классов, описанных в предыдущих двух пунктах.

Рассмотрим алгебру $A = \mathbf{k}Q/I$, порожденную следующим колчаном и соотношениями. Сразу введем обозначения для соответствующих соотношений $r_a, a \in Q_1$.

$$Q: \begin{tikzcd} 0 \arrow[loop left, "\alpha"] \arrow[r, shift left, "\beta"] & 1 \arrow[l, shift left, "\gamma"] \end{tikzcd} \qquad I: \begin{array}{l} r_\alpha = \beta\gamma - \alpha^2, \\ r_\beta = \gamma\alpha, \\ r_\gamma = \alpha\beta. \end{array}$$

Предложение 7.1.

- *Идеал I допустим.*
- *$A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра.*
- *Семейство $\mathscr{R} = \{r_a\}_{a\in Q_1}$ является DTI-семейством соотношений для алгебры A.*
- *Алгебра A не Морита-эквивалентна ни одной из алгебр, упомянутых в двух предыдущих пунктах.*

Доказательство. Для того, чтобы доказать, что идеал I допустим, докажем, что любой путь длины три лежит в I. Все пути длины три, кроме путей $\alpha^3, \beta\gamma\beta, \gamma\beta\gamma$, содержат подпути вида $\gamma\alpha, \alpha\beta$, значит достаточно доказать, что $\alpha^3, \beta\gamma\beta, \gamma\beta\gamma \in I$. Это вытекает из следующих равенств, выполняющихся по модулю I :

$$\alpha^3 = \alpha\beta\gamma = 0, \quad \beta\gamma\beta = \alpha^2\beta = 0, \quad \gamma\beta\gamma = \gamma\alpha^2 = 0.$$

Таким образом, $J^3 \subseteq I \subseteq J^2$. Следовательно, идеал I допустим, и алгебра A конечномерна.

Легко видеть, что следующие наборы векторов образуют базис соответствующих проективных неразложимых модулей:

$$e_0A = \langle e_0, \alpha, \beta, \alpha^2 \rangle, \quad e_1A = \langle e_1, \gamma, \gamma\beta \rangle. \tag{7.1}$$

Цоколи проективных неразложимых модулей одномерны:

$$\mathrm{soc}(e_0A) = \langle \alpha^2 \rangle, \quad \mathrm{soc}(e_1A) = \langle \gamma\beta \rangle.$$

Следовательно, алгебра A самоинъективна.

Докажем, что семейство $\mathscr{R} = \{r_a\}_{a \in Q_1}$ является DTI-семейством соотношений. Свойство (DTI-1) очевидно, свойство (DTI-2) проверяется простым вычислением, а свойство (DTI-3′b) выполняется, так как $\mathscr{R}$ порождает I. Осталось проверить свойство (DTI-3′a). По замечанию 3.4 его доказательство сводится к проверке того, что $r_a \notin JI + IJ$ для всех $a \in Q_1$. Но это очевидно, так как кратчайшие пути элементов $JI + IJ$ имеют длину не меньше трех, а кратчайшие пути соотношений r_a имеют длину равную двум.

Заметим, что если две базисные алгебры Морита-эквивалентны, то они изоморфны. Кроме того, если две алгебры путей колчана с соотношениями изоморфны, то их колчаны совпадают. Поэтому среди алгебр, упомянутых в предыдущих двух пунктах, алгебра A могла бы быть изоморфна только алгебре $\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c)$. Докажем, что они не изоморфны, сравнив их матрицы Картана. Матрица Картана алгебры A вычисляется благодаря тому, что мы явно знаем базисы проективных неразложимых модулей (7.1):

$$\mathrm{CartanMatrix}(A) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

А матрица Картана алгебры $\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c)$ выписана в таблице [7, сс. 303–306]:

$$\mathrm{CartanMatrix}(\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c)) = \begin{pmatrix} 4k & 2k \\ 2k & k+2 \end{pmatrix}.$$

Ясно, что определитель матрица Картана алгебры $\mathscr{Q}^k(2\mathscr{A})(c)$ – четное число для любого k, а определитель матрицы Картана алгебры A равен 5. Следовательно, эти алгебры не изоморфны. □

8. Резольвента самоинъективной алгебры с DTI-семейством соотношений.

