Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 394, 2011 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. VIII

Введение

В работах [1–15] были вычислены алгебры Йонеды для некоторых серий алгебр диэдрального или полудиэдрального типа из классификации К. Эрдман [16]. Настоящая статья продолжает этот цикл работ. Напомним, что наряду с диаграммным методом Бенсона–Карлсона [17], использованным, например, в [1–3, 5, 10, 12], мы часто применяем также подход работы [4]. Его существо составляет то, что на основе некоторых эмпирических наблюдений мы выдвигаем гипотезы о строении минимальных проективных резольвент простых модулей, и после их обоснования считываем "когомологическую информацию" с найденных резольвент, что приводит к описанию алгебр Йонеды рассматриваемых алгебр.

В настоящей работе мы, используя подход из [4], даём описание алгебры Йонеды для алгебр из серии $SD(2\mathcal{B})_2$ (в обозначениях из [16]). Кроме того, описываются Ext-алгебры простых модулей над рассматриваемыми алгебрами (см. следствие 4.2), и потому полученные результаты могут быть применены к описанию кольца когомологий тех конечных групп, у которых главный блок Морита-эквивалентен какой-либо из алгебр рассматриваемой серии.

Отметим, что техника работы [4] была недавно применена также для вычисления алгебры когомологий Хохшильда некоторых конечномерных алгебр, а также целочисленных групповых колец диэдральных и полудиэдральных групп (см. [18–28]).

Ключевые слова: алгебра Йонеды, алгебры полудиэдрального типа.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00635), а также при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (2010-1.1-111-128-033, госконтракт 14.740.11.0344). Кроме того, работа автора поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского государственного университета, "Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической K-теории".

1. Формулировка основных результатов

Пусть R – конечномерная алгебра над полем K. Все рассматриваемые модули – левые. Через

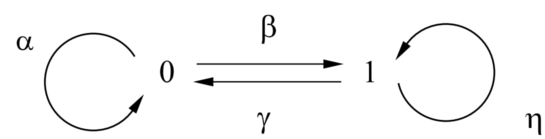
$$\mathcal{E}(M) = \bigoplus_{m \geqslant 0} \operatorname{Ext}^m_R(M, M)$$

обозначим Ext-алгебру R-модуля M. Если R – базисная K-алгебра с радикалом Джекобсона $J(R)$, то Ext-алгебра $\mathcal{E}(R/J(R))$ называется алгеброй Йонеды алгебры R и обозначается через $\mathcal{Y}(R)$.

В дальнейшем мы предполагаем, что поле K алгебраически замкнуто. Для любой конечномерной K-алгебры R, заданной с помощью колчана $Q = (V(Q), \operatorname{Arr}(Q))$ с соотношениями, через e_i, $i \in V(Q)$, обозначим идемпотенты, соответствующие вершинам колчана Q, а через $P_i = Re_i$ и $S_i = P_i/J(R)P_i$, $i \in V(Q)$, обозначим соответствующие этим вершинам неразложимые проективные R-модули и простые R-модули соответственно. Умножение справа на элемент $x \in e_iRe_j$ индуцирует гомоморфизм, действующий из P_i в P_j, и мы будем обозначать его также через x.

Алгебры, составляющие серию $SD(2\mathcal{B})_2$, определяются следующим колчаном с соотношениями (композиция путей записывается справа налево):

$Q^{(2\mathcal{B})}$:

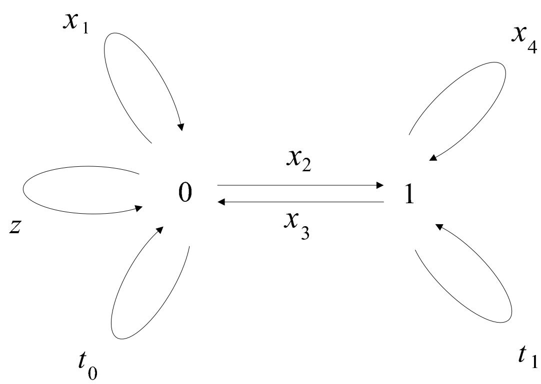


$$\eta\beta = \beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^{k-1},\ \gamma\eta = \alpha\gamma(\beta\alpha\gamma)^{k-1},$$
$$\beta\gamma = \eta^{t-1},\ \alpha^2 = c(\gamma\beta\alpha)^k,\ \eta^2\beta = 0 = \gamma\eta^2,$$

где $k, t \in \mathbb{N}, t \geqslant 3$, $c \in K$. Алгебры этой серии обозначаются через $SD(2\mathcal{B})_2^{k,t,c}$, а также более кратко через $SD(2\mathcal{B})_2$.

