Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 394, 2011 г.

Д. Ю. Елисеев, А. Н. Панов

КАСАТЕЛЬНЫЕ КОНУСЫ МНОГООБРАЗИЙ ШУБЕРТА ДЛЯ A_n МАЛОГО РАНГА

1. Основные гипотезы

Вычисление касательных конусов к многообразиям Шуберта в начальной точке является интересной и чрезвычайно трудной в общем случае задачей. Одна из причин состоит в том, что известные методы вычисления касательного конуса основаны на нахождении базиса Грёбнера в определяющем идеале многообразия Шуберта (точнее его аффинной части). Даже если ограничиться рассмотрением гладкого случая (когда касательный конус совпадает с касательным пространством) возникает интересная и нетривиальная теория (см. [1]).

В этой работе проведены вычисления касательных конусов для серии A_n, где $1 \leqslant n \leqslant 4$, сформулированы гипотезы о строении касательных конусов в общем случае. Описание касательных конусов важно для классификации коприсоединенных орбит максимальной унипотентной подгруппы (см. [2]), поскольку каждый касательный конус является инвариантным подмножеством относительно коприсоединенного проедставления.

Пусть G – полупростая K-разложимая алгебраическая группа над полем K характеристики нуль. Алгебра Ли $\mathfrak{g}$ группы G допускает разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$, где $\mathfrak{h}$ – подалгебра Картана, $\mathfrak{n}$ (соотв. $\mathfrak{n}_-$) – максимальная нильпотентная подалгебра, натянутая на корневые векторы с положительными (соотв. отрицательными) корнями. Обозначим $\mathfrak{b} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{b}_- = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$. Как обычно, H, N, N_-, B, B_- – соответствующие подгруппы в G. Произвольно выбранный представитель элемента w из группы Вейля $W = \mathrm{Norm}(H)/H$ будем обозначать $\dot{w}$. Используя форму Киллинга, отождествим $\mathfrak{n}_-$ с сопряженным пространством $\mathfrak{n}^*$ к $\mathfrak{n}$.

Ключевые слова: многообразие Шуберта, касательный конус, коприсоединенная орбита.

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 09-01-00058.

Группа G разбивается на классы Брюа $G = \bigcup_{w\in W} B\dot{w}B$. Как следствие, многообразие флагов $X = G/B$ разбивается на клетки Шуберта $X = \bigcup_{w\in W} X_w^0$, где $X_w^0 = B\dot{w}B \bmod B$, $w \in W$. Замыкание X_w клетки Шуберта X_w^0 называют многообразием Шуберта. Всякое многообразие Шуберта содержит начальную точку $p = B \bmod B$.

Обозначим через $\mathcal{O}$ аффинное открытое подмножество $N_-B \bmod B$ в многообразии флагов X. Множество $\mathcal{O}$ допускает естественную параметризацию $\exp(x)B \bmod B$, где $x \in \mathfrak{n}_-$ (для $\mathfrak{g} = A_n$ далее $(1+x)B \bmod B$, $x \in \mathfrak{n}_-$).

Подмножество $\mathcal{O}_w = \mathcal{O} \cap X_w$ открыто в X_w и замкнуто в $\mathcal{O}$. Начальная точка p содержится в $\mathcal{O}_w$ и имеет нулевые координаты при выбранной параметризации. Обозначим через C_w касательный конус к X_w в точке p (точнее, это касательный конус к $\mathcal{O}_w$ в нуле).

По определению, для замкнутого подмножества $M \subset K^n$, содержащего точку $(0,\ldots,0)$, касательный конус в нуле – это аннулятор идеала младших членов f_0, где f пробегает определяющий идеал $I = I(M)$ (см. [3, гл. II, §1] или [5, гл. 9, §7]).

