Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 394, 2011 г.

Ю. В. Волков

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА САМОИНЪЕКТИВНЫХ АЛГЕБР ДРЕВЕСНОГО ТИПА D_n. V

1. Введение

Данная статья является продолжением работы [1]. Там была построена бимодульная резольвента и вычислены группы когомологий Хохшильда для одной из серий самоинъективных алгебр древесного типа D_n из классификации, полученной в [2]. В настоящей работе даётся описание кольца когомомологий Хохшильда для той же серии алгебр (см. теорему 3).

2. Бимодульная резольвента и аддитивная структура

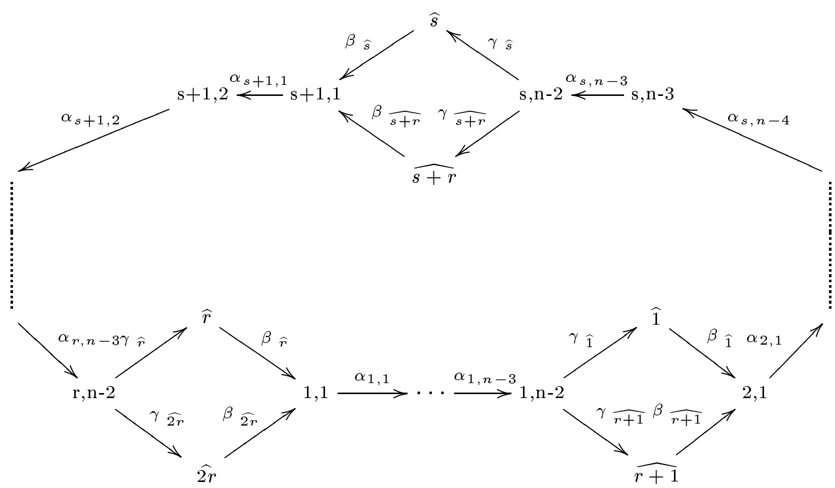
Пусть k – алгебраически замкнутое поле, $r, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 4$. Введём следующий колчан с соотношениями $(\mathcal{Q}, I)$. Множество вершин $\mathcal{Q}_0 = (\mathbb{Z}_r \times \{i \in \mathbb{N} \mid 1 \leqslant i \leqslant n-2\}) \sqcup \mathbb{Z}_{2r}$. Далее для числа $i \in \mathbb{Z}$ мы будем обозначать через i соответствующий ему элемент в $\mathbb{Z}_r$, а через $\widehat{i}$ – соответствующий ему элемент в $\mathbb{Z}_{2r}$. Множество стрелок $\mathcal{Q}_1$ колчана $\mathcal{Q}$ состоит из следующих элементов:

$$\alpha_{s,i} : (s,i) \to (s,i+1) \quad (1 \leqslant s \leqslant r, 1 \leqslant i \leqslant n-3),$$

$$\gamma_{\widehat{s}} : (s, n-2) \to \widehat{s}, \quad \beta_{\widehat{s}} : \widehat{s} \to (s+1, 1) \quad (1 \leqslant s \leqslant 2r).$$

Ключевые слова: когомологии Хохшильда, самоинъективные алгебры, конечный тип представления.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 10-01-00635), а также при частичной финансовой поддержке Минобрнауки РФ, ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" (2010-1.1-111-128-033, госконтракт 14.740.11.0344). Кроме того, работа автора поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского государственного университета, "Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической K-теории".



Идеал I порождён следующими элементами алгебры путей $k\mathcal{Q}$ колчана $\mathcal{Q}$:

$$\gamma_{\,\widehat{s+r}}\alpha_{s,n-3}\dots\alpha_{s,1}\beta_{\,\widehat{s-1}},\beta_{\,\widehat{s}}\gamma_{\,\widehat{s}}-\beta_{\,\widehat{s+r}}\gamma_{\,\widehat{s+r}}\quad(1\leqslant s\leqslant 2r),$$
$$\alpha_{s+1,i}\dots\alpha_{s+1,1}\beta_{\,\widehat{s}}\gamma_{\,\widehat{s}}\alpha_{s,n-3}\dots\alpha_{s,i}\quad(1\leqslant s\leqslant r,1\leqslant i\leqslant n-3).$$

Рассмотрим k-алгебру $R=k\mathcal{Q}/I$. В этом разделе мы напомним описание бимодульной резольвенты и аддитивной структуры алгебры когомологий Хохшильда алгебры R.

Через $\Lambda=R\otimes_k R^{\mathrm{op}}$ обозначим обёртывающую алгебру алгебры R. Через e_x обозначаем примитивный идемпотент алгебры R, ассоциированный с вершиной x колчана $\mathcal{Q}$. Тогда $\{e_x\otimes e_y\}_{x,y\in\mathcal{Q}_0}$ – полное множество ортогональных примитивных идемпотентов алгебры Λ. Через $P_{[x][y]}=\Lambda e_x\otimes e_y$ обозначим проективный Λ-модуль, соответствующий идемпотенту $e_x\otimes e_y$. Если w_1 – путь из вершины x_1 в вершину y_1, а w_2 – путь из вершины x_2 в вершину y_2, то умножение справа на $w_1\otimes w_2$ индуцирует гомоморфизм $(w_1\otimes w_2)^*:P_{[y_1][x_2]}\to P_{[x_1][y_2]}$, который мы будем обозначать через $w_1\otimes w_2$. Введём также вспомогательные обозначения:

$$\tau_{\,\widehat{i}}=\beta_{\,\widehat{i}}\gamma_{\,\widehat{i}},\ \mu_{i,j}=\alpha_{i,j}\dots\alpha_{i,1},\ \nu_{i,j}=\alpha_{i,n-3}\dots\alpha_{i,j}.$$

Замечание 1. Здесь и в дальнейшем мы, для единообразия обозначений, дополнительно предполагаем, что пустое произведение стрелок колчана отождествляется с подходящим идемпотентом алгебры R; например, $\mu_{i,0} = e_{i,1}$, $\alpha_{i,j-1} \dots \alpha_{i,j} = e_{i,j}$, $\nu_{i,n-2} = e_{i,n-2}$.

Введём k-линейное отображение $\sigma : R \to R$, удовлетворяющее условию $\sigma(xy) = \sigma(x)\sigma(y)$ и такое, что

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma(e_{i,j}) = e_{i+n-1,j},\ \sigma(\alpha_{i,j}) = \alpha_{i+n-1,j} & (1 \leqslant i \leqslant r, \\ & 1 \leqslant j \leqslant n-2), \\ \sigma(e_{\widehat{i}}) = e_{i+\widehat{n-1}+rn}, \sigma(\beta_{\widehat{i}}) = \beta_{i+\widehat{n-1}+rn} & (1 \leqslant i \leqslant 2r), \\ \sigma(\gamma_{\widehat{i}}) = -\gamma_{i+\widehat{n-1}+rn} & (1 \leqslant i \leqslant 2r, i \not\vdots r), \\ \sigma(\gamma_{\widehat{i}}) = \gamma_{i+\widehat{n-1}+rn} & (i \in \{r, 2r\}). \end{array}\right\} \quad (2.1)$$

Ясно, что σ – автоморфизм алгебры R, имеющий конечный порядок.

Будем обозначать через $\rho\Lambda$ категорию конечно порождённых проективных (левых) Λ-модулей. Введём следующий k-линейный функтор $\sigma : \rho\Lambda \to \rho\Lambda$. Пусть

$$V = \bigoplus_{l \in L} P_{[y_l][x_l]}.$$

Тогда

$$\sigma(V) = \bigoplus_{l \in L} P_{[\sigma(y_l)][x_l]}$$

(здесь $\sigma(x) = y \Leftrightarrow \sigma(e_x) = e_y$). Пусть V_1, V_2 – модули из $\rho\Lambda$,

$$V_1 = \bigoplus_{l \in L} P_{[y_l][x_l]},$$

$d : V_1 \to V_2$ – гомоморфизм Λ-модулей, такой, что

$$d|_{P_{[y_l][x_l]}} = \sum_{t \in T_l} u_{l,t} w_{l,t,1} \otimes w_{l,t,2},$$

где $u_{l,t} \in k$, $w_{l,t,1}, w_{l,t,2} \in R$. Тогда

$$\sigma(d)|_{P_{[\sigma(y_l)][x_l]}} = \sum_{t \in T_l} u_{l,t} \sigma(w_{l,t,1}) \otimes w_{l,t,2}.$$

В работе [1] дано следующее описание членов Q_t и дифференциалов d_t $(t \geqslant 0)$ бимодульной резольвенты алгебры R. Члены Q_t $(0 \leqslant t \leqslant 2n-4)$ описываются следующими формулами

$$Q_{2m} = \bigoplus_{i=1}^{r}\Big(\Big(\bigoplus_{j=1}^{n-2-m} P_{[i+m,j+m][i,j]}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j=n-1-m}^{n-2} P_{[i+m,j+m-(n-2)][i,j]}\Big)\Big) \oplus \bigoplus_{i=1}^{2r} P_{[\widehat{i+m(r+1)}][\,\widehat{i}\,]} \qquad (m=0,\dots,n-2),$$

$$Q_{2m+1} = \bigoplus_{i=1}^{r}\Big(\Big(\bigoplus_{j=1}^{n-3-m} P_{[i+m,j+m+1][i,j]}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{j=n-1-m}^{n-2} P_{[i+m+1,j+m-(n-2)][i,j]}\Big)\Big) \oplus \bigoplus_{i=1}^{2r} \Big(P_{[\,\widehat{i+m}][i,n-2-m]} \oplus P_{[i+m+1,m+1][\,\widehat{i}\,]}\Big) \qquad (m=0,\dots,n-3).$$

При этом члены, номера которых больше $2n-4$, получаются с помощью формулы $Q_{l(2n-3)+t} = \sigma^l(Q_t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2n-4,\ l \geqslant 1)$.

Пусть $\mu : Q_0 \to R$ – гомоморфизм, определённый на $w_1 \otimes w_2 \in P_{[x][x]}$, $x \in \mathcal{Q}_0$ по формуле $\mu(w_1 \otimes w_2) = w_1 w_2$. Гомоморфизмы $d_{2m} : Q_{2m+1} \to Q_{2m}$ $(0 \leqslant m \leqslant n-3)$ описываются на прямых слагаемых Q_{2m+1} следующим образом

$$d_{2m}\big|_{P_{[i+m,j+m+1][i,j]}} = e_{i+m,j+m+1} \otimes \alpha_{i,j} - \alpha_{i+m,j+m} \otimes e_{i,j} \quad (1 \leqslant j \leqslant n-3-m,\ 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$\begin{aligned} d_{2m}\big|_{P_{[i+m+1,j+m-(n-2)][i,j]}} &= \sum_{\ell=j}^{n-2} \mu_{i+m+1,j+m-(n-1)} \tau_{\,\widehat{i+m}} \nu_{i+m,\ell+m-(n-2)} \\ &\otimes \alpha_{i,\ell-1} \dots \alpha_{i,j} - \mu_{i+m+1,j+m-(n-1)} \beta_{\,\widehat{i+m(r+1)}} \otimes \gamma_{\,\widehat{i}}\nu_{i,j} \\ &+ \mu_{i+m+1,j+m-(n-1)} \beta_{\,\widehat{i+m(r+1)}+r} \otimes \gamma_{\,\widehat{i+r}}\nu_{i,j} \\ &- \sum_{\ell=n-1-m}^{j} \alpha_{i+m+1,j+m-(n-1)} \dots \alpha_{i+m+1,\ell+m-(n-2)} \otimes \mu_{i+1,\ell-1} \tau_{\,\widehat{i}}\nu_{i,j} \\ &(n-1-m \leqslant j \leqslant n-2,\ 1 \leqslant i \leqslant r-1), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
d_{2m}\big|_{P_{[m+1,j+m-(n-2)][r,j]}} &= \sum_{\ell=j}^{n-2} \mu_{m+1,j+m-(n-1)}\tau_{\widehat{m}}\nu_{m,\ell+m-(n-2)} \\
&\otimes \alpha_{r,\ell-1}\dots\alpha_{r,j} - \mu_{m+1,j+m-(n-1)}\beta_{r+\widehat{m(r+1)}} \otimes \gamma_{\widehat{r}}\nu_{i,j} \\
&+ \mu_{m+1,j+m-(n-1)}\beta_{\widehat{m(r+1)}} \otimes \gamma_{\widehat{2r}}\nu_{i,j} \\
&+ \sum_{\ell=n-1-m}^{j} \alpha_{m+1,j+m-(n-1)}\dots\alpha_{m+1,\ell+m-(n-2)} \otimes \mu_{1,\ell-1}\tau_{\widehat{r}}\nu_{r,j} \\
&(n-1-m \leqslant j \leqslant n-2), \\
d_{2m}\big|_{P_{[i+m+1,m+1][\widehat{i}]}} &= e_{i+m+1,m+1} \otimes \beta_{\widehat{i}} - \mu_{i+m+1,m}\beta_{i+\widehat{m(r+1)}} \otimes e_{\widehat{i}} \\
&- \sum_{\ell=n-1-m}^{n-2} \alpha_{i+m+1,m}\dots\alpha_{i+m+1,\ell+m-(n-2)} \otimes \mu_{i+1,\ell-1}\beta_{\widehat{i}} \\
&(0 \leqslant i \leqslant r-1), \\
d_{2m}\big|_{P_{[i+m+1,m+1][\widehat{i}]}} &= e_{i+m+1,m+1} \otimes \beta_{\widehat{i}} - \mu_{i+m+1,m}\beta_{i+\widehat{m(r+1)}} \otimes e_{\widehat{i}} \\
&(r \leqslant i \leqslant 2r-1), \\
d_{2m}\big|_{P_{[i+\widehat{m(r+1)}][i,n-2-m]}} &= e_{i+\widehat{m(r+1)}} \otimes \gamma_{\widehat{i}}\nu_{i,n-2-m} - \gamma_{i+\widehat{m(r+1)}} \\
&\otimes e_{i,n-2-m} \qquad (1 \leqslant i \leqslant r), \\
d_{2m}\big|_{P_{[i+\widehat{m(r+1)}][i,n-2-m]}} &= e_{i+\widehat{m(r+1)}} \otimes \gamma_{\widehat{i}}\nu_{i,n-2-m} - \gamma_{i+\widehat{m(r+1)}} \\
&\otimes e_{i,n-2-m} + \sum_{\ell=n-1-m}^{n-2} \gamma_{i+\widehat{m(r+1)}}\nu_{i+m,\ell+m-(n-2)} \otimes \alpha_{i,\ell-1}\dots\alpha_{i,n-2-m} \\
&(r+1 \leqslant i \leqslant 2r).
\end{aligned}
$$

