Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 394, 2011 г.

Н. А. Вавилов, А. В. Степанов

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ НАД ОБЩИМИ КОЛЬЦАМИ I. ОБЩИЕ МЕСТА

Just because something *happens* to be true,
it should not be taken for granted.
Raymond Smullyan, Is God a Taoist?

В настоящей работе мы даем *систематический* обзор нескольких центральных тем теории классических групп над общими кольцами, таких как основные структурные теоремы, коммутационные формулы, условия конечности и стабильности, стабилизация и предстабилизация, нильпотентность K_1, центральность K_2, автоморфизмы и гомоморфизмы и т.д.

Кроме основных классических теорем мы формулируем несколько менее известных недавних результатов, в том числе некоторые новые результаты. Все основные результаты сопровождаются либо полными доказательствами – а важнейшие из них даже *несколькими* доказательствами, основанными на различных идеях – либо, в тех случаях, когда все известные нам опубликованные доказательства носят *слишком* технический характер, детальным *наброском* доказательства.

Ключевые слова: линейные группы, полная линейная группа, ассоциативные кольца, односторонние обратные, слабая конечность, условие IBN, элементарные трансвекции, линейные трансвекции, конгруэнц-подгруппы, элементарные подгруппы, разложение Брюа, разложение Гаусса, параболические подгруппы, группа финитарных матриц, леммы типа Уайтхеда.

Работа авторов была поддержана проектами РФФИ 08-01-00756, 09-01-00762, 09-01-00784, 09-01-00878, 09-01-91333, 09-01-90304, 10-01-90016, 10-01-92651, 11-01-90016 и частично выполнена в SFB-701 при Университете Билефельда. Кроме того, первый автор благодарит EPSRC EP/D03695X/1 (first grant scheme Рузби Хазрата) за финансовую поддержку, а также Университет Белфаста, Университет Билефельда, Вьетнамский Национальный Университет (город Ho Chi Minh), Аэрокосмический Университет (Пекин), Университет Перуджи, Ludwig-Maximilian Universität (Мюнхен) и Тата Институт (Мумбай) за гостеприимство во время работы над текстом настоящей работы. Второй автор благодарит Школу Математики и Физики (Лахор) за гостеприимство и финансовую поддержку. Кроме того, работа обоих авторов поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского Государственного Университета, "Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической K-теории".

Тем не менее, в действительности, фокус этой работы состоит в том, чтобы,

• проиллюстрировать ОСНОВНЫЕ МЕТОДЫ структурной теории линейных групп над кольцами, как геометрические, так и теоретико-кольцевые,

• продемонстрировать СВОЕОБРАЗИЕ структурной теории линейных групп над кольцами и объяснить причины, по которым некоторые классические результаты полностью переносятся в общую ситуацию, а другие невозможно пошевелить,

• систематизировать центральные НЕРЕШЕННЫЕ ЗАДАЧИ этой теории. Некоторые из этих задач широко известны, но многие формулируются здесь впервые.

Глава 1. Введение

В Поднебесной нет чисто белых лисиц,
но есть халаты на чисто белом лисьем меху,
сделанные из огромного количества
белых клочков от разных шкурок.
Ле Цзы

В настоящем обзоре мы пытаемся дать представление о том, что происходило в теории линейных групп после основополагающей работы Хаймана Басса 1964 года [163].

§1. Что мы хотим знать о группе?

Чтобы сделать наше изложение настолько элементарным, насколько это вообще возможно, мы детально обсуждаем только случай **полной линейной группы** $\mathrm{GL}(n,R)$ над *ассоциативным кольцом* R с 1, оставляя классические группы – и, тем более, группы типа Ли и изотропные редуктивные группы – на горизонте, в виде кратких перспектив и нерешенных проблем. Кроме того, мы обсуждаем только те задачи, которые могут быть *сформулированы* в терминах элементарной теории групп, и полностью игнорируем многие более софистицированные предметы.

Что мы хотели бы знать о группе G? Перечислим несколько безотлагательных и архетипичных вопросов:

• нормальное строение,

- автоморфизмы,
- образующие и соотношения,
- классы сопряженности,
- представления,
- решетка подгрупп,
- факторизации.