Касательный конус C_w содержится в касательном пространстве $T_p(X)$ многообразия флагов X в точке p. Отождествим $T_p(X) = \mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ с $\mathfrak{n}_- = \mathfrak{n}^*$. Так как подгруппа B является стабилизатором точки p в группе G, то B естественно действует в $T_p(X) = \mathfrak{n}^*$. Это действие совпадает с коприсоединенным действием B на $\mathfrak{n}^*$. Всякий касательный конус C_w является Ad^*-инвариантным, замкнутым в топологии Зариского подмножеством в $\mathfrak{n}^*$. Сразу отметим, что касательные конусы могут совпадать для разных элементов $w \in W$. Например, касательные конусы для всех элементов Кокстера совпадают с $[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]^\perp$ (см. [2]).

Хорошо известно, что $\dim X_w = l(w)$. Поскольку размерность алгебраического многообразия совпадает с размерностью его касательного конуса (см. теорему 8 в [5, гл. 9, §7]), то $\dim C_w = l(w)$.

Авторами проделана работа по вычислению касательных конусов C_w для простых алгебр Ли серии A_n. Вторым автором была составлена компьютерная программа, позволяющая вычислять касательные конусы. Алгоритм вычисления касательных конусов изложен в следующем параграфе. В настоящую работу включены результаты вычислений для $n \leqslant 4$, полученные как вручную, так и с помощью компьютера. Вычисление касательных конусов для различных примеров приводит к формулировкам общих гипотез для любых полупростых алгебр Ли.

Гипотеза 1.1. Если $C_{w_1} = C_{w_2}$, то элементы w_1 и w_2 сопряжены в группе Вейля. Обратное утверждение неверно.

Гипотеза 1.2. $C_w = C_{w^{-1}}$.

Пусть $\mathfrak{g}_0$ – полупростая регулярная подалгебра в $\mathfrak{g}$ (регулярная подалгебра – подалгебра, инвариантная относительно присоединенного действия подгруппы Картана). Подалгебра $\mathfrak{g}_0$ допускает разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_{0,-} \oplus \mathfrak{h}_0 \oplus \mathfrak{n}_0$, где $\mathfrak{h}_0$, $\mathfrak{n}_{0,-}$, $\mathfrak{n}_0$ подалгебры в $\mathfrak{h}$, $\mathfrak{n}_-$, $\mathfrak{n}$ соответственно. Отождествим сопряженное пространство $\mathfrak{n}_0^*$ с подпространством $\mathfrak{n}^*$, состоящим из линейных форм аннулирующих, все корневые векторы из $\mathfrak{n} \setminus \mathfrak{n}_0$. Группа Вейля W_0 для $\mathfrak{g}_0$ является подгруппой в W. Для любого $w \in W_0$ определены как касательный конус $C_{w,0}$ в $\mathfrak{n}_0^*$, так и касательный конус C_w в $\mathfrak{n}^*$; причем, $C_{w,0} \subset C_w$.

Гипотеза 1.3. Для любого $w \in W_0$ замыкание $\mathrm{Ad}^* C_{w,0}$ является неприводимой компонентой в C_w.

Теорема 1.4. *Перечисленные выше гипотезы верны для всех алгебр Ли A_n для $n \leqslant 4$.*

Доказательство вытекает из Таблиц 1–4.

2. Алгоритм вычисления касательных конусов и результаты вычислений

Для любого корня γ обозначим: e_γ – корневой вектор, $x_\gamma(t) = \exp(te_\gamma)$, $N_\gamma = \{x_\gamma(t) : t \in K\}$, $N'_\gamma = \{x_\gamma(t) : t \in K^*\}$.

Замечание. Если $w = r_\alpha w'$, где α – простой корень, то

$$BwB = N_\alpha r_\alpha Bw'B \supset N'_\alpha r_\alpha Bw'B = N'_{-\alpha} Bw'B$$

(см. [4, §3, формулы R1–R8]). Подмножество $N'_{-\alpha} Bw'B$ плотно в BwB.