Для описания алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(SD(2\mathcal{B})_2^{k,t,c})$ рассмотрим колчан:

$\mathfrak{R}$:



На алгебре путей $K[\mathfrak{R}]$ этого колчана введем градуировку такую, что

$$\deg(x_i) = 1\,(1 \leqslant i \leqslant 4),\ \deg(z) = 3,$$
$$\deg(t_l) = 4\,(l \in \{0,1\}).$$

Рассмотрим на колчане $\mathfrak{R}$ следующие соотношения:

$$x_2x_1 = \begin{cases} -x_4x_2, & \text{если } k = 1, \\ 0, & \text{если } k > 1; \end{cases} \tag{1.1}$$

$$x_1x_3 = \begin{cases} -x_3x_4, & \text{если } k = 1, \\ 0, & \text{если } k > 1; \end{cases} \tag{1.2}$$

$$x_4^2 = \begin{cases} -x_2x_3, & \text{если } t = 3, \\ 0, & \text{если } t > 3; \end{cases} \tag{1.3}$$

$$x_3x_2 = 0,\ (x_2x_3)x_4 = x_4(x_2x_3),\ x_3x_4x_2 = 0, \tag{1.4}$$

$$x_4x_2x_1 = 0, \tag{1.5}$$

$$x_1z + zx_1 + cx_1^4 = 0,\ x_2z = 0 = zx_3, \tag{1.6}$$

$$x_1t_0 = t_0x_1,\ x_2t_0 = t_1x_2, \tag{1.7}$$

$$t_0x_3 = x_3t_1,\ t_1x_4 = x_4t_1, \tag{1.8}$$

$$x_1^2t_0 = z^2. \tag{1.9}$$

Через $\mathcal{E}_{k,t,c}$ обозначим K-алгебру, определяемую колчаном $\mathfrak{R}$ с соотношениями (1.1)–(1.9). Так как эти соотношения однородны, то алгебра $\mathcal{E}_{k,t,c}$ наследует естественную градуировку с алгебры $K[\mathfrak{R}]$.

Теорема 1.1. *Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_2^{k,t,c}$, $k, s \in \mathbb{N}$, $s \geqslant 3$, $c \in K$. Алгебра Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ алгебры R изоморфна алгебре $\mathcal{E}_{k,t,c}$ как градуированная алгебра.*

Замечание 1.2. Отметим, что если $k > 1$ или $t > 3$, то соотношение (1.5) вытекает из остальных соотношений и может быть опущено.

2. Резольвенты

Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_2^{k,t,c}$, $k, t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 3$, $c \in K$. Введём сокращённые обозначения для некоторых элементов алгебры путей $K[Q^{(2\mathcal{B})}]$ колчана $Q^{(2\mathcal{B})}$ (а также для их канонических образов в R):

$$a := (\alpha\gamma\beta)^{k-1}, \quad b := (\beta\alpha\gamma)^{k-1}, \quad g := (\gamma\beta\alpha)^{k-1}, \tag{2.1}$$

$$\widetilde{\alpha} := \alpha - c \cdot \gamma\beta(\alpha\gamma\beta)^{k-1} \tag{2.2}$$

(для $k = 1$ в качестве a, b, g берём идемпотенты, соответствующие подходящим вершинам колчана $Q^{(2\mathcal{B})}$).

Как легко видеть, модули P_0, P_1 имеют следующие K-базисы:

$$P_0 = {}_K\langle \{e_0\} \cup \{\alpha(\gamma\beta\alpha)^i\}_{i=0}^{k-1} \cup \{\beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^i\}_{i=0}^{k-1} \cup \{\beta(\alpha\gamma\beta)^i\}_{i=0}^{k-1}$$

$$\cup \{\gamma\beta(\alpha\gamma\beta)^i\}_{i=0}^{k-1} \cup \{(\alpha\gamma\beta)^i\}_{i=1}^{k} \cup \{(\gamma\beta\alpha)^i\}_{i=1}^{k-1}\rangle,$$

$$P_1 = {}_K\langle \{e_1\} \cup \{\eta^i\}_{i=1}^{t} \cup \{\gamma(\beta\alpha\gamma)^i\}_{i=0}^{k-1}$$

$$\cup \{\alpha\gamma(\beta\alpha\gamma)^i\}_{i=0}^{k-1} \cup \{(\beta\alpha\gamma)^i\}_{i=1}^{k-1}\rangle;$$

в частности, $\dim_K P_0 = 6k$, $\dim_K P_1 = 3k + t$.