Естественно, *на самом деле* мы хотели бы добавить к этому списку много дальнейших пунктов: когомологии, геометрии, $\dots, \dots, \dots$ но в настоящем тексте мы ограничимся перечисленными выше темами.

Некоторые из этих вопросов чрезвычайно сложны или даже вообще не могут быть полностью решены as stated даже в случае, когда $R = K$ является полем. Например, это относится к описанию всех подгрупп группы $\mathrm{GL}(n, K)$. Описание конечномерных представлений группы $\mathrm{GL}(n, K)$ известно, но является непростой задачей. В то же время, ответы на многие из этих вопросов – описание нормальных подгрупп, автоморфизмов, классов сопряженных элементов и т.д. – достаточно просты и классически известны.

Пытаясь обобщить эти ответы на линейные группы над кольцами мы сразу же сталкиваемся с тем, что некоторые из них – например, описание классов сопряженных элементов – становятся *дикими*. Иными словами, они не только не решены, но и *не могут быть* решены ни в каком разумном смысле.

Гораздо интереснее то, что многие их этих вопросов допускают более чем удовлетворительные ответы – по крайней мере в **качественном** смысле – для широких классов колец, включающих, *например*, все коммутативные кольца. Разумеется, при этом приходится слегка модифицировать ответы, чтобы учесть решетку идеалов кольца R, его связные компоненты и т.д. Однако, в большинстве случаев все подобные изменения очевидны. Типичными примерами вопросов, которые могут быть полностью решены для произвольных коммутативных колец, являются описание нормальных подгрупп, автоморфизмов, задания групп в терминах образующих и соотношений.

Стоит подчеркнуть, что классические ответы для полей включают также **количественные** аспекты – такие как, скажем, явное вычисление некоторых фактор-групп. Например, для полей значения младших K-функторов известны. Такие точные количественные ответы известны лишь для некоторых очень специальных классов колец – главным образом для колец теоретико-числового и алгебро-геометрического происхождения – и тесно связаны с арифметикой кольца.

§2. Что есть в нашем обзоре?

В классических работах при изучении классических групп использовалась главным образом линейная алгебра, либо в виде прямых матричных вычислений, либо слегка замаскированная, как проективная/полярная геометрия или как теория представлений.

С другой стороны, начиная с 1960-х годов постоянно росла роль пришедших из теории алгебраических групп **элементарных вычислений**, основанных на соотношениях Стейнберга. В то же время, огромный прогресс, достигнутый в изучении линейных групп над кольцами в последние десятилетия, стал возможен только благодаря возникновению в 1970–90-х годах следующих методов, в той или иной форме стимулированных алгебраической K-теорией.

• Восходящих к работам Хаймана Басса методов, основанных на использовании **условий стабильности**. Если отвлечься от условий на кольцо, существом этих методов является построение разложений типа Басса–Кольстера, Денниса–Васерштейна, и т.д., которые играют такую же роль для конечномерных колец, как разложения Брюа и Гаусса для полей и полулокальных колец.

• Предложенного Майклом Стайном (и развитого Ричардом Суоном, Джоном Милнором, Андреем Суслиным) метода **релятивизации**, который позволяет сводить большинство вопросов к абсолютному случаю.

• Предложенного Даниэлом Квилленом и Андреем Суслиным метода **локализации-склейки** = `localisation and patching`, позволяющего сводить многие вопросы к локальным кольцам. Существом этого метода является **лемма Квиллена–Суслина**, на которой непосредственно основана большая часть *английских* работ Васерштейна.

• Метода **факторизации** Андрея Суслина и его развития в работах Марата Туленбаева и Вильберда ван дер Каллена.

• Предложенного нами и Евгением Плоткиным метода **разложения трансвекций** и его дальнейшего развития в работах наших учеников Михаила Гавриловича, Сергея Николенко, Александра Лузгарева и Виктории Казакевич.

• Метода Леонида Васерштейна **малых разложений единицы**, позволяющего доказывать структурные результаты над кольцами топологического и аналитического происхождения, такими, как Банаховы алгебры.