Целью этого пункта является явное предъявление минимальной проективной резольвенты бимодуля A для самоинъективных алгебр путей колчана с соотношениями с DTI-семейством соотношений. Для того, чтобы это сделать, нам потребуется некоторый инструмент, связанный с понятием фробениусовой алгебры и дополнительными структурами, на ней возникающими, а именно, автоморфизмом Накаямы и структурой коалгебры на A.

8.1. Фробениусовость. Пусть A – фробениусова $\mathbf{k}$-алгебра, ε – фробениусова форма на ней и $\widetilde{\nu}$ – соответствующий автоморфизм Накаямы. Кроме автоморфизма Накаямы, с фробениусовой формой можно связать еще одну дополнительную структуру – структуру коалгебры. Рассмотрим некоторый базис $\mathcal{B}$ алгебры A, возьмем двойственный базис $\mathcal{B}^* = \{b^* \mid b \in \mathcal{B}\}$ относительно билинейной формы $\varepsilon\mu$, то есть такой, что $\varepsilon(b \cdot c^*) = \delta_{b,c}$ для всех $b, c \in \mathcal{B}$. Тогда рассмотрим элемент

$$\varrho_1 = \sum_{b \in \mathcal{B}} b^* \otimes b \in A \otimes A.$$

В [10, предложение 2.3.22] доказывается, что если A – фробениусова алгебра с фробениусовой формой $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$, то существует единственный гомоморфизм бимодулей

$$\varrho : A \to A \otimes A$$

такой, что $(A, \varrho, \varepsilon)$ является коалгеброй. Причем задается он по формуле $\varrho(a) = a\varrho_1$. В частности, из этого вытекает, что ϱ_1 не зависит от выбора базиса $\mathcal{B}$. Коумножение ϱ назовем фробениусовым коумножением, соответствующим фробениусовой форме ε.

В дальнейшем нам потребуются некоторые технические утверждения, касающиеся этих структур. Напомним, что внутренняя структура бимодуля на пространстве $A \otimes A$ обозначается следующим образом.

$$a \star (x \otimes y) \star b = xb \otimes ay.$$

Лемма 8.1. *Справедливы следующие равенства:*

(1) $\mathrm{tw}(\varrho_1) = (\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu})(\varrho_1)$;
(2) $a\varrho_1 = \varrho_1 a$ *для любого* $a \in A$;
(3) $a \star \varrho_1 = \varrho_1 \star \widetilde{\nu}(a)$ *для любого* $a \in A$.

Доказательство.

(1) Пусть $\mathcal{B}$ – произвольный базис алгебры A. Рассмотрим двойственный к нему базис $\mathcal{B}^* = \{b^* \mid b \in \mathcal{B}\}$, то есть такой, что $\varepsilon(bc^*) = \delta_{b,c}$ для $b, c \in \mathcal{B}$, и двойственный к двойственному базису $\mathcal{B}^{**} = \{b^{**} \mid b \in \mathcal{B}\}$, то есть такой, что $\varepsilon(b^* c^{**}) = \delta_{b,c}$ для всех $b, c \in \mathcal{B}$. Заметим, что $\varepsilon(c^* \widetilde{\nu}(b)) = \varepsilon(bc^*) = \delta_{b,c} = \varepsilon(c^* b^{**})$. Следовательно, в силу невырожденности $\varepsilon\mu$, получаем $\widetilde{\nu}(b) = b^{**}$. Откуда вытекает, что $\mathrm{tw}(\varrho_1) = \sum b^* \otimes b^{**} = \sum b^* \otimes \widetilde{\nu}(b) = (id \otimes \widetilde{\nu})(\varrho_1)$.

(2) Это доказано в [10].

(3) Используя предыдущие пункты, получаем

$$a \cdot \mathrm{tw}(\varrho_1) = a((\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu})(\varrho_1)) = (\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu})(a\varrho_1) =$$

$$= (\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu})(\varrho_1 a) = ((\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu})(\varrho_1))\widetilde{\nu}(a) = \mathrm{tw}(\varrho_1) \cdot \widetilde{\nu}(a).$$

Применяя к полученному равенству $a \cdot \mathrm{tw}(\varrho_1) = \mathrm{tw}(\varrho_1) \cdot \widetilde{\nu}(a)$, отображение tw, получаем

$$a \star \varrho_1 = \mathrm{tw}(a \cdot \mathrm{tw}(\varrho_1)) = \mathrm{tw}(\mathrm{tw}(\varrho_1) \cdot \widetilde{\nu}(a)) = \varrho_1 \star \widetilde{\nu}(a).$$