Рассмотрим следующий бикомплекс $B_{\bullet\bullet}$, расположенный в первой четверти плоскости (т.е. строки и столбцы занумерованы числами $0, 1, 2, \ldots$):

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & \cdots \arrow[d, "\gamma\beta\cdot a"'] & \\
 & & P_1 \arrow[d, "\beta"'] & P_1 \arrow[l, "-\eta"'] \arrow[d, "\beta\cdot a"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha\gamma"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot a"'] & \cdots \arrow[l, "-\alpha"'] \\
 & & P_0 \arrow[d, "\gamma\beta\cdot a"'] & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot a"'] & P_0 \arrow[l, "\widetilde{\alpha}"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot a"'] & \cdots \arrow[l, "\alpha"'] \\
P_1 \arrow[d, "\beta"'] & P_1 \arrow[l, "-\eta"'] \arrow[d, "\beta\cdot a"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha\gamma"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot a"'] & P_0 \arrow[l, "-\alpha"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot a"'] & P_0 \arrow[l, "-\widetilde{\alpha}"'] \arrow[d, "\gamma\beta\cdot a"'] & \cdots \arrow[l, "-\alpha"'] \\
P_0 & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "\widetilde{\alpha}"'] & P_0 \arrow[l, "\alpha"'] & P_0 \arrow[l, "\widetilde{\alpha}"'] & \cdots \arrow[l, "\alpha"']
\end{tikzcd}
\tag{2.3}
$$

Предложение 2.1. *Тотализация* $\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet})$ *бикомплекса* $B_{\bullet\bullet}$ *из* (2.3) *представляет собой минимальную проективную резольвенту простого* R*-модуля* S_0.

Доказательство. Воспользуемся спектральной последовательностью бикомплекса:

$$E^2_{pq} = \mathrm{H}^v_p \mathrm{H}^h_q(B_{\bullet\bullet}) \quad \Rightarrow \quad \mathrm{H}_{p+q}(\mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet})). \tag{2.4}$$

Мы докажем, что второй лист этой спектральной последовательности вырождается.

Сначала отметим, что с помощью прямых вычислений получаем:

$$\operatorname{Ker}\alpha = \operatorname{Im}\widetilde{\alpha}, \;\; \operatorname{Ker}\widetilde{\alpha} = \operatorname{Im}\alpha, \;\; \operatorname{Ker}\eta = \operatorname{Im}(\alpha\gamma).$$

Следовательно, на первом листе этой спектральной последовательности ненулевые члены могут содержаться только в столбцах с чётными номерами, при этом в столбце с номером $2l$, $l \geqslant 1$, ненулевые члены включаются в следующую последовательность

$$0 \to \operatorname{Coker}\eta \xrightarrow{\overline{\beta}} \operatorname{Coker}\alpha \xrightarrow{\overline{\gamma\beta\cdot a}} \operatorname{Ker}(\alpha\gamma)/\operatorname{Im}(\alpha) \to 0 \tag{2.5}$$

(здесь и далее с помощью черты мы обозначаем гомоморфизм, индуцированный умножением на соответствующий элемент из R). Непосредственная проверка показывает, что последовательность (2.5) точна. Кроме того, $\dim_K \operatorname{Ker}(\alpha\gamma)/\operatorname{Im}(\alpha) = 1$.

Наконец, на первом листе рассматриваемой спектральной последовательности столбец с номером 0 содержит только гомоморфизм $\operatorname{Coker}\eta \xrightarrow{\overline{\beta}} \operatorname{Coker}\alpha$, причём $\operatorname{Coker}\overline{\beta} \simeq \operatorname{Ker}(\alpha\gamma)/\operatorname{Im}(\alpha) \simeq S_0$.

Таким образом, $Q_\bullet = \operatorname{Tot}(B_{\bullet\bullet})$ является проективной резольвентой модуля S_0, а её минимальность следует из того, что по построению имеем $\operatorname{Im}(d_m^Q : Q_{m+1} \to Q_m) \subset \operatorname{Rad} Q_m$ для любого $m \geqslant 0$. □

Предложение 2.2. *Минимальная проективная резольвента модуля S_1 имеет вид*:

$$\ldots \longrightarrow P_0 \oplus P_1 \xrightarrow{(\gamma,\eta)} P_1 \xrightarrow{\eta^t} P_1 \xrightarrow{\binom{\beta}{\eta}} P_0 \oplus P_1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} -\alpha g & \beta \\ \gamma & -\eta^{t-2} \end{pmatrix}}$$

$$P_0 \oplus P_1 \xrightarrow{(\gamma,\eta)} P_1 \longrightarrow S_1 \longrightarrow 0.$$

Доказательство состоит в прямой проверке точности указанной последовательности и предоставляется читателю.