Для каждого $w \in W$ рассмотрим приведенное разложение

$$w = r_{\alpha_1} \ldots r_{\alpha_l},$$

где $l = l(w)$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ – простые корни. В силу Замечания выше, подмножество

$$N'_{-\alpha_1} \cdots N'_{-\alpha_l} B$$

плотно в классе Брюа BwB. Поэтому подмножество $\mathcal{O}_w$ является замыканием образа отображения $F : K^l \to \mathcal{O}$, где

$$F(t_1, \ldots, t_l) = x_{-\alpha_1}(t_1) \cdots x_{-\alpha_l}(t_l) \bmod B.$$

Теория исключения (см. [5, §3]) позволяет построить базис Грёбнера для определяющего идеала $\mathcal{I}_w$ множества $\mathcal{O}_w$. Далее, используя стандартную процедуру (см. предложение 4(i) главы 9, §7 и теорему 4 главы 8, §4 из книги [5]) можно построить базис Грёбнера идеала $\mathcal{I}_{w,0}$, аннулятор которого совпадает с касательным конусом C_w. Приведем пример вычисления касательного конуса по указанному алгоритму.

Пример. $\mathfrak{g} = A_3$, $w = (13)(24)$. Отождествим $\mathcal{O}$ с

$$N_- = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & 1 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{21} & 1 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Приведенному разложению $w = (23)(12)(34)(23)$ соответствует отображение $F : K^4 \to \mathcal{O}$, заданное формулами

$$x_{21} = t_2, \quad x_{31} = t_1 t_2, \quad x_{41} = 0$$

$$x_{32} = t_1 + t_4, \quad x_{42} = t_3 t_4, \quad x_{43} = t_3.$$

Исключая t_1, t_2, t_3, t_4, находим образующие $x_{41}, x_{43}x_{31} + x_{42}x_{21} - x_{43}x_{32}x_{21}$ в $I(\mathcal{O}_w)$. Заключаем, что касательный конус задается системой уравнений $x_{41} = 0$, $x_{43}x_{31} + x_{42}x_{21} = 0$.

Ниже приведены результаты вычислений касательных конусов для $\mathfrak{g} = A_n$, $1 \leqslant n \leqslant 4$.

Касательные конусы для A_2. Группа Вейля совпадает с S_3. Уравнения, определяющие касательные конусы в

$$\mathfrak{n}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 \end{pmatrix},$$

приведены в следующей таблице.

Таблица 1.

w	$C(w)$
(13)	$\mathfrak{n}^*$
(123),(132)	$x_{31} = 0$
(12)	$x_{31} = x_{32} = 0,$
(23)	$x_{31} = x_{21} = 0,$
e	$x_{31} = x_{32} = x_{21} = 0$

Касательные конусы для A_3. Группа Вейля совпадает с S_4. Введем обозначения

$$D = \begin{vmatrix} x_{31} & x_{32} \\ x_{41} & x_{42} \end{vmatrix}, \quad P = x_{43}x_{31} + x_{42}x_{21}.$$

Уравнения, определяющие касательные конусы в

$$\mathfrak{n}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 0 \end{pmatrix},$$

приведены в следующей таблице.

Таблица 2.

w	$C(w)$
(14)(23)	$\mathfrak{n}*$
(14)	$D = 0$
(1324), (1423)	$x_{41} = 0,$
(13)(24)	$x_{41} = 0,\ P = 0$
(134), (143)	$x_{41} = x_{42} = 0$
(13)	$x_{41} = x_{42} = x_{43} = 0$
(124), (142)	$x_{41} = x_{31} = 0$
(24)	$x_{41} = x_{31} = x_{21} = 0$
(1234), (1243), (1342), (1432)	$x_{41} = x_{31} = x_{42} = 0$
(234), (243)	$x_{41} = x_{31} = x_{21} = x_{42} = 0$
(12)(34)	$x_{41} = x_{31} = x_{42} = x_{32} = 0$
(123), (132)	$x_{41} = x_{31} = x_{42} = x_{43} = 0$
(12)	$x_{41} = x_{31} = x_{42} = x_{32} = x_{43} = 0$
(23)	$x_{41} = x_{31} = x_{21} = x_{42} = x_{43} = 0$
(34)	$x_{41} = x_{31} = x_{21} = x_{42} = x_{32} = 0$
e	$x_{41} = x_{31} = x_{21} = x_{42} = x_{32} = x_{43} = 0$