□

8.2. Фробениусовость в случае самоинъективной алгебры путей колчана с соотношениями. Хорошо известно, что самоиньективная алгебра путей колчана с соотношениями фробениусова. Это следует, например, из [11, определение 13.2.2, определение 13.5.4, теорема 13.5.7]. Но фробениусовых форм на алгебре может быть много. В этом пункте мы определим понятие Q_0-фробениусовой формы на самоинъективной алгебре путей колчана Q с соотношениями. Это фробениусова форма, обладающая некоторым дополнительным свойством. Мы докажем, что такая форма всегда существует и что автоморфизм Накаямы $\widetilde{\nu}$ и коумножение ϱ, соответствующие ей, обладают некоторыми дополнительными свойствами.

Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями, тогда обратный функтор Накаямы ν^{-1} задает перестановку на простых модулях, а, следовательно, и на вершинах колчана

$$\nu_0 : Q_0 \to Q_0,$$

$$\nu^{-1}(S_i) \cong S_{\nu_0(i)},$$

которую мы будем называть перестановкой Накаямы. Рассмотрим некоторую фробениусову форму $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ и соответствующий ей автоморфизм Накаямы $\widetilde{\nu} : A \to A$. Так как $\mathbf{k}Q_0 \cong A/J_A$, и $\widetilde{\nu}(J_A) = J_A$, то автоморфизм Накаямы индуцирует автоморфизм на $\mathbf{k}Q_0$ и, следовательно, $\widetilde{\nu}(e_i) = e_j + r$ для некоторых $j \in Q_0$ и $r \in J_A$. Учитывая то, что $\nu^{-1}(S_i) \cong (S_i)_{\widetilde{\nu}^{-1}} \cong S_{\nu_0(i)}$, получаем, что $\widetilde{\nu}(e_i)$ действует на $S_{\nu_0(i)}$ тождественно, а, следовательно,

$$\widetilde{\nu}(e_i) = e_{\nu_0(i)} + r.$$

Известно [11, теорема 13.4.2], что для фробениусовых алгебр

$$\mathrm{soc}_A(A) = \mathrm{soc}_{A^{\mathrm{op}}}(A) = \mathrm{soc}_{A^e}(A);$$

модули $\mathrm{soc}_A(e_iA), \mathrm{soc}_{A^{\mathrm{op}}}(Ae_i)$ просты, то есть в случае алгебр путей колчана с соотношениями одномерны; $\mathrm{soc}_A(e_iA) = \mathrm{soc}_{A^{\mathrm{op}}}(Ae_j)$ для некоторого j; и легко проверить, что в этой формуле $j = \nu_0(i)$, то есть $\mathrm{soc}_A(e_iA) = \mathrm{soc}_{A^{\mathrm{op}}}(Ae_{\nu_0(i)})$.

Для краткости положим $\mathrm{soc}(A) := \mathrm{soc}_A(A)$.

Замечание 8.2. Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями. Линейное отображение $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ тогда и только тогда является фробениусовой формой, когда $\varepsilon|_{\mathrm{soc}(e_iA)} \neq 0$ для любого $i \in Q_0$.

Алгебра $\mathbf{k}Q_0$ – сепарабельна, следовательно, в любом $\mathbf{k}Q_0$-бимодуле любой его подбимодуль является прямым слагаемым. В частности, алгебру A можно рассмотреть, как $\mathbf{k}Q_0$-бимодуль, а $\mathrm{soc}(A)$ как $\mathbf{k}Q_0$-подбимодуль и, следовательно, существует $\mathbf{k}Q_0$-бимодульное дополнение $\mathrm{soc}(A)$ в A. То есть такой $\mathbf{k}Q_0$-подбимодуль $T \leqslant A$, что $A = \mathrm{soc}(A) \oplus T$.

Определение 8.3. Фробениусову форму $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ назовем Q_0-фробениусовой формой, если $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$ содержит некоторое $\mathbf{k}Q_0$-бимодульное дополнение $\mathrm{soc}(A)$ в A.