Из предложений 2.1 и 2.2 вытекает следующее утверждение.

Следствие 2.3. *Размерности групп расширений простых R-модулей принимают следующие значения:*

а)

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0) = \begin{cases} 2\left[\frac{m}{4}\right] + 2, & \textit{если } m \equiv 3 \pmod 4, \\ 2\left[\frac{m}{4}\right] + 1, & \textit{в остальных случаях.} \end{cases}$$

б)

$$\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_1) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_0) = \begin{cases} 1, & \textit{если } m \equiv 1 \textit{ или } 2 \pmod 4, \\ 0, & \textit{если } m \equiv 0 \textit{ или } 3 \pmod 4. \end{cases}$$

в) $\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_1) = 1$ *для всех* $m \geqslant 0$.

Замечание 2.4. Через $Q_m(S_k)$ будем обозначать m-й член минимальной проективной резольвенты простого R-модуля S_k. Для простого модуля S_0 имеем $Q_m(S_0) = \bigoplus_{i+j=m} B_{ij}$, где $B_{\bullet\bullet}$ – бикомплекс из (2.3), и мы в дальнейшем будем использовать упорядочение прямых слагаемых в этом разложении по возрастанию второго индекса j. Через $d_m^{(k)} : Q_{m+1}(S_k) \to Q_m(S_k)$ обозначается дифференциал в резольвенте $Q_\bullet(S_k)$.

3. Образующие для алгебры Йонеды

Пусть по-прежнему $R = SD(2\mathcal{B})_2^{k,t,c}$, $k,t \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 3$, $c \in K$. В этом разделе мы укажем (конечное) множество образующих алгебры Йонеды

$$\mathcal{Y}(R) = \mathcal{E}(R/J(R)) = \bigoplus_{m\geqslant 0} \bigoplus_{i,j\in\{0,1\}} \mathrm{Ext}_R^m(S_i, S_j)$$

для алгебр рассматриваемой серии.

Напомним следующую интерпретацию произведения Йонеды в $\mathcal{Y}(R)$. Пусть $Q_\bullet(S_i)$ – минимальная проективная резольвента простого R-модуля S_i. Ввиду изоморфизма

$$\mathrm{Ext}_R^m(S_i, S_j) \simeq \mathrm{Hom}_R(\Omega^m(S_i), S_j)$$

любой элемент $f \in \mathrm{Ext}_R^m(S_i, S_j)$ можно представить соответствующим гомоморфизмом $\widetilde{f}\colon \Omega^m(S_i) \to S_j$. При этом $\widetilde{f}$ продолжается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\varphi_l\colon Q_{m+l}(S_i) \to Q_l(S_j)\}_{l\geqslant 0}$. В свою очередь, $\widehat{f} = \varphi_0$ однозначно определяет гомоморфизм $\widetilde{f}$. Гомоморфизм φ_l назовем l-ой трансляцией элемента f и будем обозначать через $\mathrm{T}^i(f)$ или $\mathrm{T}^i(\widehat{f})$. Тогда произведение Йонеды элементов $f \in \mathrm{Ext}_R^m(S_i, S_j)$ и $g \in \mathrm{Ext}_R^n(S_j, S_t)$ определяется отображением $(g \cdot f)\widehat{\ } = \widehat{g} \cdot \mathrm{T}^n(\widehat{f})$.

Введём в рассмотрение следующие однородные элементы алгебры $\mathcal{Y}(R)$:

$$\begin{aligned}
&\widehat{x}_1 = (1\,,\, 0)\colon Q_1(S_0) = P_0 \oplus P_1 \to P_0, && x_1 \in \mathrm{Ext}_R^1(S_0, S_0);\\
&\widehat{x}_2 = (0\,,\, 1)\colon Q_1(S_0) = P_0 \oplus P_1 \to P_1, && x_2 \in \mathrm{Ext}_R^1(S_0, S_1);\\
&\widehat{x}_3 = (1\,,\, 0)\colon Q_1(S_1) = P_0 \oplus P_1 \to P_0, && x_3 \in \mathrm{Ext}_R^1(S_1, S_0);\\
&\widehat{x}_4 = (0\,,\, 1)\colon Q_1(S_1) = P_0 \oplus P_1 \to P_1, && x_4 \in \mathrm{Ext}_R^1(S_1, S_1);\\
&\widehat{z} = (0\,,\, 1)\colon Q_3(S_0) = P_0^2 \to P_0, && z \in \mathrm{Ext}_R^3(S_0, S_0);\\
&\widehat{t_0} = (0\,,0\,,\, 1)\colon Q_4(S_0) = P_0^3 \to P_0, && t_0 \in \mathrm{Ext}_R^4(S_0, S_0);\\
&\widehat{t_1} = 1\colon Q_4(S_1) = P_1 \to P_1, && t_1 \in \mathrm{Ext}_R^4(S_1, S_1).
\end{aligned}$$

Отметим, что для краткости при описании матриц отображений мы часто обозначаем тождественное отображение соответствующих модулей через 1.