• Предложенного Энтони Баком метода **локализации-пополнения** = `localisation-completion` и его дальнейшего развития в работах Рузби Хазрата, авторов и Виктора Петрова.

• Предложенного Рузби Хазратом, Чжанг Дзухонгом и авторами **относительных** вариантов локализационных методов.

• Предложенного вторым автором метода **общей локализации** = `generic localisation`, позволяющим получать оценки, не зависящие от размерности основного кольца.

В настоящей работе мы детально излагаем основные идеи всех этих методов в простейшем случае $\mathrm{GL}(n,R)$ и иллюстрируем их применения на нетривиальных примерах.

Подчеркнем, что в настоящей работе мы обсуждаем главным образом результаты *общего* характера, и практически не упоминаем явления специфические для различных специальных классов колец, таких как арифметические. Почему коммутативные или конечномерные кольца представляются нам общими, а, скажем, кольца регулярные по фон Нейману — нет, это, конечно, вопрос эстетического решения. Однако в большинстве случаев мы не испытывали никаких затруднений в том, чтобы отнести результаты к той или иной категории.

В тех случаях, когда результат для $\mathrm{GL}(n,R)$ известен, мы предлагаем обобщить его на следующие более общие классы редуктивных групп:

• баковские унитарные группы $\mathrm{GU}(2n,R,\Lambda)$;

• группы Шевалле $G(\Phi,R)$;

• группы точек изотропных редуктивных групп $G_\rho(\Phi,R)$.

Однако, при этом мы не делаем никаких попыток обсуждать имеющиеся здесь результаты или методы, и, тем более, специфику исключительных групп в технических аспектах. Все это, а также детальную библиографию можно найти в обзорах авторов [620, 574, 14, 435, 305, 16] и в недавних работах Петербургской школы, в частности, в [17, 18, 23, 92, 74].

Отметим несколько ключевых публикаций, в которых линейные группы над кольцами трактуются в близких аспектах.

• Прежде всего, адресуем читателя к книге Хана–О'Миры [300], которая является не монографией, а монументальным обзором теории классических групп над кольцами и ее связей с алгебраической K-теорией. Конечно, мы вынуждены напоминать некоторые основные обозначения и ключевые факты, но в целом здесь мы формулируем главным образом результаты, о которых не шла речь в [300], и нерешенные задачи.

• Настоящая работа является *частичным* — но *гораздо* более глубоким и *детальным*! — апдейтом обзора первого автора [620]. С одной стороны, в [620] рассматриваются группы Шевалле всех типов, в том числе и в первую очередь *исключительные*. С другой стороны, в настоящем обзоре мы затрагиваем многие *дистинктно* некоммутативные аспекты, которые имеют смысл *только* для групп типа A_l, линейных и унитарных.

• Во многих отношениях настоящая работа является *продолжением* нашей статьи [574], в которой в случае коммутативных и некоторых некоммутативных колец даны совсем простые геометрические доказательства основных структурных результатов. Снова мы вынуждены – per forza! – напоминать некоторые обозначения и основные факты, но не пытаемся дублировать *содержание* [574]. Настоящая работа значительно шире по охвату, чем [574], что неизбежно приводит к некоторой потере фокуса, поэтому неспециалисту будет гораздо легче читать ее вместе с [574].

• В недавнем обзоре Рузби Хазрата и первого автора [305], дается *гораздо* более широкая картина исторического развития этой области в целом, и в особенности классических групп и младшей алгебраической K-теории (форменные кольца и идеалы, баковские унитарные группы, унитарная K-теория, теоремы стабилизации и предстабилизации, неабелева K-теория, унитарная группа Стейнберга, локализационные методы, теория размерности, конгруэнц-проблема, etc.).

§3. Чего нет в нашем обзоре?

Стоит также сразу честно сказать, чего нет или *почти* нет в настоящей работе – WE HAVEN'T FORGOTTEN ANYTHING WE DIDN'T WANT TO FORGET.