Легко видеть, что на самоинъективной алгебре $A = \mathbf{k}Q/I$ Q_0-фробениусова форма всегда существует. Достаточно взять некоторое $\mathbf{k}Q_0$-бимодульное дополнение к $\mathrm{soc}(A)$ в A и задать на нем ε равным нулю, а на $\mathrm{soc}(A)$ задать так, чтобы $\varepsilon|_{\mathrm{soc}(e_iA)} \neq 0$ для любого $i \in Q_0$.

Предложение 8.4. *Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями, $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$ – Q_0-фробениусова форма на A, $\widetilde{\nu} : A \to A$ – соответствующий автоморфизм Накаямы, и*

$\varrho : A \to A \otimes A$ – *соответствующее фробениусово коумножение. Тогда* $\widetilde{\nu}(e_i) = e_{\nu_0(i)}$, *и* $\mathrm{Im}(\varrho) \leqslant \bigoplus_{i \in Q_0} P_{\nu_0(i),i}$, *причем*

$$\varrho' : A \to \bigoplus_{i \in Q_0} P_{\nu_0(i),i},$$

где $\varrho'(a) = \varrho(a)$, – *это инъективная оболочка бимодуля* A.

Доказательство. Мы уже знаем, что $\widetilde{\nu}(e_i) = e_{\nu_0(i)} + r$, где $r \in J_A$. Докажем, что $r = 0$. Предположим обратное, пусть $r \neq 0$. Тогда из невырожденности билинейной формы $\varepsilon\mu$ следует, что существует $a \in A$ такой, что $\varepsilon(ar) \neq 0$. Рассмотрим $T \leqslant A$ – некоторое $\mathbf{k}Q_0$-бимодульное дополнение $\mathrm{soc}(A)$, содержащееся в $\mathrm{Ker}(\varepsilon)$. Тогда a можно представить в виде $a = t+s$, где $t \in T$, $s \in \mathrm{soc}(A)$. Так как $r \in J_A$, то $sr = 0$, следовательно, $\varepsilon(tr) = \varepsilon(ar) \neq 0$. Кроме того, $te_{\nu_0(i)} \in T$, значит $\varepsilon(te_{\nu_0(i)}) = 0$. Откуда получаем $0 \neq \varepsilon(tr) = \varepsilon(t\widetilde{\nu}(e_i)) = \varepsilon(e_i t)$, что приводит нас к противоречию, так как $e_i t \in T$. Таким образом, $\widetilde{\nu}(e_i) = e_{\nu_0(i)}$.

Теперь докажем, что $\mathrm{Im}(\varrho) \leqslant \bigoplus P_{\nu_0(i),i}$. Для этого достаточно доказать, что $\varrho_1 \in \bigoplus P_{\nu_0(i),i}$. Но это является следствием леммы 8.1, так как $e_i \star \varrho_1 = \varrho_1 \star e_{\nu_0(i)}$.

Морфизм коумножения в коалгебре с коединицей всегда является мономорфизмом, следовательно, $\varrho' : A \to \bigoplus P_{\nu_0(i),i}$ – мономорфизм в инъективный бимодуль. Причем размерности цоколей у обоих бимодулей совпадают и равны $|Q_0|$, следовательно, ϱ' индуцирует изоморфизм цоколей, а, следовательно, является инъективной оболочкой. $\square$

Замечание 8.5. В последнем предложении мы считали, что

$$\bigoplus P_{\nu_0(i),i} \leqslant A,$$

то есть воспринимали $\bigoplus P_{\nu_0(i),i}$ как внутреннюю прямую сумму в A. Иногда, нам будет полезно воспринимать $\bigoplus P_{\nu_0(i),i}$ как внешнюю прямую сумму, то есть записывать ее элементы в виде столбцов. Тогда отображение $\varrho' : A \to \bigoplus P_{\nu_0(i),i}$ запишется в виде

$$\varrho' = (\varrho'_i)_{i \in Q_0}, \text{ где } \varrho'_i(a) = a(e_i \star \varrho_1).$$

8.3. Резольвента. Целью этого пункта является явное предъявление резольвенты для самоинъективных алгебр, допускающих DTI-семейство соотношений.

Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра путей колчана с соотношениями, и $\{r_\alpha\}_{\alpha \in Q_1}$ – DTI-семейство ее соотношений, $\varepsilon : A \to \mathbf{k}$

– Q_0-фробениусова форма на A, $\widetilde{\nu} : A \to A$ – соответствующий автоморфизм Накаямы, $\varrho : A \to A \otimes A$ – соответствующее фробениусово коумножение, и $\varrho_1 = \varrho(1)$. Положим

$$\mathbf{P}_{4n} = \mathbf{P}_{3+4n} = \bigoplus_{i \in Q_0} P_{i,\nu_0^n(i)},$$

$$\mathbf{P}_{1+4n} = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P_{s(\alpha),\nu_0^n(t(\alpha))},$$

$$\mathbf{P}_{2+4n} = \bigoplus_{\alpha \in Q_1} P_{t(\alpha),\nu_0^n(s(\alpha))},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{d}_{1+4n} &= ((\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu}^n)(d_{i,\alpha}))_{(i,\alpha) \in Q_0 \times Q_1},\\
d_{i,\alpha} &= \delta_{i,s(\alpha)}(e_{s(\alpha)} \otimes \alpha) - \delta_{i,t(\alpha)}(\alpha \otimes e_{t(\alpha)}),\\
\mathbf{d}_{2+4n} &= \left((\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu}^n)\left(\frac{\partial r_\beta}{\partial \alpha}\right)\right)_{(\alpha,\beta) \in Q_1 \times Q_1},\\
\mathbf{d}_{3+4n} &= ((\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu}^n)(\mathrm{tw}(d_{i,\beta})))_{(\beta,i) \in Q_1 \times Q_0},\\
\mathbf{d}_{4+4n} &= ((\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu}^{n+1})((e_i\varrho_1) \star e_j)_{(j,i) \in Q_0 \times Q_0},\\
m &= (m_i)^\top_{i \in Q_0},\ m_i(a \otimes b) = ab,
\end{aligned}$$

для $n \geqslant 0$, и $\mathbf{P}_n = 0$ при $n < 0$. Таким образом, возникает комплекс $\mathbf{P}_\bullet = (\mathbf{P}_n, \mathbf{d}_n : \mathbf{P}_n \to \mathbf{P}_{n-1})$ и гомоморфизм $m : \mathbf{P}_0 \to A$.

Теорема 8.6. *Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – самоинъективная алгебра, допускающая* DTI*-семейство соотношений. Тогда $m : \mathbf{P}_\bullet \to A$ – бимодульная резольвента.*

Для доказательства этой теоремы нам потребуются несколько вспомогательных определений и лемм.

Пусть $A = \mathbf{k}Q/I$ – алгебра путей колчана с соотношениями, а $\varphi, \psi : A \to A$ – два автоморфизма, для которых $\varphi(e_i) = e_{\varphi_0(i)}, \psi(e_i) = e_{\psi_0(i)}$, для некоторых перестановок $\varphi_0, \psi_0 : Q_0 \to Q_0$. Через $\mathcal{P}_0$, как и раньше, обозначим полную подкатегорию bimod-A, состоящую из бимодулей вида $\bigoplus P_{i_k,j_k}$, гомоморфизмы между которыми, как мы знаем, задаются матрицами. Тогда рассмотрим функтор

$$[\varphi \otimes \psi] : \mathcal{P}_0 \to \text{bimod-}A,$$

который действует следующим образом на объектах

$$[\varphi \otimes \psi]\Big(\bigoplus P_{i_k,j_k}\Big) = \bigoplus P_{\varphi_0(i_k),\psi_0(j_k)}$$

и следующим образом на морфизмах

$$[\varphi \otimes \psi](f_{i,j})_{ij} = ((\varphi \otimes \psi)(f_{ij}))_{i,j}.$$

Легко проверить, что это корректно определенный функтор.

С другой стороны, если $\varphi, \psi : A \to A$ – произвольные автоморфизмы, то можно рассмотреть функтор “подкручивания” на автоморфизмы

$${}_{\varphi}(-)_{\psi} : \text{bimod-}A \to \text{bimod-}A,$$

под действием которого подлежащее векторное пространство бимодуля остается тем же, но структура бимодуля меняется следующим образом: $a * m * b := \varphi(a)m\psi(b)$.