Предложение 3.1. *Для множества элементов алгебры* $\mathcal{Y}(R)$

$$\mathcal{X} = \{x_i \mid 1 \leqslant i \leqslant 4\} \cup \{z\} \cup \{t_r \mid r = 0, 1\} \tag{3.1}$$

выполняются соотношения (1.1)–(1.9).

Доказательство. Мы докажем только соотношение (1.9). Остальные соотношения проверяются аналогично, и мы предоставляем читателю проделать соответствующие вычисления.

Сначала заметим, что из строения бикомплекса (2.3) мы получаем следующую короткую точную последовательность комплексов

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet(S_0) \xrightarrow{\pi} Q_\bullet(S_0)[-4] \to 0,$$

где $X_\bullet$ – тотализация бикомплекса, состоящего из строк в (2.3) с номерами 0 и 1; кроме того, $i_n \colon X_n \to Q_n$ – вложение в качестве прямого слагаемого, а $\pi_n \colon Q_n \to Q_{n-4}$ – проекция на соответствующее прямое слагаемое ($n \geqslant 4$). Но поскольку $\widehat{t_0} = \pi_4$, то в качестве j-й трансляции элемента t_0 можно взять π_{j+4}.

В следующей лемме мы опишем трансляции для элементов x_1 и z.

Лемма 3.2. *В качестве трансляций (подходящих порядков) элементов* x_1, z *можно взять следующие отображения:*

$$\mathrm{T}^1(x_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -c\cdot\gamma b & b \end{pmatrix}, \quad \mathrm{T}^1(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma b \end{pmatrix};$$

при $k > 1$

$$\mathrm{T}^2(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & 0 \end{pmatrix};$$

при $k = 1, t \geqslant 4$

$$\mathrm{T}^2(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma & -\eta^{t-2} \end{pmatrix};$$

при $k = 1, t = 3$

$$\mathrm{T}^2(z) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & -\gamma & -\eta \end{pmatrix};$$

наконец, при $k > 1$ *или* $t > 3$

$$\mathrm{T}^3(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

а при $k = 1$ *и* $t = 3$

$$\mathrm{T}^3(z) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & -\beta \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство леммы состоит в прямой проверке коммутативности некоторых квадратов (соответствующих цепным отображениям между резольвентами).

Вернёмся к доказательству соотношения (1.9). С помощью леммы 3.2 получаем:

$$\big(x_1^2 t_0\big)\widehat{\ } = \widehat{x}_1 \cdot \mathrm{T}^1(x_1) \cdot \mathrm{T}^2(t_0) = (0,\,0,\,1,\,0),$$
$$\big(z^2\big)\widehat{\ } = \widehat{z} \cdot \mathrm{T}^3(z) = (0,\,0,\,1,\,0),$$

откуда следует требуемое равенство. □

Предложение 3.3. *Как K-линейные пространства приведённые ниже* Ext*-группы имеют следующие базисы:*

$$\begin{array}{ll}
\mathrm{Ext}^1_R(S_0,S_0) = \langle x_1\rangle, & \mathrm{Ext}^1_R(S_0,S_1) = \langle x_2\rangle,\\
\mathrm{Ext}^1_R(S_1,S_0) = \langle x_3\rangle, & \mathrm{Ext}^1_R(S_1,S_1) = \langle x_4\rangle,\\
\mathrm{Ext}^2_R(S_0,S_0) = \langle x_1^2\rangle, & \mathrm{Ext}^2_R(S_0,S_1) = \langle x_4x_2\rangle,\\
\mathrm{Ext}^2_R(S_1,S_0) = \langle x_3x_4\rangle, & \mathrm{Ext}^2_R(S_1,S_1) = \langle x_2x_3\rangle,\\
\mathrm{Ext}^3_R(S_0,S_0) = \langle x_1^3, z\rangle, & \mathrm{Ext}^3_R(S_1,S_1) = \langle x_4x_2x_3\rangle,\\
\mathrm{Ext}^4_R(S_0,S_0) = \langle x_1^4, x_1z, t_0\rangle, & \mathrm{Ext}^4_R(S_1,S_1) = \langle t_1\rangle.
\end{array}$$