Прежде всего, это многие сотни [к сожалению известных нам] статей, которые мы *хотели бы* забыть. А именно, *подавляющее* большинство опубликованных работ относится к группам над кольцами размерности ≤ 1. Огромная часть этих статей бессмысленна чуть более, чем полностью, так как в них:

◦ передоказываются результаты, относящиеся к случаю поля [или тела], вместо того, чтобы производить факторизацию по радикалу, которая обычно *гораздо* проще, чем случай поля;

◦ доказываются частные случаи результатов, которые известны при условиях стабильности – и, тем самым, для любых конечномерных колец – *по крайней мере* с конца 1960-х годов [149, 166];

◦ с использованием специфических геометрических или арифметических соображений доказываются маломерные частные случаи результатов, справедливых для *произвольных* коммутативных колец, для которых мы с 1980-х годов владеем *гораздо более простыми* чисто алгебраическими доказательствами.

В первую очередь все это относится к следующим двум типам результатов.

• Результатам о линейных группах над кольцами размерности 0, такими как локальные, полулокальные, кольца стабильного ранга 1, полные кольца и т.д. За исключением немногочисленных статей об описании подгрупп и стабилизации, в которых *по существу* используется тот факт, что в таких кольцах много обратимых элементов, ВСЕ ЭТИ РАБОТЫ ЯВЛЯЛИСЬ УСТАРЕВШИМИ НА МОМЕНТ ПУБЛИКАЦИЙ.

• Результатам о линейных группах над кольцами размерности 1, такими как кольца главных идеалов, дедекиндовы кольца и т.д., в частности, всей арифметической теории. К некоторой части этих работ можно отнести замечание, сделанное в предыдущем пункте. С другой стороны, имеется большое количество содержательных статей, в которых *нетривиальным* образом учитывается арифметическая специфика, скажем, возможность явного вычисления различных факторгрупп с использованием законов взаимности. Ясно, однако, что нет *никакой* надежды перенести результаты такого рода в общую ситуацию.

Основным недостатком большинства этих работ является то, что они даже не являются ошибочными – THEY ARE NOT EVEN WRONG.

Sul altro versante, имеется много направлений, которые представляются нам интересными, в некоторых случаях *чрезвычайно* интересными, но которые уводят *слишком* далеко от нашей основной линии, о которых мы *вынуждены* забыть.

• Прежде всего, это метод **некоммутативных локализаций** примененный к линейным группам Игорем Голубчиком, Александром Михалевым и Виктором Герасимовым, и являющийся его обобщением метод **теории размерности** Энтони Бака. Систематическое изложение этих методов потребовало бы от нас неуместного углубления в теорию некоммутативных колец. С другой стороны, мы упоминаем результаты, полученные этими методами и формулируем некоторые возникающие здесь задачи.

• Почти вся специфическая теория, относящаяся к группам ранга 1, в частности, к группе GL_2. В большинстве старых работ происходила попытка форсировать стандартные ответы ценой искусственных дополнительных предположений. Сегодня любое осмысленное обсуждение группы GL_2 должно учитывать революцию в нашем понимании, произведенную работами Косты и Келлера [235, 236, 237, 238, 239, 241]. Однако стандартные в их смысле ответы являются слишком техническими, и их до сих пор не удалось включить в общий контекст. К тому же, окончательные результаты все равно получаются только для колец размерности ≤ 1.

• Результаты о подгруппах, даже те, *основные идеи* в доказательстве которых мало отличаются от доказательств структурных теорем. Дело в том, что аккуратные формулировки этих результатов требуют введения большого количества специфических обозначений, а их доказательства опираются на множество специфических технических лемм. Этой теме посвящены отдельные обзоры авторов, в частности, [621, 31].

• Вся бесконечномерная теория – кроме почти тривиального случая финитарных групп, который был рассмотрен Бассом в 1964 году, и с которого, собственно, и началась современная структурная теория [конечномерных] классических групп. Литература в области структурной теории бесконечномерных классических групп находится в ужасающем состоянии, огромная часть опубликованных работ содержит *прямые ошибки*, часто на уровне определений и первых лемм. Было бы чрезвычайно интересно разобраться в том, что здесь *на самом* *деле* известно, но это представляет собой огромную самостоятельную тему.