Гомоморфизмы $d_{2m+1} : Q_{2m+2} \to Q_{2m+1}$ $(0 \leqslant m \leqslant n-3)$ описываются на прямых слагаемых Q_{2m+2} следующим образом

$$
\begin{aligned}
d_{2m+1}\big|_{P_{[i+m+1,j+m+1][i,j]}} &= \sum_{\ell=j}^{n-3-m} \mu_{i+m+1,j+m}\tau_{\widehat{i+m}}\nu_{i+m,\ell+m+1} \\
&\otimes \alpha_{i,\ell-1}\dots\alpha_{i,j} + \mu_{i+m+1,j+m}\beta_{i+\widehat{m(r+1)}} \otimes \alpha_{i,n-3-m}\dots\alpha_{i,j} \\
&+ \alpha_{i+m+1,j+m}\dots\alpha_{i+m+1,m+1} \otimes \gamma_{\widehat{i}}\nu_{i,j}
\end{aligned}
$$

$$+ \sum_{\ell=1}^{j} \alpha_{i+m+1,j+m} \dots \alpha_{i+m+1,\ell+m+1} \otimes \mu_{i+1,\ell-1} \tau_{\widehat{i}} \nu_{i,j}$$
$$(1 \leqslant j \leqslant n-3-m, 1 \leqslant i \leqslant r),$$
$$d_{2m+1}\big|_{P_{[i+m+1,j+m+1-(n-2)][i,j]}} = e_{i+m+1,j+m+1-(n-2)}$$
$$\otimes \alpha_{i,j} - \alpha_{i+m+1,j+m-(n-2)} \otimes e_{i,j}$$
$$(n-1-m \leqslant j \leqslant n-3, 1 \leqslant i \leqslant r),$$
$$d_{2m+1}\big|_{P_{[\ i+\widehat{(m+1)(r+1)}][\ \widehat{i}]}} = \gamma_{\ i+\widehat{(m+1)(r+1)}} \nu_{i+m+1,m+1} \otimes e_{\ \widehat{i}}$$
$$+ \sum_{\ell=1}^{n-3-m} \gamma_{\ i+\widehat{(m+1)(r+1)}} \nu_{i+m+1,\ell+m+1} \otimes \mu_{i+1,\ell-1} \beta_{\ \widehat{i}}$$
$$+ e_{\ i+\widehat{(m+1)(r+1)}} \otimes \mu_{i+1,n-3-m} \beta_{\ \widehat{i}} \qquad (1 \leqslant i \leqslant 2r);$$

кроме того, для $m=0$

$$d_1|_{P_{[i+1,1][i,n-2]}} = e_{i+1,1} \otimes \gamma_{\ \widehat{i}} - e_{i+1,1}$$
$$\otimes \gamma_{\widehat{i+r}} + \beta_{\ \widehat{i}} \otimes e_{i,n-2} - \beta_{\widehat{i+r}} \otimes e_{i,n-2}$$
$$(1 \leqslant i \leqslant r),$$

а для $m>0$

$$d_{2m+1}\big|_{P_{[i+m+1,m+1][i,n-2]}} = e_{i+m+1,m+1} \otimes \gamma_{\ \widehat{i}} - e_{i+m+1,m+1}$$
$$\otimes \gamma_{\widehat{i+r}} - \alpha_{i+m+1,m} \otimes e_{i,n-2} \qquad (1 \leqslant i \leqslant r),$$
$$d_{2m+1}\big|_{P_{[i+m+1,1][i,n-2-m]}} = \beta_{\ i+\widehat{m(r+1)}} \otimes e_{i,n-2-m} - \beta_{\ i+\widehat{m(r+1)}+r}$$
$$\otimes e_{i,n-2-m} + e_{i+m+1,1} \otimes \alpha_{i,n-2-m} \qquad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Наконец, гомоморфизм $d_{2n-4} : Q_{2n-3} \to Q_{2n-4}$ определим на прямых слагаемых $Q_{2n-3} = \sigma(Q_0)$ следующим образом

$$d_{2n-4}\big|_{P_{[i+n-1,j][i,j]}} = \sum_{\ell=j}^{n-2} \mu_{i+n-1,j-1} \tau_{\ \widehat{i+n-2}} \nu_{i+n-2,\ell} \otimes \alpha_{i,\ell-1} \dots \alpha_{i,j}$$
$$- \mu_{i+n-1,j-1} \beta_{\ i+\widehat{(n-2)(r+1)}} \otimes \gamma_{\ \widehat{i}} \nu_{i,j}$$
$$+ \mu_{i+n-1,j-1} \beta_{\ i+\widehat{(n-2)(r+1)}+r} \otimes \gamma_{\widehat{i+r}} \nu_{i,j}$$
$$- \sum_{\ell=1}^{j} \alpha_{i+n-1,j-1} \dots \alpha_{i+n-1,\ell} \otimes \mu_{i+1,\ell-1} \tau_{\ \widehat{i}} \nu_{i,j}$$

$$
\begin{aligned}
&\quad (1 \leqslant j \leqslant n-2, 1 \leqslant i \leqslant r-1),\\
&d_{2n-4}\big|_{P_{[n-1,j][r,j]}} = \sum_{\ell=j}^{n-2} \mu_{n-1,j-1}\tau_{\widehat{n-2}}\nu_{n-2,\ell} \otimes \alpha_{r,\ell-1}\dots\alpha_{r,j}\\
&\quad - \mu_{n-1,j-1}\beta_{\widehat{r+(n-2)(r+1)}} \otimes \gamma_{\widehat{r}}\nu_{r,j}\\
&\quad + \mu_{n-1,j-1}\beta_{\widehat{(n-2)(r+1)}} \otimes \gamma_{\widehat{2r}}\nu_{r,j}\\
&\quad + \sum_{\ell=1}^{j} \alpha_{n-1,j-1}\dots\alpha_{n-1,\ell} \otimes \mu_{1,\ell-1}\tau_{\widehat{r}}\nu_{r,j}\\
&\quad (1 \leqslant j \leqslant n-2),\\
&d_{2n-4}\big|_{P_{[\widehat{i+(n-1)(r+1)+r}][\widehat{i}]}} = \gamma_{\widehat{i+(n-1)(r+1)+r}}\mu_{i+n-1,n-3}\beta_{\widehat{i+(n-2)(r+1)}}\\
&\quad \otimes e_{\widehat{i}} + \sum_{\ell=1}^{n-2} \gamma_{\widehat{i+(n-1)(r+1)+r}}\nu_{i+n-1,\ell} \otimes \mu_{i+1,\ell-1}\beta_{\widehat{i}}\\
&\quad - e_{\widehat{i+(n-1)(r+1)+r}} \otimes \gamma_{\widehat{i+1}}\mu_{i+1,n-3}\beta_{\widehat{i}} \qquad (0 \leqslant i \leqslant r-1),\\
&d_{2n-4}\big|_{P_{[\widehat{i+(n-1)(r+1)+r}][\widehat{i}]}} = -\gamma_{\widehat{i+(n-1)(r+1)+r}}\mu_{i+n-1,n-3}\beta_{\widehat{i+(n-2)(r+1)}}\\
&\quad \otimes e_{\widehat{i}} + \sum_{\ell=1}^{n-2} \gamma_{\widehat{i+(n-1)(r+1)+r}}\nu_{i+n-1,\ell} \otimes \mu_{i+1,\ell-1}\beta_{\widehat{i}}\\
&\quad + e_{\widehat{i+(n-1)(r+1)+r}} \otimes \gamma_{\widehat{i+1}}\mu_{i+1,n-3}\beta_{\widehat{i}} \qquad (r \leqslant i \leqslant 2r-1).
\end{aligned}
$$

Далее, определим гомоморфизмы, номера которых больше $2n-4$, с помощью формулы $d_{l(2n-3)+t} = \sigma^l(d_t)$ $(0 \leqslant t \leqslant 2n-4, l \geqslant 1)$.

Тогда последовательность

$$0 \leftarrow R \xleftarrow{\mu} Q_0 \xleftarrow{d_0} Q_1 \xleftarrow{d_1} \dots \tag{2.2}$$

является минимальной Λ-проективной резольвентой модуля R.

Следующие две теоремы описывают аддитивную структуру алгебры когомологий Хохшильда алгебры R.

Теорема 1. *Пусть* $\mathrm{HH}^s(R)$ – *s-ая группа когомологий Хохшильда алгебры R с коэффициентами в R. Предположим, что $r > 1$. Тогда* $\dim_k \mathrm{HH}^s(R)$ *принимает следующие значения:*

1, *если выполнено одно из условий:*

$$\left.\begin{array}{c} s \in \{2m + l(2n-3), 2m+1+l(2n-3)\}, 0 \leqslant m \leqslant n-3, \\ m + l(n-1) = ar, a \in \mathbb{Z}, a(r+1) + l \,\vdots\, 2 \text{ и} \\ \text{выполнено одно из условий: } \operatorname{char} k = 2 \text{ или } l \,\vdots\, 2; \end{array}\right\} \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{array}{c} s \in \{2m + 1 + l(2n-3), 2m+2+l(2n-3)\}, 0 \leqslant m \leqslant n-3, \\ m + l(n-1) = ar, a \in \mathbb{Z}, a(r+1) + l \not\vdots\, 2 \text{ и} \\ \text{выполнено одно из условий: } \operatorname{char} k = 2 \text{ или } l \not\vdots\, 2; \end{array}\right\} \tag{2.4}$$

$$\left.\begin{array}{c} s \in \{(l+1)(2n-3) - 1, (l+1)(2n-3)\}, \\ (l+1)(n-1) - 1 = ar, a \in \mathbb{Z}, a(r+1) + l \,\vdots\, 2; \end{array}\right\} \tag{2.5}$$

$$\left.\begin{array}{c} s \in \{(l+1)(2n-3) - 1, (l+1)(2n-3)\}, \\ (l+1)(n-1) - 1 = ar, a \in \mathbb{Z}, l \not\vdots\, 2, n-1 \,\vdots\, \operatorname{char} k; \end{array}\right\} \tag{2.6}$$

0, *если не выполняется ни одно из условий, описанных выше.*

Теорема 2. *Пусть* $\mathrm{HH}^s(R)$ *–* s*-ая группа когомологий Хохшильда алгебры* R *с коэффициентами в* R*. Предположим, что* $r = 1$*. Тогда* $\dim_k \mathrm{HH}^s(R)$ *принимает следующие значения:*

1, *если выполнено одно из условий:*

$$s = 2m + l(2n-3), 1 \leqslant m \leqslant n-3; \tag{2.7}$$

$$s = 2m + 1 + l(2n-3), 0 \leqslant m \leqslant n-3; \tag{2.8}$$

$$s \in \{(l+1)(2n-3) - 1, (l+1)(2n-3)\}, l \geqslant 0, l \,\vdots\, 2; \tag{2.9}$$

$$s \in \{(l+1)(2n-3) - 1, (l+1)(2n-3)\}, l \not\vdots\, 2, n-1 \not\vdots\, \operatorname{char} k; \tag{2.10}$$

2, *если*

$$s \in \{(l+1)(2n-3) - 1, (l+1)(2n-3)\}, l \not\vdots\, 2, n-1 \,\vdots\, \operatorname{char} k; \tag{2.11}$$

$n-1$, *если* $s = 0$*;*

0, *если не выполняется ни одно из условий, описанных выше.*

3. Вспомогательные коэффициенты

В следующих параграфах мы определим некоторые элементы $\mathrm{HH}^*(R)$, докажем, что они порождают эту алгебру, и получим соотношения, связывающие их. Чтобы формулы, описывающие эти соотношения, были проще, нам надо будет использовать при определении элементов $\mathrm{HH}^*(R)$ некоторые коэффициенты. Этот параграф посвящён определению этих коэффициентов и доказательству некоторых формул, которые понадобятся нам в последующих параграфах.

Для $l \geqslant 0$ определим функцию $p_l : \mathbb{Z}_r \to \mathbb{Z}$ следующим образом:

$$p_l(i) = \Big|\{t \mid 0 \leqslant t \leqslant l-1, i + t(n-1) \vdots r\}\Big|. \tag{3.1}$$

Ясно, что $\sum\limits_{i=1}^{r} p_l(i) = l$.

Пусть $l \geqslant 0$. Введём следующее обозначение:

$$\eta_l = (-1)^{\sum\limits_{t=1}^{\left[\frac{l}{2}\right]} \left|\{q \mid 0 \leqslant q \leqslant n-2, q+(l-2t)(n-1) \vdots r\}\right|}.$$

Лемма 1. 1) *Пусть* $s = 2m + l(2n-3)$, $0 \leqslant m \leqslant n-2$, $m + l(n-1) = ar$, $a \in \mathbb{Z}$. *Тогда*

$$\sum_{q=m+1}^{n-1} p_l(q) + \sum_{q=1}^{m} p_{l+1}(q) = a.$$

2) $p_{l+1}(q) = \begin{cases} p_l(q+n-1)+1, & \textit{если } q \vdots r, \\ p_l(q+n-1), & \textit{в противном случае.} \end{cases}$

3) $\eta_{l+1} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{n-2} p_l(q)} \eta_l$.

4) $p_{l_1+l_2}(q) = p_{l_1}(q + l_2(n-1)) + p_{l_2}(q)$.

5) $\eta_{l_1}\eta_{l_2} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{l_2(n-1)-1} p_{l_1}(q)} \eta_{l_1+l_2}$.

Доказательство. Доказательство пунктов 1)–4) предоставляется читателю. Докажем пункт 5). Используя пункты 3) и 4), получаем:

$$\begin{aligned}
\eta_{l_1} &= (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{n-2} p_{l_1}(q)} \eta_{l_1+1} = \dots = (-1)^{\sum\limits_{t=0}^{l_2-1}\sum\limits_{q=0}^{n-2} p_{l_1+t}(q)} \eta_{l_1+l_2} \\
&= (-1)^{\sum\limits_{t=0}^{l_2-1}\sum\limits_{q=t(n-1)}^{(t+1)(n-1)-1} p_{l_1}(q) + \sum\limits_{t=0}^{l_2-1}\sum\limits_{q=0}^{n-2} p_t(q)} \eta_{l_1+l_2} \\
&= (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{l_2(n-1)-1} p_{l_1}(q)} (-1)^{\sum\limits_{t=0}^{l_2-2}(l_2-1-t)\left|\{q \mid 0\leqslant q\leqslant n-2,\, q+t(n-1) \,\vdots\, r\}\right|} \eta_{l_1+l_2} \\
&= (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{l_2(n-1)-1} p_{l_1}(q)} \eta_{l_2}\eta_{l_1+l_2}.
\end{aligned}$$

□

4. Вычисление трансляций

Положим $\delta^s = \mathrm{Hom}_\Lambda(d_s, R) : \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_s, R) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{s+1}, R)$, где d_s – это дифференциал из резольвенты (2.2). Любой s-коцикл $f \in \operatorname{Ker}\delta^s$ поднимается (однозначно с точностью до гомотопии) до цепного отображения комплексов $\{\phi_t : Q_{s+t} \to Q_t\}_{t\geqslant 0}$. Гомоморфизм ϕ_t назовем t-ой трансляцией коцикла f и будем обозначать через $T^t(f)$. Для коциклов $f \in \operatorname{Ker}\delta^s$ и $g \in \operatorname{Ker}\delta^t$ имеем

$$\mathrm{cl}\, g \cdot \mathrm{cl}\, f = \mathrm{cl}\,(\mu T^0(g) T^t(f)).$$

Поэтому для вычисления произведений в алгебре когомологий Хохшильда требуются трансляции некоторых её элементов. Данная часть работы посвящена вычислению трансляций, которые нам понадобятся для вычисления соотношений в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$.