Доказательство. В некоторых случаях требуемые равенства следуют непосредственно из определения элементов множества $\mathcal{X}$ из (3.1). В других случаях это делается с помощью вычислений, использующих подходящие трансляции отображений (ср. доказательство предложения 3.1). Детали вычислений мы предоставляем провести читателю. □

Предложение 3.4. *Множество $\mathcal{X}$ из* (3.1) *порождает алгебру Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ как K-алгебру.*

Доказательство. Поскольку

$$\mathrm{Ext}^m_R(S_i,S_j) \simeq \mathrm{Hom}_R(Q_m(S_i),S_j),$$

то любому однородному элементу алгебры Йонеды $\mathcal{Y}(R)$ соответствует некоторое отображение $f\colon Q_m(S_i) \to S_j$, $i,j \in \{0,1\}$. Используя предложение 3.3 и следствие 2.3, можем считать, что $m > 4$. Индукцией по m докажем, что f представляется в виде суммы произведений элементов меньших степеней.

Если $j = 1$, то умножение на t_1 задает изоморфизм

$$\mathrm{Ext}_R^{m-4}(S_i, S_1) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Ext}_R^m(S_i, S_1),$$

и мы можем применить индуктивное предположение. Аналогичное рассуждение применимо к случаю, когда $i = 1$.

Теперь предположим, что $i = j = 0$, и упростим обозначения, полагая

$$Q_l = Q_l(S_0),\ d_l = d_l^{(0)}\ \ (l \geqslant 0). \tag{3.2}$$

Можно считать, что $f(B_{m-n,n}) \neq 0$ ровно для одного значения n.

В зависимости от "локальной" конфигурации бикомплекса (2.3), в которую включается модуль $B_{m-n,n}$, мы будем строить коммутативные квадраты вида

$$\begin{tikzcd} Q_{m+1} \arrow[r, "d_m"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & Q_m \arrow[d, "\varphi_0"'] \\ Q_{l+1} \arrow[r, "d_l"] & Q_l \end{tikzcd}\ , \tag{3.3}$$

такие, что $l < m$ и $\mathrm{Ker}\,\varphi_0 \subset \mathrm{Ker}\,f$. Тогда найдется гомоморфизм $f'\colon Q_l \longrightarrow S_0$, для которого $f'\varphi_0 = f$. При этом, используя то, что R – QF-алгебра, получаем: $\varphi_0 = \mathrm{T}^l(\tilde{\varphi})$ для некоторого $\tilde{\varphi}\colon Q_{m-l} \longrightarrow S_0$, и остаётся применить индуктивное предположение к f' и $\tilde{\varphi}$.

Если $n \geqslant 2$, то мы строим диаграмму вида (3.3), в которой $l = m - 4$, а в качестве φ_0 (соответственно φ_1) берём проекцию на прямое слагаемое $Q_m = X_m \oplus Q_{m-4} \to Q_{m-4}$, (соответственно проекцию $Q_{m+1} = X_{m+1} \oplus Q_{m-3} \to Q_{m-3}$).

Теперь предположим, что $n \leqslant 1$. В этом случае возможны следующие конфигурации в бикомплексе (2.3), в которые включается модуль $B_{m-n,n}$ $(n \leqslant 1)$:

$$\text{(I)}\quad \begin{tikzcd} & P_0 \arrow[d, "\gamma\beta a"'] \\ & P_0 & P_0 \arrow[l, "\pm\alpha"'] \end{tikzcd};\qquad\qquad \text{(II)}\quad \begin{tikzcd} & P_0 \arrow[d, "\gamma\beta a"'] \\ & P_0 & P_0 \arrow[l, "\pm\tilde{\alpha}"'] \end{tikzcd}.$$

(на диаграммах изображаются все стрелки, входящие в соответствующий модуль $B_{m-n,n}$). Тогда мы можем ограничиться анализом случая, когда $n = 0$, так как для $n = 1$ в соответствующих диаграммах вида (3.3) лишь некоторые гомоморфизмы изменят знак.

а) Предположим, что имеет место конфигурация I (в которой горизонтальная стрелка – это гомоморфизм α), и тогда m чётно. В этом случае мы строим диаграмму вида (3.3), в которой $l = 4$, в качестве φ_0 берём проекцию модуля Q_m на первые три прямых слагаемых $B_{m,0} \oplus B_{m-1,1} \oplus B_{m-2,2} \simeq Q_4$, а в качестве φ_1 берём композицию проекции модуля Q_{m+1} на первые четыре прямых слагаемых $B_{m+1,0} \oplus B_{m,1} \oplus B_{m-1,2} \oplus B_{m-2,3} \simeq P_0^4$ и отображения, определяемого матрицей $\operatorname{diag}(1,1,1,\gamma b)$.