• Первоначально мы намеревались включить в настоящую статью также результаты и нерешенные задачи, относящиеся к экономному и ограниченному порождению, ширине в коммутаторах, элементарных образующих, трансвекциях и т.д., свойству Каждана и другим подобным вещам. Однако, в процессе работы мы осознали, что это также огромная отдельная тема, требующая специального обзора.

§4. Не каждую задачу можно решить

Прежде, чем переходить к положительным результатам, отметим, что большинство стандартных результатов теории линейных групп над полями, особенно явные классификационные теоремы, вообще не допускают никаких нетривиальных обобщений на кольца. Уже над простейшими кольцами, не являющимися прямыми суммами полей, огромный класс задач никогда не может быть решен.

В частности, как обнаружили Виталий Бондаренко и Сергей Нагорный, это относится к таким задачам, как классификация представлений, описание классов сопряженных элементов – и, таким образом, почти все задачи о классификации орбит! – и многим другим естественным *на первый взгляд* задачам.

Вот классическая нерешенная – и нерешаемая! – классификационная задача. Пусть K – поле, $x, y \in M(n, K)$. **Задача о паре матриц** состоит в нахождении представителей пар (x, y) по отношению к одновременному сопряжению (gxg^{-1}, gyg^{-1}) элементами $g \in \mathrm{GL}(n, K)$. Классификационная задача называется **дикой**, если она включает в себя задачу о паре матриц.

Дикая задача не может быть решена каким-либо разумным образом. Почему? Например, известно, что все конечные простые группы порождаются двумя элементами. Таким образом, явное решение задачи о паре матриц включало бы в себя, *в частности*, классификацию простых конечных групп и, в действительности, гораздо более сильные результаты: классификацию всех их представлений, и даже описание явного вида образов пар образующих этих групп во всех представлениях. Разумеется, 2-порожденная группа не обязана быть простой или конечной, так что сформулированная выше подзадача представляет собой лишь крошечную часть исходной задачи.

Более того, Гельфанд и Пономарев заметили, что классификация пар матриц влечет классификацию троек, четверок, и т.д.

Теорема Гельфанда–Пономарева. *Задача о паре матриц эквивалентна задаче об m-ке матриц для любого $m \geq 2$.*

Иными словами, если бы мы могли классифицировать пары матриц с точностью до сопряженности, то мы могли бы классифицировать любые m-ки матриц $(gx_1g^{-1}, \ldots, gx_mg^{-1})$, $g \in \mathrm{GL}(n, K)$, где $x_1, \ldots, x_m \in \mathrm{M}(n, K)$. Эта задача включает в себя, в качестве очень частных случаев классификацию всех конечно порожденных групп и их конечномерных представлений. Ясно, что эта задача находится далеко за пределами возможностей науки, невозможно даже представить, как мог бы выглядеть ответ на нее.

Впрочем стоит подчеркнуть, что речь здесь не идет об алгоритмической неразрешимости. Напротив, для каждой *конкретной* степени n получение такой классификации представляет собой конкретную задачу алгебраической геометрии. Для небольших n эта задача может быть решена обычными средствами компьютерной алгебры. `Невозможность` означает здесь невозможность сформулировать *математический* ответ, единым образом охватывающий все n.

Следующее простое наблюдение является крайне серьезным предупреждением на тему GENERALIZATIONS TO RINGS SHOULD NOT BE TAKEN LIGHTLY. В частности, как заметили Виталий Бондаренко [7] и Сергей Нагорный [76], уже параметризация классов сопряженных элементов в группе $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ эквивалентна задаче о паре матриц в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_p)$.

Теорема Бондаренко–Нагорного. *Нахождение представителей классов сопряженности группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})$ является дикой задачей.*

Ясно, что *тем более* невозможно описать классы сопряженных элементов над *любым* кольцом, среди фактор-колец которых встречается кольца $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$, например, над кольцом $\mathbb{Z}$. Стоит упомянуть, что в той же работе Нагорного [76] отмечено, что описание классов сопряженности в нередуктивных группах *над полем* также, вообще говоря, является дикой задачей.