Замечание 2. Далее для s-коцикла $f \in \operatorname{Ker}\delta^s$ мы будем часто обозначать его когомологический класс $\mathrm{cl}\, f \in \mathrm{HH}^s(R)$ также через f.

Определим 1-коцикл $\varepsilon_1 \in \operatorname{Ker}\delta^1$ следующим образом:

$$\varepsilon_1 = (\gamma_{\widehat{r}} + \gamma_{\widehat{2r}})^*.$$

Пусть $s = 2m + l(2n-3)$, $0 \leqslant m \leqslant n-2$, $m + l(n-1) = ar$, $a \in \mathbb{Z}$, $a(r+1)+l \,\vdots\, 2$ и выполнено одно из условий: $l \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$. Определим

s-коцикл $f_s \in \operatorname{Ker} \delta^s$ следующим образом:

$$f_s = \eta_l \left(\sum_{i=1}^{r} (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m-1} p_l(q)} \left(\sum_{j=1}^{n-2-m} \alpha_{i,j+m-1} \ldots \alpha_{i,j} + e_{\widehat{i-1}} + e_{\widehat{i+r-1}} \right) \right)^*.$$

Пусть $s = (l+1)(2n-3)$, $(l+1)(n-1) = ar+1$, $a \in \mathbb{Z}$, $a(r+1)+l \,\vdots\, 2$ и выполнено одно из условий: $l \,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$. Определим s-коцикл $f_{\varepsilon,s} \in \operatorname{Ker} \delta^s$ следующим образом:

$$f_{\varepsilon,s} = \eta_{l+1} (\gamma_{\widehat{2r}} \nu_{r,1} \beta_{\widehat{2r-1}})^*.$$

Пусть $s = (l+1)(2n-3)-1$, $(l+1)(n-1) = ar+1$, $a \in \mathbb{Z}$, $l \not\,\vdots\, 2$, $n-1 \,\vdots\, \operatorname{char} k$. Определим s-коцикл $h_s \in \operatorname{Ker} \delta^s$ следующим образом:

$$h_s = \frac{-\eta_l}{r} \left(\sum_{i=1}^{r} (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+n-3} p_l(q)} \sum_{j=1}^{n-2} e_{i,j} \right)^*.$$

Пусть $s = (l+1)(2n-3)$, $(l+1)(n-1) = ar+1$, $a \in \mathbb{Z}$, $l \not\,\vdots\, 2$. Определим s-коцикл $h_{\varepsilon,s} \in \operatorname{Ker} \delta^s$ следующим образом:

$$h_{\varepsilon,s} = (-1)^n \eta_{l+1} \left(\sum_{i=1}^{r} (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i-1} p_{l+1}(q)} \sum_{j=1}^{n-2} \mu_{i+1,j-1} \tau_{\hat{i}} \nu_{i,j} \right)^*.$$

Пусть $s = 2m+1+l(2n-3)$, $0 \leqslant m \leqslant n-3$, $m + l(n-1) = ar$, $a \in \mathbb{Z}$, $a(r+1)+l \not\,\vdots\, 2$ и выполнено одно из условий: $l \not\,\vdots\, 2$ или $\operatorname{char} k = 2$. Определим s-коцикл $g_s \in \operatorname{Ker} \delta^s$ следующим образом:

$$g_s = (-1)^{m-1} \eta_l \left(\sum_{i=1}^{r} (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m} p_l(q)} \left(\sum_{j=n-1-m}^{n-2} \mu_{i+1,j+m-(n-1)} \tau_{\hat{i}} \nu_{i,j} \right.\right.$$
$$\left.\left. + \gamma_{\hat{i}} \nu_{i,n-2-m} + (-1)^{p_l(i+m)} \mu_{i,m} \beta_{\widehat{i-1}} \right) \right)^*.$$

Пусть $r = 1$. Здесь и далее, чтобы упростить обозначения, мы будем для $r = 1$ опускать первый индекс в обозначениях $e_{i,j}$, $P_{i,j}$ и тому подобных. Для $1 \leqslant j \leqslant n-2$ через $\varepsilon_0^{(j)}$ обозначим 0-коцикл, равный $(-1)^{n-1} \mu_{j-1} \tau_{\hat{1}} \nu_j$ на $P_{[j][j]}$ и равный 0 на остальных прямых слагаемых Q_0.

Из результатов работы [1] следует, что только что определённые ε_1, f_s, $f_{\varepsilon,s}$, h_s, $h_{\varepsilon,s}$, g_s и $\varepsilon_0^{(j)}$ $(1 \leqslant j \leqslant n-2)$ действительно являются коциклами.

Замечание 3. Далее на протяжении всей статьи мы будем считать, что $s = 2m + l(2n-3)$ или $s = 2m+1+l(2n-3)$, где $0 \leqslant s - l(2n-3) \leqslant 2n-4$, за исключением случаев, когда выражение s через m и l указано явно. Какой вариант имеет место в каждом конкретном случае, будет ясно из других условий, наложенных на s.

Предложение 1. *Пусть определён элемент f_s. Введём следующие обозначения:*

$\chi_{x,y} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{x+y+m-1} p_l(q)}$,

$\chi'_{x,y} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{x+n-2} p_l(q) + \sum\limits_{q=x}^{x+y-1} p_{l+1}(q) + y}$ $(x, y \in \mathbb{Z})$, $\widetilde{f}_s = \eta_l f_s$. *Тогда $T^t(\widetilde{f}_s) : Q_{t+s} \to Q_t$ можно задать на прямых слагаемых Q_{t+s} следующим образом:*

1) *если $t = 2w$, $0 \leqslant w \leqslant n-2-m$, то:*

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w,j+m+w][i,j]}} = \chi_{i,w} e_{i+w,j+m+w} \otimes \alpha_{i,j+m-1} \dots \alpha_{i,j}$$
$$(1 \leqslant j \leqslant n-2-m-w, 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w,j+m+w-(n-2)][i,j]}} = 0$$
$$(n-1-m-w \leqslant j \leqslant n-2-w, 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w,j+m+w-(n-2)][i,j]}}$$
$$= \chi_{i,w} \alpha_{i+w,j+m+w-(n-1)} \dots \alpha_{i+w,j+w-(n-2)} \otimes e_{i,j}$$
$$(n-1-w \leqslant j \leqslant n-2, 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[\widehat{i+w(r+1)}][\widehat{i}]}} = \chi_{i,w+1} e_{\widehat{i+w(r+1)}} \otimes e_{\widehat{i}} \quad (1 \leqslant i \leqslant 2r);$$

2) *если $t = 2w+1$, $0 \leqslant w \leqslant n-3-m$, то:*

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w,j+m+w+1][i,j]}} = \chi_{i,w} e_{i+w,j+m+w+1} \otimes \alpha_{i,j+m-1} \dots \alpha_{i,j}$$
$$(1 \leqslant j \leqslant n-3-m-w, 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[\widehat{i+w}][i,n-2-m-w]}} = \chi_{i,w+1} e_{\widehat{i+w}} \otimes \alpha_{i,n-3-w} \dots \alpha_{i,n-2-m-w}$$
$$(1 \leqslant i \leqslant 2r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w+1,j+m+w-(n-2)][i,j]}} = \chi_{i,w+1}(\mu_{i+w+1,j+m+w-(n-1)}\beta_{\,i+w\widehat{(r+1)}+r}$$
$$\otimes \alpha_{i,n-3-w}\dots\alpha_{i,j} - \mu_{i+w+1,j+m+w-(n-1)}\beta_{\,i+w\widehat{(r+1)}}$$
$$\otimes \alpha_{i,n-3-w}\dots\alpha_{i,j})$$
$$(n-1-m-w \leqslant j \leqslant n-2-w, 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w+1,j+m+w-(n-2)][i,j]}}$$
$$= \chi_{i,w+1}\alpha_{i+w+1,j+m+w-(n-1)}\dots\alpha_{i+w+1,j+w-(n-2)}$$
$$\otimes e_{i,j} \quad (n-1-w \leqslant j \leqslant n-2, 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w+1,m+w+1][\,\widehat{i}]}}$$
$$= \chi_{i,w+1}\Bigg(\sum_{z=1}^{m}\alpha_{i+w+1,m+w}\dots\alpha_{i+w+1,z+w+1}\otimes\mu_{i+1,z-1}\beta_{\,\widehat{i}}$$
$$+ \alpha_{i+w+1,m+w}\dots\alpha_{i+w+1,w+1}\otimes e_{\,\widehat{i}}\Bigg) \quad (1 \leqslant i \leqslant 2r);$$

3) *если* $t = 2n-3-2m+2w$, $0 \leqslant w \leqslant m-1$, *то:*

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w+n-1-m,j+w][i,j]}}$$
$$= \chi'_{i,w}(\mu_{i+w+n-1-m,j+w-1}\beta_{\,i+(w+n\widehat{-2-m})(r+1)+r}$$
$$\otimes \alpha_{i,m-w-1}\dots\alpha_{i,j} - \mu_{i+w+n-1-m,j+w-1}\beta_{\,i+(w+n\widehat{-2-m})(r+1)}$$
$$\otimes \alpha_{i,m-w-1}\dots\alpha_{i,j}) \quad (1 \leqslant j \leqslant m-w, 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w+n-1-m,j+w][i,j]}}$$
$$= \chi'_{i,w}\alpha_{i+w+n-1-m,j+w-1}\dots\alpha_{i+w+n-1-m,j+w-m}$$
$$\otimes e_{i,j} \quad (m-w+1 \leqslant j \leqslant n-2-w, 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w+n-1-m,j+w-(n-2)][i,j]}} = 0 \quad (n-1-w \leqslant j \leqslant n-2, 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[\,i+(w+n\widehat{-1-m})(r+1)+r][\,\widehat{i}]}}$$
$$= \chi'_{i,w+1}(e_{\,i+(w+n\widehat{-1-m})(r+1)+r}\otimes\mu_{i+1,m-w-1}\beta_{\,\widehat{i}}$$
$$+ \sum_{z=1}^{m-w-1}\gamma_{\,i+(w+n\widehat{-1-m})(r+1)+r}\nu_{i+w+n-1-m,z+w+n-1-m}$$
$$\otimes \mu_{i+1,z-1}\beta_{\,\widehat{i}} + \gamma_{\,i+(w+n\widehat{-1-m})(r+1)+r}\nu_{i+w+n-1-m,w+n-1-m}\otimes e_{\,\widehat{i}})$$
$$(1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[\ i+(w+n-\widehat{1-m})(r+1)+r][\ \widehat{i}]}}$$
$$= -\chi'_{i,w+1}(e_{\ i+(w+n-\widehat{1-m})(r+1)+r} \otimes \mu_{i+1,m-w-1}\beta_{\ \widehat{i}}$$
$$+ \sum_{z=1}^{m-w-1} \gamma_{\ i+(w+n-\widehat{1-m})(r+1)+r}\nu_{i+w+n-1-m,z+w+n-1-m}$$

$$\otimes \mu_{i+1,z-1}\beta_{\ \widehat{i}} + \gamma_{\ i+(w+n-\widehat{1-m})(r+1)+r}\nu_{i+w+n-1-m,w+n-1-m} \otimes e_{\ \widehat{i}})$$
$(r+1 \leqslant i \leqslant 2r)$;

4) *если* $t = 2n-2-2m+2w$, $0 \leqslant w \leqslant m-1$, *то:*

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w+n-1-m,j+w+1][i,j]}} = 0 \qquad (1 \leqslant j \leqslant m-w-1, 1 \leqslant i \leqslant r),$$
$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w+n-1-m,j+w+1][i,j]}}$$
$$= \chi'_{i,w}\alpha_{i+w+n-1-m,j+w} \ldots \alpha_{i+w+n-1-m,j+w+1-m}$$
$$\otimes e_{i,j} \qquad (m-w \leqslant j \leqslant n-3-w, 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[\ i+(w+n\widehat{-1-}m)(r+1)][i,n-2-w]}} = \chi'_{i,w+1}(\sum_{z=n-2-w}^{n-2} \gamma_{\ i+(w+n\widehat{-1-}m)(r+1)}$$
$$\nu_{i+w+n-1-m,z+w-m+1} \otimes \alpha_{i,z-1} \ldots \alpha_{i,n-2-w} - e_{\ i+(w+n\widehat{-1-}m)(r+1)}$$
$$\otimes \gamma_{\ \widehat{i}}\nu_{i,n-2-w}) \qquad (1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[\ i+(w+n\widehat{-1-}m)(r+1)][i,n-2-w]}} = \chi'_{i,w+1}(\sum_{z=n-2-w}^{n-2} \gamma_{\ i+(w+n\widehat{-1-}m)(r+1)}$$
$$\nu_{i+w+n-1-m,z+w-m+1} \otimes \alpha_{i,z-1} \ldots \alpha_{i,n-2-w} + e_{\ i+(w+n\widehat{-1-}m)(r+1)}$$
$$\otimes \gamma_{\ \widehat{i}}\nu_{i,n-2-w}) \qquad (r+1 \leqslant i \leqslant 2r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w+n-m,j+w-(n-2)][i,j]}}$$
$$= -\chi'_{i,w+1}(\mu_{i+w+n-m,j+w-n}\beta_{\ i+(w+n\widehat{-1-}m)(r+1)}$$
$$\otimes \gamma_{\ \widehat{i}}\nu_{i,j} + \mu_{i+w+n-m,j+w-n}\beta_{\ i+(w+n-\widehat{1-m})(r+1)+r} \otimes \gamma_{\ \widehat{i+r}}\nu_{i,j})$$
$$(n-1-w \leqslant j \leqslant n-2, 1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w+n-m,w+1][\ \widehat{i}]}} = -\chi'_{i,w+1}\mu_{i+w+n-m,w}\beta_{\ i+(w+n\widehat{-1-}m)(r+1)}$$
$$\otimes e_{\ \widehat{i}} \qquad (1 \leqslant i \leqslant r),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s)\big|_{P_{[i+w+n-m,w+1][\,\widehat{i}\,]}} = \chi'_{i,w+1}\mu_{i+w+n-m,w}\beta_{\,i+(w+\widehat{n-1-m})(r+1)}\otimes e_{\,\widehat{i}}$$
$(r+1 \leqslant i \leqslant 2r)$;

5) *если* $t = u + v(2n-3)$, *где* $0 \leqslant u \leqslant 2n-4$ *и* $v \geqslant 1$, *то* $T^t(\widetilde{f}_s) = (-1)^{v(m+a)}\sigma^v(T^u(\widetilde{f}_s))$, *где* $a = \frac{m+l(n-1)}{r}$. *При этом* $T^u(\widetilde{f}_s)$ *вычисляется по формулам, указанным в пунктах* 1.1–1.4.