б) Теперь рассмотрим конфигурацию II (в которой горизонтальная стрелка – это гомоморфизм $\widetilde{\alpha}$; при этом m нечётно). Тогда строим квадрат (3.3), в котором $l = 3$, в качестве φ_0 берём проекцию модуля Q_m на первые два прямых слагаемых $B_{m,0} \oplus B_{m-1,1} \simeq Q_3$ а в качестве φ_1 берём проекцию модуля Q_{m+1} на первые три прямых слагаемых $B_{m+1,0} \oplus B_{m,1} \oplus B_{m-1,2} \simeq Q_4$.

□

4. Окончание доказательства теоремы 1.1

Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_2$, и пусть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{k,t,c} = K[\Re]/I_{k,t,c}$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 1, где $I_{k,s,c}$ – идеал алгебры путей колчана $\Re$, соответствующий соотношениям (1.1)–(1.9). Через ε_i, $i = 0, 1$, обозначим идемпотенты алгебры $K[\Re]$, соответствующие вершинам колчана $\Re$, и так же обозначим образы этих идемпотентов в $\mathcal{E}$. Из предложений 3.1 и 3.4 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{Y}(R)$, переводящий канонические образующие алгебры $\mathcal{E}$, соответствующие стрелкам колчана $\Re$, в соответствующие образующие алгебры $\mathcal{Y}(R)$, введённые в начале раздела 3. Пусть $\mathcal{E} = \bigoplus_{m \geqslant 0} \mathcal{E}^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{E}$ на однородные прямые слагаемые. Теперь следующее утверждение завершает доказательство теоремы 1.1.

Предложение 4.1. *Для любых $i, j \in \{0, 1\}$ и $m \geqslant 0$*

$$\dim_K(\varepsilon_i \mathcal{E}^m \varepsilon_j) = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_j, S_i). \tag{4.1}$$

Доказательство. Мы рассмотрим только случай, когда $k > 1$ и $t > 3$. Исследование случаев, когда либо $k = 1$, либо $t = 3$, потребует лишь незначительных изменений в наших рассуждениях. Далее, поскольку для $m = 0$ соотношение (4.1) очевидно, то дополнительно предполагаем, что $m > 0$.

а) Пусть $i = j = 0$. Из соотношений (1.1)–(1.9) следует, что $\varepsilon_0\mathcal{E}\varepsilon_0$ – K-алгебра, порождённая элементами

$$x_1,\ z,\ t_0,$$

при этом они удовлетворяют соотношениям:

$$x_1 z + z x_1 + c x_1^4 = 0,\ x_1^2 t_0 = z^2,\ x_1 t_0 = t_0 x_1,\ z t_0 = t_0 z. \tag{4.2}$$

Положим $d_m = \dim_K \varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_0$. Ввиду соотношений (4.2) любой моном $f \in \varepsilon_0\mathcal{E}\varepsilon_0$ представляется в виде

$$f = x_1^i z^\lambda t_0^j \quad \text{для} \quad i, j \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \lambda \in \{0, 1\}. \tag{4.3}$$

Отсюда легко заключить, что для $m \geqslant 4$

$$d_m - d_{m-4} = 2 \tag{4.4}$$

(достаточно заметить, что d_{m-4} совпадает с числом мономов степени m, имеющих вид (4.3) с $j \geqslant 1$). Ввиду следствия 2.3 а) последовательность $\{\dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_0, S_0)\}$ также удовлетворяет рекуррентному соотношению, аналогичному (4.4), и теперь соотношение (4.1) получается с помощью индукции по m, поскольку для $m < 4$ оно очевидно.

б) Пусть $i = j = 1$. Вновь из соотношений (1.1)–(1.9) получаем, что K-алгебра $\varepsilon_1\mathcal{E}\varepsilon_1$ порождается элементами $x_4, y = x_2 x_3$ и t_1, удовлетворяющими соотношениям:

$$x_4 y = y x_4,\ \ x_4 t_1 = t_1 x_4,\ \ y t_1 = t_1 y,\ \ x_4^2 = y^2 = 0.$$

Отсюда легко получаем, что

$$\varepsilon_1\mathcal{E}\varepsilon_1 \simeq K[x_4, y, t_1]/\left(x^2, y^2\right),$$

и тогда ввиду 2.3 в) для всех $m \in \mathbb{N}$ имеем

$$\dim_K \varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_1 = 1 = \dim_K \operatorname{Ext}_R^m(S_1, S_1).$$

в) Пусть $i = 1$, $j = 0$. Из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{E}$ легко следует, что любой моном f из $\varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_0$ имеет представление вида

$$f = x_2 t_0^{m-1} \ \text{ или } \ f = x_4 x_2 t_0^{m-2},$$

и потому

$$\dim_K \varepsilon_1\mathcal{E}^m\varepsilon_0 = \begin{cases} 1, & \text{если } \ m \equiv 1 \text{ или } 2 \pmod 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теперь соотношение (4.1) вытекает из следствия 2.3 б).