Лемма 8.7. *Если $\varphi, \psi : A \to A$ – два автоморфизма, для которых существуют перестановки $\varphi_0, \psi_0 : Q_0 \to Q_0$ такие, что $\varphi(e_i) = e_{\varphi_0(i)}, \psi(e_i) = e_{\psi_0(i)}$, то*

$${}_{\varphi}(-)_{\psi}|_{\mathcal{P}_0} \cong [\varphi^{-1} \otimes \psi^{-1}].$$

Доказательство. Достаточно определить изоморфизм функторов на неразложимых модулях, дальше он продолжается по аддитивности (с учетом того, что для каждого модуля выбрано каноническое разложение в прямую сумму). Тогда зададим гомоморфизм

$$\Xi_{P_{i,j}} : {}_{\varphi}\Big(P_{i,j}\Big)_{\psi} \to P_{\varphi_0^{-1}(i), \psi_0^{-1}(j)}$$

по формуле

$$\Xi_{P_{i,j}}(x \otimes y) = (\varphi^{-1}(x) \otimes \psi^{-1}(y)).$$

Легко видеть, что он корректно определен и биективен. Проверку того, что он является гомоморфизмом бимодулей и того, что набор отображений $(\Xi_P)_{P \in \mathcal{P}_0}$ образует морфизм функторов, оставляем читателю. $\square$

Лемма 8.8. *Существует такой изоморфизм бимодулей* $\theta : A_{\widetilde{\nu}^{-1}} \to A^{t^e}$, *что диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
A_{\widetilde{\nu}^{-1}} \arrow[rr, "(\varrho')_{\widetilde{\nu}^{-1}}"] \arrow[d, "\theta"', "\cong"] & & \left(\bigoplus_{i\in Q_0} P_{\nu_0(i),i}\right)_{\widetilde{\nu}^{-1}} \arrow[d, "\iota\circ\Xi"', "\cong"] \\
A^{t^e} \arrow[rr, "m'"] & & \bigoplus_{i\in Q_0} P_{i,i}
\end{tikzcd}$$

коммутативна, где $\iota : \bigoplus_{i\in Q_0} P_{\nu_0(i),\nu_0(i)} \to \bigoplus_{i\in Q_0} P_{i,i}$ – *изоморфизм, индуцированный перенумерацией* $\iota((x_i)_{i\in Q_0}) = (x_{\nu_0^{-1}(i)})_{i\in Q_0}$, *а* m' – *гомоморфизм из последовательности* (4.2).

Доказательство. Определим $\theta : A_{\widetilde{\nu}^{-1}} \to A^{t^e}$ по формуле

$$\theta(a)(b) = a \star (b\varrho_1).$$

Для корректности этого определения необходимо, чтобы $\theta(a)$ был гомоморфизмом бимодулей. Для этого достаточно доказать, что

$$b\big(\theta(a)(1)\big) = \theta(a)(b) = \big(\theta(a)(1)\big)b.$$

Это следует из леммы 8.1:

$$b(a\star\varrho_1) = a\star(b\varrho_1) = a\star(\varrho_1 b) = (a\star\varrho_1)b.$$

Докажем, что $\theta : A_{\widetilde{\nu}^{-1}} \to A^{t^e}$ – гомоморфизм бимодулей. Для этого достаточно доказать, что $\theta(a) = a\star\theta(1) = \theta(1)\star\widetilde{\nu}(a)$. Это также следует из леммы 8.1:

$$a\star(b\varrho_1) = b(a\star\varrho_1) = b(\varrho_1\star\widetilde{\nu}(a)) = (b\varrho_1)\star\widetilde{\nu}(a).$$

Из формулы (4.1) следует, что $A^{t^e} \cong \nu^{-1}(A)$, но для фробениусовых алгебр $\nu \cong (-)_{\widetilde{\nu}}$, следовательно, $A^{t^e} \cong A_{\widetilde{\nu}^{-1}}$.

Таким образом, чтобы доказать, что θ – изоморфизм, достаточно доказать, что он мономорфизм. Для этого докажем, что $\theta(a)(1) \neq 0$, для любого ненулевого $a \in A$. Воспользовавшись тем, что $\mathrm{tw}(\varrho_1) = (\mathrm{id}\otimes\widetilde{\nu})(\varrho_1)$, получаем

$$\begin{aligned}
\Big((\mathrm{id}\otimes\widetilde{\nu}^{-1})\circ\mathrm{tw}\Big)(\theta(a)(1)) &= \big((\mathrm{id}\otimes\widetilde{\nu}^{-1})\circ\mathrm{tw}\big)(a\star\varrho_1) \\
&= (\mathrm{id}\otimes\widetilde{\nu}^{-1})(a\cdot\mathrm{tw}(\varrho_1)) = a\cdot\Big((\mathrm{id}\otimes\widetilde{\nu}^{-1})(\mathrm{tw}(\varrho_1))\Big) = a\varrho_1 = \varrho(a).
\end{aligned}$$

Но мы знаем, что ϱ – мономорфизм, следовательно, $\theta(a)(1) \neq 0$.