Доказательство состоит в проверке равенств

$$\mu T^0(\widetilde{f}_s) = \widetilde{f}_s \quad \text{и} \quad d_t T^{t+1}(\widetilde{f}_s) = T^t(\widetilde{f}_s) d_{t+s}$$

для всех $t \geqslant 0$. Если $t = u + v(2n-3)$, где $0 \leqslant u \leqslant 2n-4$ и $v \geqslant 1$, то

$$d_t T^{t+1}(\widetilde{f}_s) = (-1)^{v(a+m)}\sigma^v(d_u T_{u+1}(\widetilde{f}_s)),$$

$$T^t(\widetilde{f}_s) d_{t+s} = (-1)^{v(a+m)}\sigma^v(T^u(\widetilde{f}_s) d_{u+s}).$$

Поэтому достаточно проверить равенство $d_t T_{t+1}(\widetilde{f}_s) = T^t(\widetilde{f}_s) d_{t+s}$ для $0 \leqslant t \leqslant 2n-4$. Проверка осуществляется прямыми, хотя и громоздкими, вычислениями с помощью формул для дифференциалов d_t и пункта 1) леммы 1. Это предоставляется сделать читателю.

Предложение 2. 1) *Пусть определён элемент* h_s. *Положим* $\widetilde{h}_s = -\eta_l r h_s$. *Тогда* $T^0(\widetilde{h}_s) : Q_s \to Q_0$ *и* $T^1(\widetilde{h}_s) : Q_{s+1} \to Q_1$ *можно задать на прямых слагаемых* Q_s *и* Q_{s+1} *соответственно следующим образом:*

$$T^0(\widetilde{h}_s)\big|_{P_{[i,j][i,j]}} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+n-3} p_l(q)} e_{i,j}\otimes e_{i,j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n-2),$$

$$T^0(\widetilde{h}_s)\big|_{P_{[\,\widehat{i+r}][\,\widehat{i}\,]}} = 0 \qquad (1 \leqslant i \leqslant 2r);$$

$$\begin{aligned}T^1(\widetilde{h}_s)\big|_{P_{[i+1,j][i,j]}} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+n-2} p_l(q)} \Big(&\sum_{\ell=j}^{n-3}(\ell-j+1)\mu_{i+1,j-1}\tau_{\,\widehat{i}}\nu_{i,\ell+1}\\ &\otimes \alpha_{i,\ell-1}\dots\alpha_{i,j} - j\mu_{i+1,j-1}\beta_{\,\widehat{i}}\otimes\nu_{i,j} - j\mu_{i+1,j-1}\otimes\gamma_{\,\widehat{i}}\nu_{i,j}\\ &-\sum_{\ell=1}^{j-1}(j-l)\alpha_{i+1,j-1}\dots\alpha_{i+1,\ell+1}\otimes\mu_{i+1,\ell-1}\tau_{\,\widehat{i}}\nu_{i,j}\Big)\end{aligned}$$
$(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n-2)$,

$$T^1(\widetilde{h}_s)\big|_{P_{[\widehat{i+r+1}][\widehat{i}]}} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+n-1} p_l(q)} \Big(\sum_{\ell=1}^{n-3} \ell\gamma_{\widehat{i+r+1}}\nu_{i+1,\ell+1} \otimes \mu_{i+1,\ell-1}\beta_{\widehat{i}}$$
$$- e_{\widehat{i+r+1}} \otimes \mu_{i+1,n-3}\beta_{\widehat{i}}\Big) \quad (0 \leqslant i \leqslant r-1),$$
$$T^1(\widetilde{h}_s)\big|_{P_{[\widehat{i+1}][\widehat{i+r}]}} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+n-1} p_l(q)} \Big(\sum_{\ell=1}^{n-3} \ell\gamma_{\widehat{i+1}}\nu_{i+1,\ell+1} \otimes \mu_{i+1,\ell-1}\beta_{\widehat{i+r}}$$
$$- e_{\widehat{i+1}} \otimes \mu_{i+1,n-3}\beta_{\widehat{i+r}}\Big) \quad (0 \leqslant i \leqslant r-1).$$

2) *Пусть определён элемент* g_s. *Положим* $\widetilde{g}_s = (-1)^{m-1}\eta_l g_s$. *Тогда* $T^0(\widetilde{g}_s) : Q_s \to Q_0$ *и* $T^1(\widetilde{g}_s) : Q_{s+1} \to Q_1$ *можно задать на прямых слагаемых* Q_s *и* Q_{s+1} *соответственно следующим образом:*

$$T^0(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[i,j+m+1][i,j]}} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n-3-m),$$
$$T^0(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[i+1,j+m-(n-2)][i,j]}} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m} p_l(q)} \mu_{i+1,j+m-(n-1)} \otimes \tau_{\widehat{i}}\nu_{i,j}$$
$$(1 \leqslant i \leqslant r, n-1-m \leqslant j \leqslant n-2),$$
$$T^0(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[\widehat{i}][i,n-2-m]}} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m} p_l(q)} e_{\widehat{i}} \otimes \gamma_{\widehat{i}}\nu_{i,n-2-m} \quad (1 \leqslant i \leqslant r),$$
$$T^0(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[\widehat{i}][i,n-2-m]}} = 0 \quad (r+1 \leqslant i \leqslant 2r),$$
$$T^0(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[i+1,m+1][\widehat{i}]}} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m} p_l(q)} \mu_{i+1,m} \otimes \beta_{\widehat{i}} \quad (0 \leqslant i \leqslant r-1),$$
$$T^0(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[i+1,m+1][\widehat{i}]}} = 0 \quad (r \leqslant i \leqslant 2r-1);$$
$$T^1(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[i+1,j+m+1][i,j]}} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant r-1, 1 \leqslant j \leqslant n-3-m),$$
$$T^1(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[1,j+m+1][r,j]}} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{m} p_l(q)} \sum_{\ell=1}^{j} \alpha_{1,j+m}\dots\alpha_{1,\ell+1} \otimes \mu_{1,\ell-1}\tau_{\widehat{r}}\nu_{r,j}$$
$$(1 \leqslant j \leqslant n-3-m),$$

$$T^1(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[\,\widehat{i+1}][\,\widehat{i}]}} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m+1} p_l(q)} (e_{\,\widehat{i+1}} \otimes \mu_{i+1,n-3}\beta_{\,\widehat{i}}$$
$$+ \sum_{\ell=1}^{n-3} \gamma_{\,\widehat{i+1}}\nu_{i+1,\ell+1} \otimes \mu_{i+1,\ell-1}\beta_{\,\widehat{i}}) \quad (0 \leqslant i \leqslant r-1),$$
$$T^1(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[\,\widehat{i+1}][\,\widehat{i}]}} = 0 \quad (r \leqslant i \leqslant 2r-1),$$
$$T^1(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[i+1,j+m-(n-3)][i,j]}} = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant r, n-1-m \leqslant j \leqslant n-2),$$
$$T^1(\widetilde{g}_s)\big|_{P_{[i+1,1][i,n-2-m]}} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m} p_l(q)+1} e_{i+1,1} \otimes \gamma_{\,\widehat{i}}\nu_{i,n-2-m} \quad (1 \leqslant i \leqslant r).$$

Доказательство. Доказательство состоит в проверке равенств $\mu T^0(b) = b$ и $d_0T^1(b) = T^0(b)d_s$ для $b \in \{\widetilde{g}_s, \widetilde{h}_s\}$. Проверка осуществляется прямыми, хотя и громоздкими, вычислениями с помощью формул для дифференциалов d_t, и это предоставляется сделать читателю. □

5. Образующие

В этом параграфе мы предъявим некоторое множество элементов, которые порождают алгебру $\mathrm{HH}^*(R)$. Это множество будет включать в себя бесконечное число элементов, но далее будет показано, как в нём можно выделить конечное множество образующих.

Для начала докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2. 1) *Пусть* $s = 2m+1+l(2n-3)$, $0 \leqslant m \leqslant n-3$, $m+l(n-1) = ar$, $a \in \mathbb{Z}$, $a(r+1)+l\,\vdots\,2$ *и выполнено одно из условий:* $l\,\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char} k = 2$. *Предположим, что для* $w \in \operatorname{Ker}\delta^s$ *выполнено*

$$\omega = \sum_{i=1}^{r}\Bigg(\sum_{j=1}^{n-3-m} \varkappa_{i,j}(\alpha_{i,j+m}\dots\alpha_{i,j})^* + \varphi_i\Bigg(\sum_{j=n-1-m}^{n-2} \mu_{i+1,j+m-(n-1)}\tau_{\,\widehat{i}}\nu_{i,j}$$
$$- \gamma_{\,\widehat{i}}\nu_{i,n-2-m} + \mu_{i+1,m}\beta_{\,\widehat{i}}\Bigg)^* + \psi_i(\gamma_{\,\widehat{i}}\nu_{i,n-2-m} + \gamma_{\,\widehat{i+r}}\nu_{i,n-2-m})^*$$
$$+ \zeta_i(\mu_{i+1,m}\beta_{\,\widehat{i}} + \mu_{i+1,m}\beta_{\,\widehat{i+r}})^*\Bigg),$$

где $\varkappa_{i,j}, \varphi_i, \psi_i, \zeta_i \in k$. *Тогда* $\omega \in \operatorname{Im}\delta^{s-1}$ *равносильно тому, что выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^{r}(-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m-1} p_l(q)}\left(\sum_{j=1}^{n-3-m}\varkappa_{i,j} + (-1)^{p_l(i+m)}(\psi_i+\zeta_i)\right) = 0. \tag{5.1}$$

2) *Пусть* $s=(l+1)(2n-3)$, $(l+1)(n-1)=ar+1$, $a\in\mathbb{Z}$, $a(r+1)+l\,\vdots\,2$ *и выполнено одно из условий:* $l\,\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char}k=2$. *Предположим, что для* $w\in\operatorname{Ker}\delta^s$ *выполнено*

$$\omega = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n-2}\varkappa_{i,j}(\mu_{i+1,j-1}\tau_{\hat{i}}\nu_{i,j})^* + \sum_{i=1}^{2r}\varphi_{\hat{i}}(\gamma_{\widehat{i+1}}\nu_{i+1,1}\beta_{\hat{i}})^*,$$

где $\varkappa_{i,j}, \varphi_{\hat{i}} \in k$. *Тогда* $\omega \in \operatorname{Im}\delta^{s-1}$ *равносильно тому, что выполнено равенство*

$$\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+n-1} p_l(q)}(\varphi_{\widehat{i+r}}-\varphi_{\hat{i}}) = 0. \tag{5.2}$$

3) *Пусть* $s=(l+1)(2n-3)$, $(l+1)(n-1)=ar+1$, $a\in\mathbb{Z}$, $l\not\vdots\,2$, $n-1\,\vdots\,\operatorname{char}k$. *Предположим, что для* $w\in\operatorname{Ker}\delta^s$ *выполнено*

$$\omega = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n-2}\varkappa_{i,j}(\mu_{i+1,j-1}\tau_{\hat{i}}\nu_{i,j})^*,$$

где $\varkappa_{i,j} \in k$. *Тогда* $\omega \in \operatorname{Im}\delta^{s-1}$ *равносильно тому, что выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^{r}(-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i-1} p_{l+1}(q)}\sum_{j=1}^{n-2}\varkappa_{i,j} = 0. \tag{5.3}$$

4) *Пусть* $s=2m+l(2n-3)$, $1\leqslant m\leqslant n-2$, $m+l(n-1)=ar+1$, $a\in\mathbb{Z}$, $a(r+1)+l\not\vdots\,2$ *и выполнено одно из условий:* $l\not\vdots\,2$ *или* $\operatorname{char}k=2$. *Предположим, что для* $w\in\operatorname{Ker}\delta^s$ *выполнено*

$$\omega = \sum_{i=1}^{r}\sum_{j=n-1-m}^{n-2}\varkappa_{i,j}(\mu_{i+1,j+m-(n-1)}\tau_{\hat{i}}\nu_{i,j})^* + \sum_{i=1}^{2r}\varphi_{\hat{i}}(\gamma_{\widehat{i+1}}\mu_{i+1,n-3}\beta_{\hat{i}})^*,$$

где $\varkappa_{i,j}, \varphi_{\widehat{i}} \in k$. *Тогда* $\omega \in \operatorname{Im}\delta^{s-1}$ *равносильно тому, что выполнено равенство*

$$\sum_{i=1}^{r}(-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m-1} p_l(q)}\left(\sum_{j=n-1-m}^{n-2}\varkappa_{i,j}+(-1)^{p_l(i+m)}(\varphi_{\widehat{i}}-\varphi_{\widehat{i+r}})\right)=0. \quad (5.4)$$

Доказательство. 1) Предположим, что $\delta^{s-1}(\omega')=\omega$ для некоторого $\omega' \in \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{s-1},R)$. Из результатов работы [1] следует, что

$$\omega'=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n-2-m}\varkappa'_{i,j}(\alpha_{i,j+m-1}\dots\alpha_{i,j})^*+\sum_{i=1}^{2r}\varphi'_{\widehat{i}}e_{\widehat{i}}^{\,*}+\widetilde{\omega}'$$

для некоторых $\varkappa'_{i,j} \in k$ $(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n-2-m)$, $\varphi'_{\widehat{i}} \in k$ $(1 \leqslant i \leqslant 2r)$, $\widetilde{\omega}' \in \operatorname{Ker}\delta^{s-1}$. Пользуясь определениями d_{2m} и σ, легко показать, что

$$\begin{aligned}
\varkappa_{i,j}&=\varkappa'_{i,j+1}-\varkappa'_{i,j} \qquad (1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n-3-m),\\
\varphi_i&=\varphi'_{\widehat{i+r}}-\varphi'_{\widehat{i}} \qquad (1 \leqslant i \leqslant r),\\
\psi_i&=\varphi'_{\widehat{i+r}}-(-1)^{p_l(i+m)}\varkappa'_{i,n-2-m} \qquad (1 \leqslant i \leqslant r),\\
\zeta_i&=\varkappa'_{i+1,1}-\varphi'_{\widehat{i+r}} \qquad (1 \leqslant i \leqslant r).
\end{aligned}$$

С помощью этих формул несложно убедиться в том, что равенство (5.1) выполнено. Следовательно, мы доказали, что

$$\begin{aligned}
\operatorname{Im}\delta^{s-1} \subset V=\Bigg\{\sum_{i=1}^{r}\Bigg(&\sum_{j=1}^{n-3-m}\varkappa_{i,j}(\alpha_{i,j+m}\dots\alpha_{i,j})^*\\
&+\varphi_i\Bigg(\sum_{j=n-1-m}^{n-2}\mu_{i+1,j+m-(n-1)}\tau_{\widehat{i}}\nu_{i,j}-\gamma_{\widehat{i}}\nu_{i,n-2-m}+\mu_{i+1,m}\beta_{\widehat{i}}\Bigg)^*\\
&+\psi_i(\gamma_{\widehat{i}}\nu_{i,n-2-m}+\gamma_{\widehat{i+r}}\nu_{i,n-2-m})^*\\
&+\zeta_i(\mu_{i+1,m}\beta_{\widehat{i}}+\mu_{i+1,m}\beta_{\widehat{i+r}})^*\Bigg)\ \Bigg|\ \sum_{i=1}^{r}(-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m-1}p_l(q)}\Bigg(\sum_{j=1}^{n-3-m}\varkappa_{i,j}\\
&+(-1)^{p_l(i+m)}(\psi_i+\zeta_i)\Bigg)=0\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Так как из результатов работы [1] следует, что $\dim_k V=r(n-m)-1=\dim_k\operatorname{Im}\delta^{s-1}$, то $\operatorname{Im}\delta^{s-1}=V$. Пункт 1) доказан.