Глава 2. Основные обозначения

Здесь мы совсем коротко напомним основные обозначения, относящиеся к группам, кольцам и линейной алгебре, и некоторые часто используемые в дальнейшем факты.

§5. Основные обозначения: группы

Наши обозначения, относящиеся к теории групп, совершенно стандартны. Для двух элементов $x, y \in G$ через $[x,y] = xyx^{-1}y^{-1}$ обозначается их *левонормированный* коммутатор, а через $x^y = y^{-1}xy$ и ${}^y x = yxy^{-1}$, соответственно, правый и левый сопряженные к x при помощи y. Кратные (alias высшие) коммутаторы также всегда предполагаются левонормированными, так что, например, $[x,y,z]$ обозначает $[[x,y],z]$.

Во многих доказательствах мы *постоянно* пользуемся тождествами для коммутаторов. Очевидные тождества, такие как $[x,y]^{-1} = [y,x]$ или $[x,y]^g = [x^g, y^g]$, обычно используются без каких-либо явных ссылок. Приведем несколько чуть менее очевидных тождеств. При этом полезно иметь в виду аналогию с более простым случаем алгебр Ли. Однако, в теории групп большинство обычных тождеств приходится слегка подправлять с учетом некоммутативности, вводя в них сопряжения или высшие коммутаторы.

Например, мультипликативность коммутатора по аргументам имеет вид

$$[xy,z] = {}^x[y,z]\cdot[x,z], \quad [x,yz] = [x,y]\cdot {}^y[x,z].$$

или, если мы хотим избавиться от сопряжений, заменив их высшими коммутаторами, то вид

$$[x,yz] = [x,y]\cdot[x,z]\cdot[[z,x],y], \quad [xy,z] = [[y,z],x]\cdot[y,z]\cdot[x,z].$$

Если вторая из этих формул выглядит несколько странно, то это потому, что мы работаем с *левонормированными* коммутаторами. Для правонормированных коммутаторов странно выглядела бы первая из этих формул.

Простейшим некоммутативным аналогом тождества Якоби является *тождество Холла* утверждающее, что

$$[x,y,{}^y z]\cdot[y,z,{}^z x]\cdot[z,x,{}^x y] = 1,$$

для всех $x,y,z \in G$. Однако, обычно нам будет удобно выносить сопряжения из под знака коммутатора. Получающееся тождество известно как *тождество Холла–Витта*,

$$[x, y^{-1}, z^{-1}]^x \cdot [z, x^{-1}, y^{-1}]^z \cdot [y, z^{-1}, x^{-1}]^y = 1.$$

Мы используем запись $H \leq G$, чтобы подчеркнуть, что H является подгруппой в G, а не просто подмножеством, когда мы написали бы $X \subseteq G$. В свою очередь, запись $H \trianglelefteq G$ обозначает, что подгруппа H нормальна в G, иными словами, что для любых двух элементов $x, y \in G$ из того, что $xy \in H$ вытекает, что $yx \in H$. Подгруппа H группы G называется *субнормальной подгруппой* глубины (или дефекта) d, если существует нормальный ряд

$$G = G_0 \trianglelefteq G_1 \trianglelefteq \ldots \trianglelefteq G_{d-1} \trianglelefteq G_d = H.$$

Запись $H \trianglelefteq\trianglelefteq G$ обозначает, что H субнормальна в G.

Для двух подмножеств $X, Y \subseteq G$ через $X \cdot Y$ или просто XY обозначается их произведение *по Минковскому*, $XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$. Точно так же, через X^{-1} обозначается множество $X^{-1} = \{x^{-1} \mid x \in X\}$. Множество X называется *симметрическим*, если $X^{-1} = X$.