Осталось доказать, что $m'\circ\theta = \iota\circ\Xi\circ(\varrho')_{\widetilde{\nu}^{-1}}$. Напомним, что $m' = \Theta\circ m^{t^e}$, где Θ – изоморфизм из предложения 2.1, и $m = (m_i)^\top : \bigoplus P_{i,i} \to A$ – гомоморфизм, индуцированный умножением $m_i(a \otimes b) = ab$, и $\Xi : (-)_{\widetilde{\nu}^{-1}}|_{\mathcal{P}_0} \to [\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu}]$ – изоморфизм из леммы 8.7. Чтобы проверить равенство этих двух гомоморфизмов, достаточно проверить, что они совпадают на $1 \in A_{\widetilde{\nu}^{-1}}$.

$$(m' \circ \theta)(1) = (\Theta \circ m^{t^e} \circ \theta)(1) = \left(\mathrm{tw}\Big(\big((m^{t^e} \circ \theta)(1)\big)(e_i \otimes e_i)\Big)\right)_{i \in Q_0}.$$

Причем

$$\big((m^{t^e} \circ \theta)(1)\big)(e_i \otimes e_i) = \theta(1)(m_i(e_i \otimes e_i)) = \theta(1)(e_i) = e_i\varrho_1.$$

Таким образом,

$$(m' \circ \theta)(1) = \big(\mathrm{tw}(e_i\varrho_1)\big)_{i\in Q_0} = \big(e_i \star \mathrm{tw}(\varrho_1)\big)_{i\in Q_0}.$$

С другой стороны

$$\begin{aligned}(\iota \circ \Xi \circ (\varrho')_{\widetilde{\nu}^{-1}})(1) &= (\iota \circ \Xi)\Big((\varrho'_i(1))_{i\in Q_0}\Big) = (\iota \circ \Xi)\Big((e_i \star \varrho_1)_{i\in Q_0}\Big) \\ &= \Big((\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu})(e_{\nu_0^{-1}(i)} \star \varrho_1)\Big)_{i\in Q_0} = \Big(e_i \star \big((\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu})(\varrho_1)\big)\Big)_{i\in Q_0}.\end{aligned}$$

Осталось заметить, что по лемме 8.1 $\mathrm{tw}(\varrho_1) = (\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu})(\varrho_1)$, следовательно, $m' \circ \theta = \iota \circ \Xi \circ (\varrho')_{\widetilde{\nu}^{-1}}$. $\square$

Доказательство теоремы 8.6. Ввиду леммы 8.8 последовательность (4.2) примет вид:

$$0 \longrightarrow A_{\widetilde{\nu}^{-1}} \xrightarrow{m'\circ\theta} \mathbf{P}_3 \xrightarrow{\mathbf{d}_3} \mathbf{P}_2 \xrightarrow{\mathbf{d}_2} \mathbf{P}_1 \xrightarrow{\mathbf{d}_1} \mathbf{P}_0 \xrightarrow{m} A \longrightarrow 0.$$

Применим к ней функтор $(-)_{\widetilde{\nu}^{-n}}$, и, воспользовавшись тем, что

$$(-)_{\widetilde{\nu}^{-n}}|_{\mathcal{P}_0} \cong [\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu}^n],$$

получим точную последовательность

$$\begin{aligned}0 \longrightarrow A_{\widetilde{\nu}^{-n-1}} \longrightarrow \mathbf{P}_{3+4n} &\xrightarrow{\mathbf{d}_{3+4n}} \mathbf{P}_{2+4n} \\ &\xrightarrow{\mathbf{d}_{2+4n}} \mathbf{P}_{1+4n} \xrightarrow{\mathbf{d}_{1+4n}} \mathbf{P}_{4n} \xrightarrow{m_{\widetilde{\nu}^{-1}}\circ\Xi^{-1}} A_{\widetilde{\nu}^{-n}} \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Умножив по Йонеде все эти точные последовательности, получим проективную резольвенту бимодуля A, члены которой совпадают с требуемыми. Обозначим дифференциалы полученного комплекса через $\mathbf{d}'_i$. Ясно, что $\mathbf{d}'_i = \mathbf{d}_i$, когда i не делится на 4. Докажем, что это верно для всех i, и тем самым докажем теорему.