2) Пусть $\delta^{s-1}(\omega')=\omega$ для некоторого $\omega'\in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{s-1},R)$. Из результатов работы [1] следует, что

$$\omega'=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{n-2}\varkappa'_{i,j}e_{i,j}{}^{*}+\sum_{i=1}^{2r}\varphi'_{\widehat{i}}e_{\widehat{i}}{}^{*}+\widetilde{\omega}'$$

для некоторых $\varkappa'_{i,j}\in k$ $(1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j\leqslant n-2)$, $\varphi'_{\widehat{i}}\in k$ $(1\leqslant i\leqslant 2r)$, $\widetilde{\omega}'\in \mathrm{Ker}\,\delta^{s-1}$. Тогда, пользуясь определениями d_{2n-4} и σ, получаем, что

$$\varphi_{\widehat{i}}=(-1)^{p_l(i+n-1)}\left(\varphi'_{\widehat{i}}+\sum_{t=1}^{n-2}\varkappa'_{i+1,t}\right)-\varphi'_{\widehat{i+1}}\quad (0\leqslant i\leqslant r-1),$$

$$\varphi_{\widehat{i}}=(-1)^{p_l(i+n-1)}\left(-\varphi'_{\widehat{i}}+\sum_{t=1}^{n-2}\varkappa'_{i+1,t}\right)+\varphi'_{\widehat{i+1}}\quad (r\leqslant i\leqslant 2r-1).$$

Пользуясь этими формулами, несложно убедиться в том, что равенство (5.2) выполнено. Далее доказательство проходит так же, как и в пункте 1).

3) Пусть $\delta^{s-1}(\omega')=\omega$ для некоторого $\omega'\in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{s-1},R)$. Из результатов работы [1] следует, что $\omega'=\sum\limits_{i=1}^{r}\sum\limits_{j=1}^{n-2}\varkappa'_{i,j}e_{i,j}{}^{*}+\widetilde{\omega}'$ для некоторых $\varkappa'_{i,j}\in k$ $(1\leqslant i\leqslant r, 1\leqslant j\leqslant n-2)$, $\widetilde{\omega}'\in \mathrm{Ker}\,\delta^{s-1}$. Тогда, пользуясь определениями d_{2n-4} и σ, получаем, что

$$\varkappa_{i,j}=-(-1)^{p_l(i+n-2)}\sum_{t=j}^{n-2}\varkappa'_{i,t}-\sum_{t=1}^{j}\varkappa_{i+1,t}\quad (1\leqslant i\leqslant r-1, 1\leqslant j\leqslant n-2),$$

$$\varkappa_{r,j}=-(-1)^{p_l(n-2)}\sum_{t=j}^{n-2}\varkappa'_{r,t}+\sum_{t=1}^{j}\varkappa_{1,t}\quad (1\leqslant j\leqslant n-2).$$

Пользуясь этими формулами и тем, что $n-1\,\vdots\,\mathrm{char}\,k$, несложно убедиться в том, что равенство (5.3) выполнено. Далее доказательство проходит так же, как и в пункте 1).

4) Пусть $\delta^{s-1}(\omega') = \omega$ для некоторого $\omega' \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{s-1}, R)$. Из результатов работы [1] следует, что

$$\omega' = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n-2-m} \zeta'_{i,j}(\alpha_{i,j+m-1} \dots \alpha_{i,j})^* + \sum_{j=n-m}^{n-2} \varkappa'_{i,j}(\mu_{i+1,j+m-n}\tau_{\widehat{i}}\nu_{i,j})^*$$
$$+ \sum_{i=1}^{2r} \big(\varphi_{\widehat{i}}(\gamma_{\widehat{i}}\nu_{i,n-1-m})^* + \psi_{\widehat{i}}(\mu_{i+1,m-1}\beta_{\widehat{i}})^*\big)$$

для некоторых $\zeta'_{i,j} \in k$ $(1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant n-2-m)$, $\varkappa'_{i,j} \in k$ $(1 \leqslant i \leqslant r, n-m \leqslant j \leqslant n-2)$, $\varphi'_{\widehat{i}}, \psi'_{\widehat{i}} \in k$ $(1 \leqslant i \leqslant 2r)$. Тогда, пользуясь определениями d_{2m+1} и σ, легко показать, что

$$\begin{aligned}
\varkappa_{i,n-1-m} &= \varphi'_{\widehat{i+r}} - \varphi'_{\widehat{i}} + \varkappa'_{i,n-m} \quad (1 \leqslant i \leqslant r),\\
\varkappa_{i,j} &= \varkappa'_{i,j+1} - \varkappa'_{i,j} \quad (1 \leqslant i \leqslant r, n-m \leqslant j \leqslant n-3),\\
\varkappa_{i,n-2} &= \psi'_{\widehat{i}} - \psi'_{\widehat{i+r}} - \varkappa'_{i,n-2} \quad (1 \leqslant i \leqslant r),\\
\varphi_{\widehat{i}} &= -(-1)^{p_l(i+m)}(\psi'_{\widehat{i}} + \sum_{\ell=1}^{n-2-m} \zeta'_{i+1,t}) + \varphi'_{\widehat{i+1}} \quad (1 \leqslant i \leqslant 2r).
\end{aligned}$$

Пользуясь этими формулами, несложно убедиться в том, что равенство (5.4) выполнено. Далее доказательство проходит так же, как и в пункте 1). □

Следствие 1. 1) *Если элемент $f_{\varepsilon,s}$ определён, то $f_{\varepsilon,s} \neq 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$.*

2) *Если элемент $h_{\varepsilon,s}$ определён и $n-1 \vdots \mathrm{char}\, k$, то $h_{\varepsilon,s} \neq 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$.*

Доказательство. 1) Следует напрямую из пункта 2) леммы 2.

2) Из пункта 3) леммы 2 и определения $h_{\varepsilon,s}$ следует, что $h_{\varepsilon,s} \in \mathrm{Im}\,\delta^{s-1}$ тогда и только тогда, когда в k выполнено равенство $r(n-2) = 0$. Так как $(l+1)(n-1) = ar+1$, то $n-1$ и r взаимно просты. Так как $n-1$ и $n-2$ тоже взаимно просты, то $r(n-2) \not\vdots\, \mathrm{char}\, k$. Следовательно, $h_{\varepsilon,s} \notin \mathrm{Im}\,\delta^{s-1}$, что и требовалось показать. □

Лемма 3. 1) *Пусть определён элемент f_s. Если $s+1 \not\vdots\, 2n-3$, то $\varepsilon_1 f_s \neq 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$. Если же $s+1 \vdots 2n-3$, то $\varepsilon_1 f_s = 2f_{\varepsilon,s+1}$.*

2) *Пусть определён элемент* h_s. *Тогда в* $\mathrm{HH}^*(R)$ *имеем*

$$\varepsilon_1 h_s = \begin{cases} h_{\varepsilon,s+1}, & \textit{если } \operatorname{char} k = 2 \textit{ и } \frac{n-1}{2} \not\vdots\, 2, \\ 0 & \textit{в противном случае.} \end{cases} \tag{5.5}$$

3) *Пусть определён элемент* g_s. *Тогда* $\varepsilon_1 g_s \neq 0$ *в* $\mathrm{HH}^*(R)$.

Доказательство. 1) Разберём сначала случай $s+1 \not\vdots\, 2n-3$ (это равносильно тому, что $0 \leqslant m \leqslant n-3$). Из пункта 2) предложения 1 следует, что класс $\varepsilon_1 f_s$ в $\mathrm{HH}^*(R)$ совпадает с классом коцикла

$$\varepsilon_1 T^1(f_s) = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{m} p_l(q)} \eta_l (\gamma_{\,\widehat{r}} \nu_{r,n-2-m} + \gamma_{\,\widehat{2r}} \nu_{r,n-2-m})^*.$$

Тогда из пункта 1) леммы 2 следует, что $\varepsilon_1 f_s \neq 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$. Если же $s+1 \,\vdots\, 2n-3$ (это равносильно равенству $m = n-2$), то, используя пункт 3) предложения 1, получаем, что $\varepsilon_1 f_s$ представляется коциклом

$$\varepsilon_1 T^1(f_s) = \eta_l (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{n-3} p_l(q) + p_{l+1}(-1)} X,$$

где $X = (\gamma_{\,\widehat{2r}} \nu_{r,1} \beta_{\,\widehat{2r-1}} - \gamma_{\,\widehat{r}} \nu_{r,1} \beta_{\,\widehat{r-1}})^*$ при $r > 1$ и $X = (\gamma_{\,\widehat{1}} \nu_1 \beta_{\,\widehat{2}} - \gamma_{\,\widehat{2}} \nu_1 \beta_{\,\widehat{1}})^*$ при $r = 1$. Используя пункты 2) и 3) леммы 1, получаем, что $\varepsilon_1 T^1(f_s) = \eta_{l+1} (\gamma_{\,\widehat{2r}} \nu_{r,1} \beta_{\,\widehat{2r-1}} - \gamma_{\,\widehat{r}} \nu_{r,1} \beta_{\,\widehat{r-1}})^*$ для $r \geqslant 1$. Теперь несложно показать, пользуясь пунктом 2) леммы 2, что $2 f_{\varepsilon,s+1} - \varepsilon_1 f_s = 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$.

2) Из пункта 1) предложения 2 следует, что класс $\varepsilon_1 h_s$ в $\mathrm{HH}^*(R)$ совпадает с классом коцикла

$$\varepsilon_1 T^1(h_s) = \frac{(-1)^{\sum\limits_{q=0}^{n-2} p_l(q)+1} \eta_l}{r} \sum_{j=1}^{n-2} j (\mu_{1,j-1} \tau_{\,\widehat{r}} \nu_{r,j})^*.$$

Из пункта 3) леммы 2 следует, что $\varepsilon_1 h_s = 0$ равносильно тому, что $\sum\limits_{j=1}^{n-2} j = \frac{(n-1)(n-2)}{2} = 0$ в k. Так как $n-1 \,\vdots\, \operatorname{char} k$ и $\operatorname{char} k$ – простое число, то $\frac{(n-1)(n-2)}{2} \,\vdots\, \operatorname{char} k$, кроме случая $\operatorname{char} k = 2$, $\frac{n-1}{2} \not\vdots\, 2$. В последнем случае легко показать, пользуясь пунктом 3) леммы 2, что $\varepsilon_1 h_s - h_{\varepsilon,s+1} = 0$.

3) Из пункта 2) предложения 2 следует, что класс $\varepsilon_1 g_s$ в $\mathrm{HH}^*(R)$ совпадает с классом коцикла $\varepsilon_1 T^1(g_s) = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{m} p_l(q)+m} \eta_l(\gamma_{\widehat{r}}\nu_{r,1}\beta_{\widehat{r-1}})^*$. Из пункта 4) леммы 2 следует, что $\varepsilon_1 g_s \neq 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$. $\square$

Замечание 4. Далее мы будем использовать следующее легко доказываемое утверждение: если $v \in \operatorname{Ker}\delta^s$ и $v(Q_s) \not\subset \operatorname{Rad} R$, то $v \neq 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$.

Следствие 2. *$f_s \neq 0$, $g_s \neq 0$, $h_s \neq 0$ в $\mathrm{HH}^*(R)$, если соответствующий элемент определён.*

Доказательство. $g_s \neq 0$ следует из пункта 3) леммы 3. Остальные два неравенства следуют из приведённого перед следствием замечания.

Рассмотрим следующие множества (в каждом множестве мы берём переменную с индексом s для всех s, для которых эта переменная определена):

$$\mathcal{F} = \{\varepsilon_1, f_s, g_s\}; \mathcal{G} = \{f_{\varepsilon,s}\}; \mathcal{H}_1 = \{h_s\}; \mathcal{H}_2 = \{h_{\varepsilon,s}\}; \mathcal{J} = \{\varepsilon_0^{(j)}\}_{1\leqslant j\leqslant n-2}.$$

Определим следующие множества:

$$\mathcal{Z}_1 = \mathcal{F}; \mathcal{Z}_2 = \mathcal{F}\cup\mathcal{H}_1\cup\mathcal{H}_2; \mathcal{Z}_3 = \mathcal{F}\cup\mathcal{G};$$
$$\mathcal{Z}_4 = \mathcal{F}\cup\mathcal{G}\cup\mathcal{H}_1; \mathcal{Z}_5 = \mathcal{F}\cup\mathcal{G}\cup\mathcal{H}_1\cup\mathcal{H}_2.$$

$\square$

Предложение 3. 1) *Пусть* $\operatorname{char} k \neq 2$, $n-1 \not\vdots \operatorname{char} k$ *и* $r > 1$. *Тогда элементы множества* $\mathcal{Z}_1$ *порождают* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* k*-алгебру.*

2) *Пусть* $\operatorname{char} k \neq 2$, $n-1 \vdots \operatorname{char} k$ *и* $r > 1$. *Тогда элементы множества* $\mathcal{Z}_2$ *порождают* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* k*-алгебру.*

3) *Пусть* $\operatorname{char} k = 2$, $n-1 \not\vdots 2$ *и* $r > 1$. *Тогда элементы множества* $\mathcal{Z}_3$ *порождают* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* k*-алгебру.*

4) *Пусть* $\operatorname{char} k = 2$, $n-1 \vdots 2$, $n-1 \not\vdots 4$ *и* $r > 1$. *Тогда элементы множества* $\mathcal{Z}_4$ *порождают* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* k*-алгебру.*

5) *Пусть* $\operatorname{char} k = 2$, $n-1 \vdots 4$ *и* $r > 1$. *Тогда элементы множества* $\mathcal{Z}_5$ *порождают* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* k*-алгебру.*

6) *Если в одном из пунктов* 1)–5) *заменить условие* $r > 1$ *на* $r = 1$, *то элементы множества* $\mathcal{Z}_i \cup \mathcal{J}$, *где* i *– номер соответствующего пункта, порождают* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как* k*-алгебру.*

Доказательство. Для каждого из пунктов 1)–5) через $\mathcal{H}$ обозначим подалгебру $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённую соответствующим множеством $\mathcal{Z}_i$, а для пункта 6) – множеством $\mathcal{Z}_i \cup \mathcal{J}$. Пусть $s \geqslant 0$. Докажем, что $\mathrm{HH}^s(R) \subset \mathcal{H}$.