Для подгруппы $H \leq G$ и элемента $g \in G$ через $Hg = \{hg \mid h \in H\}$ обозначается *левый* смежный класс H с представителем g. Точно так же определяются *правые* смежные классы $gH = \{gh \mid h \in H\}$. Подмножество $X \subseteq G$ называется *левой трансверсалью* к H, если $HX = G$ и, кроме того, из того, что $Hx = Hy$ для некоторых $x, y \in X$, вытекает, что $x = y$. В немецкой традиции левые трансверсали назывались системами представителей левых смежных классов. Правая трансверсаль к H определяется аналогично. Для левой трансверсали X обратное к ней по Минковскому множество X^{-1} является правой трансверсалью. Для двух подгрупп $F, H \leq G$ и элемента $g \in G$ множество $FgH = \{fgh \mid f \in F, h \in H\}$ называется *двойным* смежным классом по модулю (F, H) с представителем g.

Пусть $X \subseteq G$. Множество всех $g \in G$ таких, что $gX = Xg$, называется *нормализатором* X в G и обозначается $N_G(X)$. В свою очередь, множество всех $g \in G$ таких, что $gx = xg$ для всех $x \in X$, называется *централизатором* X в G и обозначается $C_G(X)$. Ясно, что $C_G(X) \leq N_G(X)$. Централизатор G в G называется *центром* группы G и обозначается через $C(G)$.

Для двух подгрупп $F, H \leq G$ через $[F, H]$ обозначается их *взаимный коммутант*, порожденный всеми коммутаторами $[f, h]$, $f \in F$,

$h \in H$. Группа G называется *совершенной*, если $G = [G, G]$. Это условие играет совершенно исключительную роль в дальнейшем, как с технической, так и с принципиальной точки зрения. Дело в том, что совершенные группы – это в точности группы, для которых существуют универсальные центральные расширения.

Пусть $F, H \leq G$ – две подгруппы в G. Говорят, что H нормализует F или что F нормализуется H, если $H \leq N_G(F)$. Ясно, что H в том и только том случае нормализует F, когда $[H, F] \leq F$. В частности, подгруппа $H \leq G$ в том и только том случае нормальна в G, когда $[G, H] \leq H$. Из тождества Холла–Витта сразу вытекает следующий факт, известный как лемма о трех подгруппах.

Лемма 1. *Пусть $A, B, C \leq G$ – три подгруппы в G, а $H \trianglelefteq G$ – нормальная подгруппа. Если любые два из коммутаторов*

$$[A, B, C], \quad [B, C, A], \quad [C, A, B]$$

содержатся в H, то тогда и третий из них тоже содержится в H.

Пусть F, H – две подгруппы группы G. Напомним, что *транспортером* подгруппы F в подгруппу H называется множество

$$\mathrm{Tran}_G(F, H) = \{g \in G \mid F^g \leq H\}.$$

Обычно мы пользуемся этим обозначением в случае $F \leq H$, и тогда

$$\mathrm{Tran}_G(F, H) = \{g \in G \mid [g, F] \leq H\}.$$

Для подмножества $X \subseteq G$ через $\langle X \rangle \leq G$ обозначается порожденная им подгруппа. В случае $\langle X \rangle = G$ говорят, что X порождает G. Если, кроме того, $H \leq G$, то через $\langle X \rangle^H$ обозначается наименьшая подгруппа, содержащая X и нормализуемая H. Таким образом, $\langle X \rangle^G$ обозначает *нормальную* подгруппу в G, порожденную X.

Очень часто нам нужно доказать, что какое-то *подмножество* $Y \subseteq G$ совпадает со всей группой G. Обычно самый простой способ сделать это состоит в следующем.

Лемма 2. *Предположим, что $Y \subseteq G$, $Y \neq \varnothing$, а $X \subseteq G$ – симметрическое порождающее множество. Если $XY \subseteq Y$, то $Y = G$.*

Моноид всех эндоморфизмов группы G обозначается через $\mathrm{End}(G)$, а группа всех автоморфизмов G обозначается через $\mathrm{Aut}(G)$. Подгруппа $H \leq G$ называется *характеристической*, если $\phi(H) \leq H$ для всех

$\phi \in \mathrm{Aut}(G)$ и *вполне характеристической*, если $\phi(H) \leq H$ для всех $\phi \in \mathrm{End}(G)$. Ясно, что каждая вполне характеристическая подгруппа является характеристической, а каждая характеристическая подгруппа нормальна.