Докажем, что $\mathbf{d}'_4 = \mathbf{d}_4$. Воспользовавшись леммой 8.8, и тем, что $\Xi : (-)_{\widetilde{\nu}^{-1}} \to [\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu}]$ является морфизмом функторов, получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{d}'_4 &= m' \circ \theta \circ m_{\widetilde{\nu}^{-1}} \circ \Xi^{-1} = \iota \circ \Xi \circ (\varrho')_{\nu^{-1}} \circ m_{\widetilde{\nu}^{-1}} \circ \Xi^{-1} \\ &= \iota \circ \Xi \circ (\varrho' \circ m)_{\widetilde{\nu}^{-1}} \Xi^{-1} = \iota \circ [\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu}](\varrho' \circ m).\end{aligned}$$

Легко видеть, что

$$\varrho' \circ m = (\varrho'_i)_{i \in Q_1} \circ (m_j)^{\top}_{j \in Q_1} = (\varrho'_i \circ m_j)_{(i,j)} = (e_i \star (e_j \varrho_1))_{(j,i)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\mathbf{d}'_4 &= \iota \circ [\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu}]\Big((e_j \star (e_i \varrho_1))_{(j,i)}\Big) = \Big((\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu})(e_{\nu_0^{-1}(j)} \star (e_i \varrho_1))\Big)_{(j,i)} \\ &= \Big((\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu})((e_i \varrho_1) \star e_j)\Big)_{(j,i)} = \mathbf{d}_4.\end{aligned}$$

Используя это, получаем, что и остальные дифференциалы совпадают:

$$\mathbf{d}'_{4+4n} = [\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu}^n](\mathbf{d}'_4) = [\mathrm{id} \otimes \widetilde{\nu}^n](\mathbf{d}_4) = \mathbf{d}_{4+4n}$$

для $n \geqslant 0$. □

Литература

1. А. И. Бондал, М. М. Капранов, *Представимые функторы, функторы Серра и перестройки.* — Изв. АН СССР. Сер. матем. **53**, No. 6 (1989), 1183–1205.
2. B. Keller, *Calabi–Yau triangulated categories.* — Trends in representation theory of algebras and related topics, A. Skowronski, editor, E.M.S., Zurich, 2008, 467–489.
3. D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras.* — London Math. Soc. Lecture Note Series, 119, Cambridge Univ. Press, 1988.
4. I. Reiten, M. van den Bergh, *Noetherian hereditary abelian categories satisfying Serre duality.* — J. Amer. Math. Soc. **15** (2002), 295–366.
5. M. Kontsevich, *Triangulated categories and geometry,* Course at the École Normale Supérieure, Paris, Notes taken by J. Bellaiche, J.-F. Dat, I. Marin, G. Racinet and H. Randriambololona, 1998.
6. K. Erdmann, A. Skowroński, *The stable Calabi–Yau dimension of tame symmetric algebras.* — J. Math. Soc. Japan **58** (2006), 97–123.
7. K. Erdmann, *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras.* Lecture Notes Math. **1428**, Springer, 1990.
8. P.M. Cohn, *Algebra*, Vol. 3 (Second Edition), Wiley, 1991.

9. M. C. R. Butler, A. D. King, *Minimal resolutions of algebras.* — J. Algebra **212** (1999), 323–362.
10. J. Kock, *Frobenius algebras and 2D topological quantum field theories.* London Mathematical Society Student Texts **59**, Cambridge University Press: Cambridge, 2004.
11. Ф. Каш, *Модули и кольца.* Мир, М., 1981.
12. С. О. Иванов, *Функторы Накаямы и теоремы Эйленберга–Уотса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 179–188.

Ivanov S. O. Selfinjective algebras of stable Calabi–Yau dimension three.

In the present paper, we introduce the class of algebras, which allows the so-called DTI-family of relations. With few exceptions, the stable Calabi–Yau dimension of these algebras is equal to 3. We prove that all algebras of quaternion type are contained in this class, and we give some other examples of such algebras. Furthermore, we describe minimal projective bimodule resolutions for algebras from this class.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: sepa_cmd@mail.ru

Поступило 8 сентября 2011 г.