г) Пусть $i = 0$, $j = 1$. Аналогично части в) доказательства получаем, что любой моном f из $\varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_1$ приводится к виду

$$f = x_3t_1^{m-1} \text{ или } f = x_3x_4t_1^{m-2}.$$

Следовательно,

$$\dim_K \varepsilon_0\mathcal{E}^m\varepsilon_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 1 \text{ или } 2 \pmod 4, \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

и соотношение (4.1) вновь вытекает из следствия 2.3 б). □

Следствие 4.2. *Имеют место следующие изоморфизмы градуированных K-алгебр:*
а) $\mathcal{E}(S_0) \simeq K\langle x, z, w\rangle/(xz + zx + cx^4, xw - wx, zw - wz, z^2 - x^2w)$,
где $\deg x = 1$, $\deg z = 3$, $\deg w = 4$;
б)

$$\mathcal{E}(S_1) \simeq \begin{cases} K[x, y, w]/(x^2, y^2), & \textit{если } t > 3, \\ K[x, w]/(x^4), & \textit{если } t = 3, \end{cases}$$

где $\deg x = 1$, $\deg y = 2$, $\deg w = 4$.

Доказательство. Для случая, когда $t > 3$, требуемые утверждения следуют из доказательства предложения 4.1. Часть утверждения б), относящаяся к случаю $t = 3$, доказывается аналогично. □

Литература

1. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 139–162.
2. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Алгебры Йонеды для одного класса диэдральных алгебр.* — Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. 1. Вып. 3, No. 15 (1999), 3–10.
3. О. И. Балашов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* II. — Алгебра и анализ **13** (2001), No. 1, 3–25.
4. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* I. — Алгебра и анализ **13** (2001), No. 4, 54–85.
5. N. V. Kosmatov, *Cohomology of algebras of dihedral type: automatic calculation.* — В кн.: Международн. алг. конф., посв. памяти З. И. Боревича. С.-Пб., 17–23 сент. (2002), 115–116.
6. М. А. Антипов, А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 9–36.
7. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* IV: серия $D(2\mathcal{B})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 76–89.
8. А. И. Генералов, Е. А. Осиюк, *Когомологии алгебр диэдрального типа.* III: серия $D(2\mathcal{A})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **289** (2002), 113–133.

9. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* III: серия $SD(3\mathcal{K})$. — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 84–100.
10. A. I. Generalov, N. V. Kosmatov, *Computation of the Yoneda algebras of dihedral type.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 101–120.
11. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ **319** (2004), 81–116.
12. А. И. Генералов, Н. В. Косматов, *Проективные резольвенты и алгебры Йонеды для алгебр диэдрального типа: серия* $D(3\mathcal{Q})$. — Фунд. и прикл. матем. **10** (2004), вып. 4, 65–89.
13. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 131–154.
14. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* VI. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 183–198.
15. А. И. Генералов, *Когомологии алгебр полудиэдрального типа.* VII. Локальные алгебры. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 130–142.
16. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras.* — Lect. Notes in Math. Vol. 1428. Berlin, Heidelberg, 1990.
17. D. J. Benson, J. F. Carlson, *Diagrammatic methods for modular representations and cohomology.* — Commun. Algebra **15** (1987), No. 1/2, 53–121.
18. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* I: *серия* $D(3\mathcal{K})$ *в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16** (2004), вып. 6, 53–12.
19. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 1, 55–107.
20. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ **18** (2006), вып. 4, 39–82.
21. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* II. *Серия* $Q(2\mathcal{B})_1$ *в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
22. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.* I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ **19** (2007), вып. 5, 70–123.
23. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа.* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
24. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21** (2009), No. 2, 1–51.
25. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.
26. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа.* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестн. С.-Пб. ун–та. Сер. 1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 28–38.
27. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа.* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 144–202.
28. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца полудиэдральной группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 119–151.

Generalov A. I. Cohomology of algebras of semidihedral type. VIII.

The present paper continues the cycle of papers of the author (some of them joint), in which Yoneda algebras are calculated for several families of algebras of dihedral and semidihedral type (in K. Erdmann's classification). In this paper, the Yoneda algebra is described in terms of quivers with relations for algebras of semidihedral type of the family $SD(2\mathcal{B})_2$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: general@pdmi.ras.ru

Поступило 12 октября 2011 г.