Касательные конусы для A_4. Группа Вейля совпадает с S_5. Уравнения, определяющие касательные конусы в

$$\mathfrak{n}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_{31} & x_{32} & 0 & 0 & 0 \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & 0 & 0 \\ x_{51} & x_{52} & x_{53} & x_{54} & 0 \end{pmatrix},$$

приведены в следующих таблицах 3 и 4.

Таблица 3.

w	$C(w)$
(13425), (15243)	$x_{51} = x_{41} = 0$
(14235), (15324)	$x_{52} = x_{51} = 0$
(14325), (15234)	$x_{51} = 0, x_{41}x_{52} = 0$
(12345), (15432), (12453), (12354), (13542), (15432), (12543), (13452), (14532), (13542)	$x_{31} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0$
(12435), (15342), (12534), (14352)	$x_{31} = x_{41} = x_{51} = 0 = x_{52} = 0$
(13245), (15423), (14523), (13254)	$x_{41} = x_{51} = x_{52} = 0 = x_{53} = 0$
(13524), (14253)	$x_{41} = x_{51} = x_{52} = 0, x_{31}x_{53} = 0$
(1425), (1524)	$x_{54} = 0$
(1325), (1523)	$x_{51} = x_{41} = 0, x_{53}x_{42} - x_{52}x_{43} = 0$
(1534), (1435)	$x_{51} = x_{52} = 0, x_{42}x_{31} - x_{41}x_{32} = 0$
(1324), (1423)	$x_{41} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
(2435), (2534)	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{51} = x_{52} = 0$
(1352), (1235), (1253), (1532)	$x_{31} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = 0$
(1245), (1254), (1542), (1452)	$x_{31} = x_{41} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0$
(1354), (1345), (1453), (1543)	$x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0$
(2345), (2354), (2543), (2453)	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0$
(1234), (1243), (1432), (1342)	$x_{31} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
(135), (153)	$x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = 0$
(125), (152)	$x_{31} = x_{41} = x_{51} = 0,$ $x_{53}x_{42} - x_{52}x_{43} = 0$
(145), (154)	$x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0,$ $x_{42}x_{31} - x_{41}x_{32} = 0$
(124), (142)	$x_{31} = x_{41} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
(134), (143)	$x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
(235), (253)	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = 0$
(245), (254)	$x_{31} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0$
(234), (243)	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
(123), (132)	$x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
(345), (354)	$x_{21} = x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0$

w	$C(w)$
$(15)(24)$	$\mathfrak{n}^*$
$(15)(234)$, $(15)(243)$	$x_{52}x_{41} - x_{51}x_{42} = 0$

Таблица 4.