а) Сначала рассмотрим случай $r > 1$. Можно считать, что s удовлетворяет одному из условий (2.3)–(2.6). Разберём все варианты:

1. Пусть $s = 2m + l(2n-3)$ удовлетворяет условию (2.3). Тогда определён элемент f_s. Так как $f_s \neq 0$ по следствию 2 и $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = 1$, то f_s порождает $\mathrm{HH}^s(R)$.

2. Пусть $s = 2m + 1 + l(2n-3)$ удовлетворяет условию (2.3). Тогда определён элемент f_{s-1}. Так как $\varepsilon_1 f_{s-1} \neq 0$ по лемме 3, то $\varepsilon_1 f_{s-1}$ порождает $\mathrm{HH}^s(R)$.

3. Пусть $s = 2m + 1 + l(2n-3)$ удовлетворяет условию (2.4). Тогда определён элемент g_s. Так как $g_s \neq 0$ по следствию 2, то g_s порождает $\mathrm{HH}^s(R)$.

4. Пусть $s = 2m + 2 + l(2n-3)$ удовлетворяет условию (2.4). Тогда определён элемент g_{s-1}. Так как $\varepsilon_1 g_{s-1} \neq 0$ по лемме 3, то $\varepsilon_1 g_{s-1}$ порождает $\mathrm{HH}^s(R)$.

5. Пусть $s = (l+1)(2n-3) - 1$ удовлетворяет условию (2.5). Тогда определён элемент f_s. Так как $f_s \neq 0$ по следствию 2, то f_s порождает $\mathrm{HH}^s(R)$.

6. Пусть $s = (l+1)(2n-3)$ удовлетворяет условию (2.5). Если $\operatorname{char} k \neq 2$, то $\varepsilon_1 f_{s-1} \neq 0$ по лемме 3. Тогда $\varepsilon_1 f_{s-1}$ порождает $\mathrm{HH}^s(R)$. Если же $\operatorname{char} k = 2$, то выполняется условие одного из пунктов 3)–5). Так как $f_{\varepsilon,s} \neq 0$ по следствию 1, то $f_{\varepsilon,s}$ порождает $\mathrm{HH}^s(R)$.

7. Пусть $s = (l+1)(2n-3) - 1$ удовлетворяет условию (2.6). Тогда выполняется условие одного из пунктов 2), 4) или 5). Так как в этом случае $h_s \neq 0$ по следствию 2, то h_s порождает $\mathrm{HH}^s(R)$.

8. Пусть $s = (l+1)(2n-3)$ удовлетворяет условию (2.6). Если $\operatorname{char} k = 2$ и $n-1 \not\vdots\, 4$, то выполнено условие пункта 4) и по лемме 3 имеем $\varepsilon_1 h_{s-1} \neq 0$. Тогда $\varepsilon_1 h_{s-1}$ порождает $\mathrm{HH}^s(R)$. В противном случае выполнено условие одного из пунктов 2) или 5) и элемент $h_{\varepsilon,s}$, который не равен 0 по следствию 1, порождает $\mathrm{HH}^s(R)$.

Таким образом, пункты 1)–5) доказаны.

б) Пусть $r = 1$. Рассмотрим случай $s = 0$. Тогда $\mathrm{HH}^0(R) = \operatorname{Ker} \delta^0$, $\dim_k \mathrm{HH}^0(R) = n-1$. Так как элементы $f_0, \varepsilon_0^{(j)}$ $(1 \leqslant j \leqslant n-2)$ линейно независимы над k и лежат в $\operatorname{Ker} \delta^0$, то они порождают $\mathrm{HH}^0(R)$.

Варианты, когда $s \geqslant 1$ удовлетворяет одному из условий (2.7)–(2.11) теоремы 2, рассматриваются аналогично части а) данного доказательства с учётом замечания 4.

В каждом из случаев 1)–6) мы показали, что $\mathrm{HH}^s(R) \subset \mathcal{H}$, и, таким образом, $\mathrm{HH}^*(R) = \mathcal{H}$. Предложение доказано. □

Обозначим минимальный период минимальной бимодульной резольвенты алгебры R через λ. Из результатов работы [1] следует, что

$$\lambda = \begin{cases} \frac{r(2n-3)}{\text{НОД}(r,n-1)}, & \text{если } \frac{n-1+rn}{\text{НОД}(r,n-1)} \vdots 2 \text{ и } \operatorname{char} k = 2, \\ \frac{2r(2n-3)}{\text{НОД}(r,n-1)}, & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{5.6}$$

Легко понять, что определён элемент f_λ и для всех $t \geqslant 0$ $T^t(f_\lambda) : Q_{t+\lambda} \to Q_t$ – тождественное отображение, умноженное на $\eta_{\frac{\lambda}{2n-3}}$. Следовательно, умножение на f_λ задаёт изоморфизм между $\mathrm{HH}^t(R)$ и $\mathrm{HH}^{t+\lambda}(R)$ для $t \geqslant 1$.

Следствие 3. *В каждом из случаев* 1)–6) *предложения* 3 *алгебра* $\mathrm{HH}^*(R)$ *порождена теми элементами, перечисленными в соответствующем пункте, степени которых не превосходят* λ.

Доказательство. Утверждение вытекает из предложения 3 и факта, указанного перед следствием. □

6. Соотношения

В этом параграфе мы получим соотношения, которые связывают элементы $\mathrm{HH}^*(R)$. Отметим сразу, что мы будем без особого упоминания пользоваться градуированной коммутативностью алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$.

Для начала выведем формулы для произведений вида xf_s, где $x \in \{f_s, f_{\varepsilon,s}, h_s, h_{\varepsilon,s}, g_s\}$.

Замечание 5. Далее, когда мы пишем s_i, считаем, что $s_i = 2m_i + l_i(2n-3)$ или $s_i = 2m_i + 1 + l_i(2n-3)$, где $0 \leqslant s_i - l_i(2n-3) \leqslant 2n-4$, за исключением случаев, когда выражение s_i через m_i, l_i указано явно. Какой вариант имеет место в каждом конкретном случае, будет ясно из других условий, наложенных на s_i (ср. с замечанием 3).

Лемма 4. *В алгебре* $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются следующие соотношения:*

$$f_{s_1}f_{s_2} = \begin{cases} f_{s_1+s_2}, & \text{если} \;\; m_1+m_2 \leqslant n-2,\\ 2g_{s_1+s_2}, & \text{если} \;\; m_1+m_2 \geqslant n-1; \end{cases} \tag{6.1}$$

$$f_{\varepsilon,s_1}f_{s_2} = \begin{cases} \varepsilon_1 g_{s_1+s_2-1}, & \text{если } m_2 \geqslant 1,\\ f_{\varepsilon,s_1+s_2}, & \text{если } m_2 = 0; \end{cases} \tag{6.2}$$

$$h_{s_1}f_{s_2} = \begin{cases} \varepsilon_1 f_{s_1+s_2-1}, & \text{если } m_2 \geqslant 1,\\ h_{s_1+s_2}, & \text{если } m_2 = 0; \end{cases} \tag{6.3}$$

$$h_{\varepsilon,s_1}f_{s_2} = \begin{cases} 0, & \text{если } m_2 \geqslant 1,\\ h_{\varepsilon,s_1+s_2}, & \text{если } m_2 = 0; \end{cases} \tag{6.4}$$

$$g_{s_1}f_{s_2} = \begin{cases} g_{s_1+s_2}, & \text{если } m_1+m_2 \leqslant n-3,\\ h_{\varepsilon,s_1+s_2}, & \text{если } m_1+m_2 = n-2,\\ 0, & \text{если } m_1+m_2 \geqslant n-1; \end{cases} \tag{6.5}$$

Доказательство. Докажем равенство (6.1). Положим $m_2+l_2(n-1) = a_2r$. Пусть $m_1+m_2 \leqslant n-2$. Тогда из пункта 1) предложения 1 следует, что

$$f_{s_1}T^{s_1}(f_{s_2}) = \sum_{i=1}^{r} \varkappa_i \left(\sum_{j=1}^{n-2-m} \alpha_{i,j+m-1}\ldots\alpha_{i,j} + e_{\widehat{i-1}} + e_{\widehat{i+r-1}} \right)^*,$$

где

$$\varkappa_i = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m_1-1} p_{l_1}(q) + \sum\limits_{q=0}^{i+m_1+m_2-1} p_{l_2}(q)} \eta_{l_1}\eta_{l_2}.$$

Используя пункт 4) леммы 1, получаем

$$p_{l_2}(q) = p_{l_1+l_2}(q) - p_{l_1}(q+l_2(n-1)) = p_{l_1+l_2}(q) - p_{l_1}(q-m_2).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &(-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m_1-1} p_{l_1}(q) + \sum\limits_{q=0}^{i+m_1+m_2-1} p_{l_2}(q)} \\ &= (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m_1-1} p_{l_1}(q) + \sum\limits_{q=0}^{i+m_1+m_2-1} p_{l_1+l_2}(q) - \sum\limits_{q=-m_2}^{i+m_1-1} p_{l_1}(q)} \\ &= (-1)^{\sum\limits_{q=-m_2}^{-1} p_{l_1}(q) + \sum\limits_{q=0}^{i+m_1+m_2-1} p_{l_1+l_2}(q)}. \end{aligned}$$

Тогда из пункта 5) леммы 1 следует, что

$$\begin{aligned}\varkappa_i &= (-1)^{\sum\limits_{q=-m_2}^{l_2(n-1)-1} p_{l_1}(q)+\sum\limits_{q=0}^{i+m_1+m_2-1} p_{l_1+l_2}(q)}\eta_{l_1+l_2}\\ &= (-1)^{a_2l_1+\sum\limits_{q=0}^{i+m_1+m_2-1} p_{l_1+l_2}(q)}\eta_{l_1+l_2} = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m_1+m_2-1} p_{l_1+l_2}(q)}\eta_{l_1+l_2}.\end{aligned}$$

Из доказанного следует, что $f_{s_1}T^{s_1}(f_{s_2}) = f_{s_1+s_2}$. Пусть теперь $m_1 + m_2 \geqslant n-1$. Введём обозначение $w = m_1 + m_2 - (n-1)$. Тогда

$$\begin{aligned}f_{s_1}T^{s_1}(f_{s_2}) = \sum_{i=1}^{r}\varkappa_i\Bigg(2\sum_{j=n-1-w}^{n-2}&\mu_{i+1,j+w-(n-1)}\tau_{\widehat{i}}\nu_{i,j}\\ &+\gamma_{\widehat{i}}\nu_{i,n-2-w}-\gamma_{\widehat{i+r}}\nu_{i,n-2-w}+\mu_{i+1,w}\beta_{\widehat{i}}-\mu_{i+1,w}\beta_{\widehat{i+r}}\Bigg)^*,\end{aligned}$$

где

$$\varkappa_i = (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+m_1} p_{l_1}(q)+\sum\limits_{q=0}^{i+n-2} p_{l_2}(q)+\sum\limits_{q=i}^{i+w} p_{l_2+1}(q)+w}\eta_{l_1}\eta_{l_2}$$

(см. четвёртый пункт предложения 1). Используя пункт 2) леммы 1, получаем $\sum\limits_{q=n-1}^{i+n-2} p_{l_2}(q) = \sum\limits_{q=0}^{i-1} p_{l_2+1}(q) - 1$ для $1 \leqslant i \leqslant r$. Рассуждая как и ранее, получаем с помощью пунктов 3)–5) леммы 1, что

$$\begin{aligned}\varkappa_i &= (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{n-2} p_{l_1+l_2}(q)+\sum\limits_{q=0}^{i+w} p_{l_1+l_2+1}(q)+w-1}\eta_{l_1+l_2}\\ &= (-1)^{\sum\limits_{q=0}^{i+w} p_{l_1+l_2+1}(q)+w-1}\eta_{l_1+l_2+1}.\end{aligned}$$

Тогда несложно показать, что

$$\begin{aligned}2g_{s_1+s_2} - f_{s_1}T^{s_1}(f_{s_2}) &= \sum_{i=1}^{r}\varkappa_i(\gamma_{\widehat{i}}\nu_{i,n-2-w}+\gamma_{\widehat{i+r}}\nu_{i,n-2-w}\\ &+(-1)^{p_{l_1+l_2+1}(i+w)}(\mu_{i,w}\beta_{\widehat{i-1}}+\mu_{i,w}\beta_{\widehat{i+r-1}}))^*.\end{aligned}$$

Рассмотрим

$$\omega = \sum_{i=1}^{r}(-1)^{p_{l_1+l_2+1}(i+w)}\varkappa_i\sum_{j=1}^{n-2-w}(\alpha_{i,j+w-1}\dots\alpha_{i,j})^*.$$

Легко доказать, что $\delta^{s_1+s_2-1}(w) = 2g_{s_1+s_2} - f_{s_1}T^{s_1}(f_{s_2})$, т.е. $f_{s_1}f_{s_2} = 2g_{s_1+s_2}$ в $\mathrm{HH}^*(R)$. Таким образом, равенство (6.1) доказано. Аналогично доказываются равенства (6.2)–(6.5). $\square$