$(14)(25)$	$x_{51} = 0, x_{54}x_{41} + x_{53}x_{31} + x_{52}x_{21} = 0$
$(15)(23)$	$x_{52}x_{41} - x_{51}x_{42} = 0, x_{41}x_{53} - x_{51}x_{43} = 0,$ $x_{53}x_{42} - x_{52}x_{43} = 0$
$(15)(34)$	$x_{52}x_{41} - x_{51}x_{42} = 0, x_{52}x_{31} - x_{51}x_{32} = 0,$ $x_{42}x_{31} - x_{41}x_{32} = 0$
(15)	$x_{42}x_{31} - x_{41}x_{32} = 0, x_{52}x_{41} - x_{51}x_{42} = 0,$ $x_{53}x_{42} - x_{52}x_{43} = 0, x_{52}x_{31} - x_{51}x_{32} = 0,$ $x_{53}x_{41} - x_{51}x_{43} = 0$
$(34)(125)$, $(34)(152)$	$x_{51} = x_{41} = x_{31} = 0$
$(23)(154)$, $(23)(145)$	$x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0$
$(25)(134)$, $(25)(143)$	$x_{51} = x_{41} = 0, x_{54}x_{41} + x_{53}x_{31} + x_{52}x_{21} = 0$
$(14)(253)$, $(14)(235)$	$x_{51} = x_{52} = 0, x_{54}x_{41} + x_{53}x_{31} + x_{52}x_{21} = 0$
$(24)(135)$, $(24)(153)$	$x_{41} = x_{51} = x_{52} = 0$
$(13)(25)$	$x_{21}x_{42} + x_{43}x_{31} = 0, x_{31}x_{53} + x_{21}x_{52} = 0,$ $x_{53}x_{42} - x_{52}x_{43} = 0$
$(14)(35)$	$x_{32}x_{53} + x_{42}x_{54} = 0, x_{54}x_{41} + x_{53}x_{31} = 0,$ $x_{42}x_{31} - x_{41}x_{32} = 0$
$(14)(23)$	$x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
$(25)(34)$	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{51} = 0$
$(13)(245)$, $(13)(254)$	$x_{41} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0, x_{31}x_{43} + x_{21}x_{42} = 0$
$(35)(124)$, $(35)(142)$	$x_{31} = x_{41} = x_{51} = x_{52} = 0, x_{42}x_{54} + x_{32}x_{53} = 0$
(14)	$x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0, x_{42}x_{31} - x_{41}x_{32} = 0$
(25)	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{51} = 0, x_{53}x_{42} - x_{52}x_{43} = 0$
$(12)(35)$	$x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = 0$
$(13)(45)$	$x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
$(13)(24)$	$x_{41} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0,$ $x_{31}x_{43} + x_{21}x_{42} = 0$
$(24)(35)$	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{51} = x_{52} = 0,$ $x_{42}x_{54} + x_{32}x_{53} = 0$
$(12)(345)$, $(12)(354)$	$x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0$
$(45)(132)$, $(45)(123)$	$x_{31} = x_{41} = x_{42} = x_{43} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0$
(13)	$x_{41} = x_{42} = x_{43} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
(35)	$x_{21} = x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = x_{51} = x_{52} = 0$
(24)	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$

(12)(45)	$x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42}$ $= x_{43} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0$
(12)(34)	$x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42}$ $= x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
(23)(45)	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{42}$ $= x_{43} = x_{51} = x_{52} = x_{53} = 0$
(12)	$x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = x_{43}$ $= x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
(23)	$x_{21} = x_{31} = x_{41} = x_{42} = x_{43}$ $= x_{51} = x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
(34)	$x_{21} = x_{31} = x_{32} = x_{41} = x_{42} = x_{51}$ $= x_{52} = x_{53} = x_{54} = 0$
(e)	0

Литература

1. S. Billey, V. Lakshmibay, *Singular Loci of Schubert Varities.* — Progr. Math. **182** (2000), Birkhäuser, Boston.
2. A. A. Kirillov, *Two more variations on the triangular theme.* — Progr. Math. **213** (2003), 243–258.
3. И. Р. Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии.*Ё1, Наука, М., 1988.
4. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М., 1975.
5. Д. Кокс, Дж. Литтл, Д. О'Ши, *Идеалы, многообразия и алгоритмы.* Мир, М., 2000.

Eliseev D. Yu., Panov A. N. Tangent cones of Schubert varieties for A_n of lower rank

In the paper we calculate the tangent cones for the Schubert varieties for series A_n of rank less or equal to four, we formulate hypotheses on the structure of tangent cones in the general case.

Самарский государственный университет, кафедра алгебры и геометрии, ул. Акад. Павлова, 1443011 Самара, Россия

E-mail: dmitriyelis@gmail.com

E-mail: apanov@list.ru

Поступило 30 июня 2011 г.