Далее выведем формулы для произведений вида xy, где

$$x, y \in \{\varepsilon_1, f_{\varepsilon,s}, h_s, h_{\varepsilon,s}, g_s\}.$$

Лемма 5. *В алгебре* $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполнены следующие равенства:*

$$\begin{aligned} f_{\varepsilon,s_1}\varepsilon_1 &= f_{\varepsilon,s_1}f_{\varepsilon,s_2} = f_{\varepsilon,s_1}h_{s_2} = f_{\varepsilon,s_1}h_{\varepsilon,s_2} = f_{\varepsilon,s_1}g_{s_2} \\ &= h_{\varepsilon,s_1}\varepsilon_1 = h_{\varepsilon,s_1}h_{\varepsilon,s_2} = h_{\varepsilon,s_1}g_{s_2} = g_{s_1}g_{s_2} = \varepsilon_1^2 = 0, \end{aligned} \tag{6.6}$$

$$h_{s_1}h_{s_2} = \begin{cases} g_{s_1+s_2}, & \textit{если } \operatorname{char} k = 2 \ \textit{ и } \ \frac{n-1}{2} \not\vdots 2, \\ 0, & \textit{в противном случае}, \end{cases} \tag{6.7}$$

$$h_{s_1}h_{\varepsilon,s_2} = \varepsilon_1 g_{s_1+s_2-1}, \tag{6.8}$$

$$h_{s_1}g_{s_2} = \begin{cases} \varepsilon_1 g_{s_1+s_2-1}, & \textit{если } \ m_2 \geqslant 1, \\ f_{\varepsilon,s_1+s_2}, & \textit{если } \ m_2 = 0. \end{cases} \tag{6.9}$$

Доказательство. Пусть P – неразложимый проективный Λ-модуль, который не изоморфен $P_{[\widehat{2r}][\widehat{2r-1}]}$, $x : P \to Q_{s_1}$ и определён гомоморфизм f_{ε,s_1}. Тогда несложно показать, что $f_{\varepsilon,s_1}x = 0$. Из этого утверждения следуют равенства $f_{\varepsilon,s_1}\varepsilon_1 = f_{\varepsilon,s_1}f_{\varepsilon,s_2} = f_{\varepsilon,s_1}h_{s_2} = f_{\varepsilon,s_1}g_{s_2} = 0$ для произвольного r и равенство $f_{\varepsilon,s_1}h_{\varepsilon,s_2} = 0$ для $r > 1$. В случае $r = 1$ имеем $f_{\varepsilon,s_1}h_{\varepsilon,s_2} = \varkappa f_{\varepsilon,s_1+s_2}$ для некоторого $\varkappa \in k$. Домножим последнее равенство на f_2 (ясно, что этот элемент определён при $r = 1$). Используя лемму 4, получаем $0 = \varkappa\varepsilon_1 g_{s_1+s_2+1}$. Следовательно, $\varkappa = 0$.

Если $r > 2$, то равенство $h_{\varepsilon,s_1}h_{\varepsilon,s_2} = 0$ следует из $\mathrm{HH}^{s_1+s_2}(R) = 0$. Если $r = 2$, то $h_{\varepsilon,s_1}h_{\varepsilon,s_2} = \varkappa f_{s_1+s_2}$ для некоторого $\varkappa \in k$, и нужное нам равенство следует из замечания 4. Если $r = 1$, то определён элемент f_{s_1}. Всё из того же замечания следует, что если $f_{s_1}T^{s_1}(h_{\varepsilon,s_2}) \not\subset \operatorname{Rad} R$, то в $\mathrm{HH}^*(R)$ не может выполняться равенство $f_{s_1}h_{\varepsilon,s_2} = h_{\varepsilon,s_1+s_2}$. Следовательно, $f_{s_1}T^{s_1}(h_{\varepsilon,s_2}) \subset \operatorname{Rad} R$. А тогда ясно, что

$$T^{s_1}(h_{\varepsilon,s_2})(Q_{s_1+s_2}) \subset \operatorname{Rad} Q_{s_1} \quad \text{и} \quad h_{\varepsilon,s_1}T^{s_1}(h_{\varepsilon,s_2}) = 0.$$

Равенства $h_{\varepsilon,s_1}\varepsilon_1 = h_{\varepsilon,s_1}g_{s_2} = 0$ следуют из того, что Q_{s_1+1} и $Q_{s_1+s_2}$ не содержат прямых слагаемых, изоморфных одному из модулей $P_{[i+1,j][i,j]}$, $1 \leqslant i \leqslant r$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$ (см. начало доказательства).

Докажем равенство $g_{s_1}g_{s_2} = 0$. Если $r > 1$, то $Q_{s_1+s_2} = 0$. Пусть $r = 1$. Если $m_1 + m_2 \leqslant n-3$, то $g_{s_1}g_{s_2} = \varkappa f_{s_1+s_2}$ для некоторого $\varkappa \in k$, и из замечания 4 следует, что $\varkappa = 0$. Если $m_1 + m_2 \geqslant n-2$, то $g_{s_1}g_{s_2} = \varkappa g_{s_1+s_2}$ для некоторого $\varkappa \in k$. Умножая последнее равенство на $f_{2(n-2-m_2)}$ или $f_{2(n-1-m_2)}$ в зависимости от того, делит ли характеристика поля k число $n-1$, получаем, пользуясь леммой 4, что $\varkappa = 0$.

Так как $\mathrm{HH}^2(R) = 0$ в случае $r > 1$, то надо доказать равенство $\varepsilon_1^2 = 0$ только в случае $r = 1$. В этом случае $\varepsilon_1^2 = \varkappa f_2$ для некоторого $\varkappa \in k$. Тогда требуемое равенство следует из замечания 4.

Докажем теперь равенство (6.8). Пусть t таково, что $t\lambda > s_2 - 2$. Тогда легко показать, что определены элементы g_{2s_2-2} и $f_{t\lambda+2-s_2}$. Из (6.5) получаем, что $g_{2s_2-2}f_{t\lambda+2-s_2} = h_{\varepsilon,s_2+t\lambda} = h_{\varepsilon,s_2}f_\lambda^t$. Тогда, применяя лемму 4, получаем

$$h_{s_1}h_{\varepsilon,s_2}f_\lambda^t = \varepsilon_1 g_{2s_2-2}f_{t\lambda+1-s_2+s_1} = \varepsilon_1 g_{t\lambda+s_1+s_2-1} = \varepsilon_1 g_{s_1+s_2-1}f_\lambda^t.$$

Из последнего равенства следует равенство (6.8).

Докажем равенство (6.7). Легко понять, что $h_{s_1}h_{s_2} = \varkappa g_{s_1+s_2}$ для некоторого $\varkappa \in k$. Домножим это равенство на ε_1. Пользуясь равенствами (5.5) и (6.8), получаем, что

$$\varkappa = \begin{cases} 1, & \text{если } \operatorname{char} k = 2 \text{ и } \frac{n-1}{2} \not\vdots\, 2, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Перейдём к равенству (6.9). Легко показать, что

$$h_{s_1}g_{s_2} = \begin{cases} \varkappa\varepsilon_1 g_{s_1+s_2-1}, & \text{если } m_2 \geqslant 1, \\ \varkappa f_{\varepsilon,s_1+s_2}, & \text{если } m_2 = 0, \end{cases}$$

для некоторого $\varkappa \in k$. Пусть t таково, что $t\lambda > s_2 - s_1 - 1$. Тогда определён элемент $f_{t\lambda+s_1-s_2+1}$. Домножив на этот элемент последнее равенство, получим, пользуясь леммой 4 и равенством (6.8), что $\varkappa = 1$. $\square$

Следствие 4. $\mathrm{HH}^*(R)$ – *коммутативная алгебра.*

Доказательство. Следует из леммы 5 и градуированной коммутативности алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$. $\square$

Осталось найти произведения элементов $\varepsilon_0^{(j)}$ $(1 \leqslant j \leqslant n-2)$ между собой и с другими элементами. Так как элементы $\varepsilon_0^{(j)}$ определены только при $r = 1$, до конца этого параграфа считаем, что $r = 1$.

Лемма 6. 1) $\varepsilon_0^{(i)}\varepsilon_0^{(j)} = 0$ *для* $1 \leqslant i, j \leqslant n-2$.

2.1) *Если* $n-1 \not\vdots \operatorname{char} k$, *то* $\varepsilon_0^{(j)}\,\mathrm{HH}^s(R) = 0$ *для* $s \geqslant 1$, $1 \leqslant j \leqslant n-2$.

2.2) *Если* $n-1\,\vdots\,\mathrm{char}\,k$, *то для* $1\leqslant j\leqslant n-2$ *выполнены равенства*

$$\varepsilon_0^{(j)}\varepsilon_1=\varepsilon_0^{(j)}g_s=\varepsilon_0^{(j)}f_{\varepsilon,s}=\varepsilon_0^{(j)}h_{\varepsilon,s}=0,$$

$$\varepsilon_0^{(j)}f_s=\begin{cases}0, & \textit{если}\quad m\geqslant 1,\\ h_{\varepsilon,s}, & \textit{если}\quad m=0,\end{cases}$$

$$\varepsilon_0^{(j)}h_s=\varepsilon_1 g_{s-1}.$$

Доказательство. 1) Так как $\varepsilon_0^{(j)}(Q_0)\subset\mathrm{Rad}\,R$, то $T_0(\varepsilon_0^{(j)})(Q_0)\subset\mathrm{Rad}\,Q_0$. Очевидно, что для $\theta\in\mathrm{Rad}\,Q_0$ выполнено $\varepsilon_0^{(i)}(\theta)=0$. Следовательно, $\varepsilon_0^{(i)}\varepsilon_0^{(j)}=0$.

2) Заметим следующий факт. Пусть $\theta\in\mathrm{HH}^s(R)$, где $s\geqslant 1$, и $\varepsilon_0^{(j)}f_\lambda\theta=\omega f_\lambda$. Тогда $\varepsilon_0^{(j)}\theta=\omega$.

2.1) В случае $n-1\not\vdots\,\mathrm{char}\,k$ имеем $\varepsilon_0^{(j)}f_\lambda=\varkappa f_\lambda$ для некоторого $\varkappa\in k$. Из замечания 4 следует, что $\varkappa=0$. Доказываемое утверждение следует из равенства $\varepsilon_0^{(j)}f_\lambda=0$ и факта, указанного в начале доказательства пункта 2).

2.2) В случае $n-1\,\vdots\,\mathrm{char}\,k$ с помощью пункта 3) леммы 2 легко проверяется, что $\varepsilon_0^{(j)}f_\lambda=h_{\varepsilon,\lambda}$. Тогда остальные соотношения, указанные этом пункте, следуют из факта, указанного в начале доказательства пункта 2), и лемм 4 и 5. □

7. Описание алгебры когомологий Хохшильда

В этом параграфе мы опишем алгебру $\mathrm{HH}^*(R)$ образующими с соотношениями.

Каждому элементу $\theta\neq f_0$ из множества образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, описанного в следствии 3, поставим в соответствие переменную $\widetilde{\theta}$.

Рассмотрим следующие множества (в каждом множестве мы берём переменную с индексом s для всех s, для которых эта переменная определена):

$$\mathcal{A}=\{\widetilde{\varepsilon}_1,\widetilde{f}_s,\widetilde{g}_s\};\mathcal{B}=\{\widetilde{f}_{\varepsilon,s}\};\mathcal{C}_1=\{\widetilde{h}_s\};\mathcal{C}_2=\{\widetilde{h}_{\varepsilon,s}\};\mathcal{D}=\{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\}_{1\leqslant j\leqslant n-2}.$$

Определим следующие множества:

$$\mathcal{X}_1 = \mathcal{A}; \quad \mathcal{X}_2 = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{D};$$
$$\mathcal{X}_3 = \mathcal{X}_1 \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2; \quad \mathcal{X}_4 = \mathcal{X}_3 \cup \mathcal{D};$$
$$\mathcal{X}_5 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}; \quad \mathcal{X}_6 = \mathcal{X}_5 \cup \mathcal{D};$$
$$\mathcal{X}_7 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}_1; \quad \mathcal{X}_8 = \mathcal{X}_7 \cup \mathcal{D};$$
$$\mathcal{X}_9 = \mathcal{A} \cup \mathcal{B} \cup \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2; \quad \mathcal{X}_{10} = \mathcal{X}_9 \cup \mathcal{D}.$$

Введём на $k[\mathcal{X}_i]$ $(1 \leqslant i \leqslant 10)$ такую градуировку, что

$$\deg \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} = 0, \deg \widetilde{\varepsilon}_1 = 1, \deg \widetilde{f}_s = s, \deg \widetilde{f}_{\varepsilon,s} = s,$$
$$\deg \widetilde{g}_s = s, \deg \widetilde{h}_s = s, \deg \widetilde{h}_{\varepsilon,s} = s.$$

Пусть $s = a\lambda + b$, где $a \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $1 \leqslant b \leqslant \lambda$. Введём в этом случае следующие обозначения:

$$\phi(s) = a; \psi(s) = b.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_\mathcal{A}$ следующее множество, состоящее из однородных элементов алгебры $k[\mathcal{A}]$:

$$\{(\widetilde{\varepsilon}_1)^2\} \cup \{\widetilde{f}_{s_1}\widetilde{f}_{s_2} - \widetilde{f}_{\psi(s_1+s_2)}(\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2)} \mid m_1 + m_2 \leqslant n-2\}$$
$$\cup \{\widetilde{f}_{s_1}\widetilde{f}_{s_2} - 2\widetilde{g}_{\psi(s_1+s_2)}(\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2)} \mid m_1 + m_2 \geqslant n-1\}$$
$$\cup \{\widetilde{g}_{s_1}\widetilde{f}_{s_2} - \widetilde{g}_{\psi(s_1+s_2)}(\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2)} \mid m_1 + m_2 \leqslant n-3\}$$
$$\cup \{\widetilde{g}_{s_1}\widetilde{f}_{s_2} \mid m_1 + m_2 \geqslant n-1\} \cup \{\widetilde{g}_{s_1}\widetilde{g}_{s_2}\}.$$

Обозначим через $\mathcal{E}_\mathcal{D}$ следующее множество, состоящее из однородных элементов алгебры $k[\mathcal{D}]$:

$$\{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j_1)}\widetilde{\varepsilon}_0^{(j_2)} \mid 1 \leqslant j_1, j_2 \leqslant n-2\}.$$

Для $1 \leqslant i \leqslant 10$ в алгебре $k[\mathcal{X}_i]$ выберем множество однородных элементов $\mathcal{E}_i$ следующим образом:

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_\mathcal{A} \cup \{\widetilde{g}_{s_1}\widetilde{f}_{s_2} \mid m_1 + m_2 = n-2\};$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_\mathcal{D} \cup \{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\widetilde{f}_s, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\widetilde{g}_s \mid 1 \leqslant j \leqslant n-2\};$$

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_\mathcal{A} \cup \{\widetilde{g}_{s_1}\widetilde{f}_{s_2} - \widetilde{h}_{\varepsilon,\psi(s_1+s_2)}(\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2)} \mid m_1 + m_2 = n-2\}$$
$$\cup \{\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{h}_s\} \cup \{\widetilde{h}_{s_1}\widetilde{f}_{s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{f}_{\psi(s_1+s_2-1)}(\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)} \mid m_2 \geqslant 1\}$$
$$\cup \{\widetilde{h}_{s_1}\widetilde{g}_{s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{g}_{\psi(s_1+s_2-1)}(\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)} \mid m_2 \geqslant 1\}$$
$$\cup \{\widetilde{h}_{s_1}\widetilde{g}_{s_2} - \tfrac{1}{2}\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{f}_{\psi(s_1+s_2-1)}(\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)} \mid m_2 = 0\} \cup \{\widetilde{h}_{s_1}\widetilde{h}_{s_2}\}$$
$$\cup \{\widetilde{h}_{s_1}\widetilde{h}_{\varepsilon,s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{g}_{\psi(s_1+s_2-1)}(\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)}\}$$
$$\cup \{\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{h}_{\varepsilon,s}\} \cup \{\widetilde{h}_{\varepsilon,s_1}\widetilde{f}_{s_2} \mid m_2 \geqslant 1\} \cup \{\widetilde{h}_{\varepsilon,s_1}\widetilde{g}_{s_2}\} \cup \{\widetilde{h}_{\varepsilon,s_1}\widetilde{h}_{\varepsilon,s_2}\};$$

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_4 = \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \cup \{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{f}_s \mid m \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant n-2\} \\ \cup\{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{f}_s - \widetilde{h}_{\varepsilon,s} \mid m = 0, 1 \leqslant j \leqslant n-2\} \\ \cup\{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{g}_s, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{h}_{\varepsilon,s} \mid 1 \leqslant j \leqslant n-2\} \\ \cup\{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{h}_s - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{g}_{s-1} \mid 1 \leqslant j \leqslant n-2\};\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_5 = \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cup \{\widetilde{g}_{s_1} \widetilde{f}_{s_2} \mid m_1 + m_2 = n-2\} \cup \{\widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{f}_s \mid s+1 \vdots 2n-3\} \\ \cup\{\widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{f}_{\varepsilon,s}\} \cup \{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{f}_{s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{g}_{\psi(s_1+s_2-1)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)} \mid m_2 \geqslant 1\} \\ \cup\{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{f}_{\varepsilon,s_2}\} \cup \{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{g}_{s_2}\};\end{gathered}$$

$$\mathcal{E}_6 = \mathcal{E}_5 \cup \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \cup \{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{f}_s, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{f}_{\varepsilon,s}, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{g}_s \mid 1 \leqslant j \leqslant n-2\};$$

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_7 = \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cup \{\widetilde{g}_{s_1} \widetilde{f}_{s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{h}_{\psi(s_1+s_2-1)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)} \mid m_1 + m_2 = n-2\} \\ \cup\{\widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{f}_s \mid s+1 \vdots 2n-3\} \cup \{\widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{f}_{\varepsilon,s}\} \\ \cup\{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{f}_{s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{g}_{\psi(s_1+s_2-1)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)} \mid m_2 \geqslant 1\} \\ \cup\{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{f}_{\varepsilon,s_2}\} \cup \{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{h}_{s_2}\} \cup \{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{g}_{s_2}\} \\ \cup\{\widetilde{h}_{s_1} \widetilde{f}_{s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{f}_{\psi(s_1+s_2-1)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)} \mid m_2 \geqslant 1\} \\ \cup\{\widetilde{h}_{s_1} \widetilde{g}_{s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{g}_{\psi(s_1+s_2-1)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)} \mid m_2 \geqslant 1\} \\ \cup\{\widetilde{h}_{s_1} \widetilde{g}_{s_2} - \widetilde{f}_{\varepsilon,\psi(s_1+s_2)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2)} \mid m_2 = 0\} \\ \cup\{\widetilde{h}_{s_1} \widetilde{h}_{s_2} - \widetilde{g}_{\psi(s_1+s_2)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2)}\};\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_8 = \mathcal{E}_7 \cup \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \cup \{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{f}_s \mid m \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant n-2\} \\ \cup\{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{f}_s - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{h}_{s-1} \mid m = 0, 1 \leqslant j \leqslant n-2\} \\ \cup\{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{f}_{\varepsilon,s}, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{g}_s \mid 1 \leqslant j \leqslant n-2\} \\ \cup\{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)} \widetilde{h}_s - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{g}_{s-1} \mid 1 \leqslant j \leqslant n-2\};\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathcal{E}_9 = \mathcal{E}_{\mathcal{A}} \cup \{\widetilde{g}_{s_1} \widetilde{f}_{s_2} - \widetilde{h}_{\varepsilon,\psi(s_1+s_2)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2)} \mid m_1 + m_2 = n-2\} \\ \cup\{\widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{f}_s \mid s+1 \vdots 2n-3\} \cup \{\widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{f}_{\varepsilon,s}\} \\ \cup\{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{f}_{s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{g}_{\psi(s_1+s_2-1)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)} \mid m_2 \geqslant 1\} \\ \cup\{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{f}_{\varepsilon,s_2}\} \cup \{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{h}_{s_2}\} \cup \{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{h}_{\varepsilon,s_2}\} \cup \{\widetilde{f}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{g}_{s_2}\} \\ \cup\{\widetilde{h}_{s_1} \widetilde{f}_{s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{f}_{\psi(s_1+s_2-1)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)} \mid m_2 \geqslant 1\} \\ \cup\{\widetilde{h}_{s_1} \widetilde{g}_{s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{g}_{\psi(s_1+s_2-1)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)} \mid m_2 \geqslant 1\} \\ \cup\{\widetilde{h}_{s_1} \widetilde{g}_{s_2} - \widetilde{f}_{\varepsilon,\psi(s_1+s_2)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2)} \mid m_2 = 0\} \\ \cup\{\widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{h}_s\} \cup \{\widetilde{h}_{s_1} \widetilde{h}_{s_2}\} \cup \{\widetilde{h}_{s_1} \widetilde{h}_{\varepsilon,s_2} - \widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{g}_{\psi(s_1+s_2-1)} (\widetilde{f}_\lambda)^{\phi(s_1+s_2-1)}\} \\ \cup\{\widetilde{\varepsilon}_1 \widetilde{h}_{\varepsilon,s}\} \cup \{\widetilde{h}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{f}_{s_2} \mid m_2 \geqslant 1\} \cup \{\widetilde{h}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{g}_{s_2}\} \cup \{\widetilde{h}_{\varepsilon,s_1} \widetilde{h}_{\varepsilon,s_2}\};\end{gathered}$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_{10} = \mathcal{E}_9 \cup \mathcal{E}_{\mathcal{D}} \cup \{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\widetilde{f}_s \mid m \geqslant 1, 1 \leqslant j \leqslant n-2\} \\
\cup\{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\widetilde{f}_s - \widetilde{h}_{\varepsilon,s} \mid m = 0, 1 \leqslant j \leqslant n-2\} \\
\cup\{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\widetilde{\varepsilon}_1, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\widetilde{f}_{\varepsilon,s}, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\widetilde{g}_s, \widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\widetilde{h}_{\varepsilon,s} \mid 1 \leqslant j \leqslant n-2\} \\
\cup\{\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\widetilde{h}_s - \widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{g}_{s-1} \mid 1 \leqslant j \leqslant n-2\}.
\end{aligned}
$$

Обозначим для $1 \leqslant i \leqslant 10$ через I_i идеал алгебры $k[\mathcal{X}_i]$, порождённый множеством $\mathcal{E}_i$. Тогда верна следующая теорема.

Теорема 3. 1) *Пусть* $\operatorname{char} k \neq 2$, $n-1 \not\vdots \operatorname{char} k$ *и* $r > 1$. *Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}_1]/I_1$.

2) *Пусть* $\operatorname{char} k \neq 2$, $n-1 \not\vdots \operatorname{char} k$ *и* $r = 1$. *Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}_2]/I_2$.

3) *Пусть* $\operatorname{char} k \neq 2$, $n-1 \vdots \operatorname{char} k$ *и* $r > 1$. *Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}_3]/I_3$.

4) *Пусть* $\operatorname{char} k \neq 2$, $n-1 \vdots \operatorname{char} k$ *и* $r = 1$. *Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}_4]/I_4$.

5) *Пусть* $\operatorname{char} k = 2$, $n-1 \not\vdots 2$ *и* $r > 1$. *Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}_5]/I_5$.

6) *Пусть* $\operatorname{char} k = 2$, $n-1 \not\vdots 2$ *и* $r = 1$. *Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}_6]/I_6$.

7) *Пусть* $\operatorname{char} k = 2$, $n-1 \vdots 2$, $n-1 \not\vdots 4$ *и* $r > 1$. *Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}_7]/I_7$.

8) *Пусть* $\operatorname{char} k = 2$, $n-1 \vdots 2$, $n-1 \not\vdots 4$ *и* $r = 1$. *Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}_8]/I_8$.

9) *Пусть* $\operatorname{char} k = 2$, $n-1 \vdots 4$ *и* $r > 1$. *Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}_9]/I_9$.

10) *Пусть* $\operatorname{char} k = 2$, $n-1 \vdots 4$ *и* $r = 1$. *Тогда* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq k[\mathcal{X}_{10}]/I_{10}$.

Доказательство. В каждом из случаев 1)–10) рассмотрим гомоморфизм градуированных k-алгебр $\pi : k[\mathcal{X}_i] \to \mathrm{HH}^*(R)$, который каждый элемент множества $\mathcal{X}_i$ вида $\widetilde{\theta}$ переводит в $\theta \in \mathrm{HH}^*(R)$. Пользуясь следствием 3, легко показать, что π – сюръективный гомоморфизм. Из лемм 3–6 в каждом из 10 случаев следует, что $I_i \subset \operatorname{Ker}\pi$. Следовательно, существует сюръективный гомоморфизм градуированных k-алгебр $\bar{\pi} : k[\mathcal{X}_i]/I_i \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий класс элемента $\widetilde{\theta} \in \mathcal{X}_i$ в θ. Осталось доказать, что $\bar{\pi}$ – изоморфизм. Обозначим алгебру $k[\mathcal{X}_i]/I_i$ через A_i. Пусть $A_i = \bigoplus_{s\geqslant 0} A_i^s$ – прямое разложение алгебры A_i на однородные прямые слагаемые. Тогда нам достаточно проверить, что $\dim_k A_i^s \leqslant \dim_k \mathrm{HH}^s(R)$ для $s \geqslant 0$. Легко проверить, что любое произведение $\widetilde{\theta}_1\widetilde{\theta}_2$, где $\widetilde{\theta}_1$ и $\widetilde{\theta}_2$ – элементы множества $\mathcal{X}_i$, отличные от

$\widetilde{\varepsilon}_1$ и $\widetilde{f}_\lambda$, равно по модулю идеала I_i либо 0, либо $\varkappa(\widetilde{\varepsilon}_1)^{a_1}\widetilde{\theta}(\widetilde{f}_\lambda)^{a_2}$, где $a_1, a_2 \in \{0,1\}$, $\varkappa \in k$ и $\widetilde{\theta} \in (\mathcal{X}_i \backslash \{\varepsilon_1, f_\lambda\}) \cup \{1\}$. Тогда мы можем привести любое ненулевое произведение вида $\widetilde{\theta}_1 \dots \widetilde{\theta}_t$, где $\widetilde{\theta}_1, \dots, \widetilde{\theta}_t \in \mathcal{X}_i$, к виду $\varkappa(\widetilde{\varepsilon}_1)^{a_1}\widetilde{\theta}(\widetilde{f}_\lambda)^{a_2}$, где $\varkappa \in k$, $a_1 \in \{0,1\}$, $a_2 \geqslant 0$, $\widetilde{\theta} \in (\mathcal{X}_i \backslash \{\varepsilon_1, f_\lambda\}) \cup \{1\}$. Так как все элементы множества $\mathcal{X}_i$ имеют степень не большую, чем λ, и все элементы степени λ, кроме $\widetilde{f}_\lambda$, в произведении с $\widetilde{\varepsilon}_1$ дают 0, то из этого следует, что любой однородный элемент ρ степени $s > \lambda$ представляется в A_i в виде $\rho = \varkappa\rho_0(\widetilde{f}_\lambda)^a$, где $\varkappa \in k$, $a \geqslant 1$, ρ_0 – однородный элемент степени $s - a\lambda \leqslant \lambda$. Следовательно, если $s > \lambda$, то $\dim_k A_i^s \leqslant \dim_k A_i^{s-a\lambda}$, где $s - a\lambda \leqslant \lambda$. Так как в этом случае $\dim_k \mathrm{HH}^s(R) = \dim_k \mathrm{HH}^{s-a\lambda}(R)$, то достаточно доказать, что $\dim_k A_i^s \leqslant \dim_k \mathrm{HH}^s(R)$ для $0 \leqslant s \leqslant \lambda$. Так как $\widetilde{\varepsilon}_0^{(j)}\widetilde{f}_\lambda$ $(1 \leqslant j \leqslant n-2)$ равно по модулю идеала I_i либо 0, либо $\widetilde{h}_{\varepsilon,\lambda}$, либо $\widetilde{\varepsilon}_1\widetilde{h}_{\lambda-1}$, то при $0 \leqslant s \leqslant \lambda$ из сказанного выше следует, что A_i^s порождается элементами вида $(\widetilde{\varepsilon}_1)^a\widetilde{\theta}$, где $a \in \{0,1\}$, $\widetilde{\theta} \in \mathcal{X}_i \cup \{1\}$. Назовём элементы такого вида нормальными. Пользуясь теоремой 1 или 2 в зависимости от значения r, получаем для всех $1 \leqslant i \leqslant 10$, $0 \leqslant s \leqslant \lambda$, что число нормальных элементов в A_i^s, не лежащих в $\mathcal{E}_i$, равно $\dim_k \mathrm{HH}^s(R)$. Следовательно, для всех $s \geqslant 0$ имеем $\dim_k A_i^s \leqslant \dim_k \mathrm{HH}^s(R)$. Таким образом, теорема доказана. $\square$

Литература

1. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа D_n. IV.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 100–118.
2. Ю. В. Волков, *Классы стабильной эквивалентности самоинъективных алгебр древесного типа D_n.* — Вестник С.-Пб. ун-та, Сер. 1, Мат., мех., астр. Вып. 1 (2008), 15–21.

Volkov Yu. V. Hochschild cohomology for self-injective algebras of tree class D_n. V.

Description of Hochschild cohomology algebra in terms of generators with relations is given for one family of self-injective algebras of tree class D_n. Minimal bimodule projective resolution which was constructed by the author in another paper is used for the corresponding calculations.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: wolf86_666@list.ru

Поступило 28 сентября 2011 г.