Пусть $F, H < G$ – две собственные подгруппы в G. В случае, когда $G = FH$, иными словами, когда каждый элемент $g \in G$ можно записать в виде $g = fh$ для некоторых $f \in F$, $h \in H$, говорят, что F и H определяют нетривиальную *факторизацию* группы G. Представление элемента g в виде $g = fh$ часто называется также *факторизацией* или *разложением* этого элемента. В дальнейшем нам будут часто встречаться факторизации с большим числом множителей, в особенности тройные, $G = EFH$.

Заметим, что при этом ни одна из подгрупп F и H не обязана, вообще говоря, быть нормальной в G, а их пересечение $F \cap H$ не обязано равняться 1. Если подгруппы F и H перестановочны, – например, если хотя бы одна из них нормальна, – то $G = FH = HF$, так что каждый элемент $g \in G$ можно представить в виде $g = h'f'$ для некоторых $f' \in F$, $h' \in H$. С другой стороны, если $F \cap H = 1$, то представление g в виде $g = fh$ единственно.

Говорят, что G является *полупрямым произведением* нормальной подгруппы H и дополнительной подгруппы F, если

$$G = \langle F, H \rangle, \quad F \cap H = 1, \quad H \trianglelefteq G.$$

В этом случае пишут $G = F \leftthreetimes H$ или $G = H \rightthreetimes F$. Для полупрямого произведения левая и правая факторизации каждого элемента $g \in G$ единственны и связаны между собой формулой $g = hf = f(f^{-1}hf)$, где $f^{-1}hf \in H$, так что множитель $f \in F$ из дополнительной подгруппы в них одинаковый. Если, кроме того, $F \trianglelefteq G$, произведение называется *прямым* и обозначается через $G = F \times H$.

Пусть X – какая-то система образующих группы G. Говоря, что W является множеством соотношений между образующими из X, мы не имеем в виду ничего, кроме того, что эти соотношения *выполняются* в G. Чтобы подчеркнуть, что всякое соотношение между элементами X следует из соотношений W, мы говорим, что W является системой *определяющих* соотношений. В этом случае группа G изоморфна группе $\langle X \mid W \rangle$ абстрактно заданной множеством образующих X и множеством соотношений W.

§6. Основные обозначения: кольца

Пусть R – ассоциативное, но, вообще говоря, не обязательно коммутативное, кольцо с 1. Обозначим через $\mathrm{Cent}(R)$ центр кольца R, состоящий из тех элементов кольца R, которые коммутируют со всеми его элементами. Кольцо $A = \mathrm{Cent}(R)$ коммутативно, а R является A-алгеброй.

По умолчанию идеалами I кольца R называются только *двусторонние* идеалы, в противном случае мы всегда явно говорим о *левых* или *правых* идеалах. Чтобы указать, что I является идеалом в R, мы пишем $I \trianglelefteq R$. Каждому идеалу $I \trianglelefteq R$ отвечает каноническая проекция на фактор-кольцо $\rho_I : R \to R/I$, отображающая элемент $\lambda \in R$ в его класс $\bar{\lambda} = \lambda \mod I = \lambda + I$ по модулю I.

Элемент $x \in R$ называется *обратимым*, если найдется $y \in R$ такое, что $xy = 1 = yx$, такой y единственен и обозначается x^{-1}. Все обратимые элементы кольца R образуют группу R^*, которая называется мультипликативной группой кольца R. Многие матричные вычисления зависят от *рациональных тождеств* наподобие следующих.

Лемма 3. *Пусть $x, y \in R$ таковы, что $1+xy \in R^*$. Тогда $1+yx \in R^*$, причем*

$$(1+xy)^{-1} = 1 - x(1+yx)^{-1}y, \quad (1+yx)^{-1} = 1 - y(1+xy)^{-1}x.$$

В дальнейшем нам понадобятся односторонние версии обратимости. Элемент $x \in R$ называется *обратимым справа*, если существует $y \in R$ такое, что $xy = 1$ и *обратимым слева*, если существует $z \in R$ такое, что $zx = 1$. *Двусторонне обратимый* элемент x, для которого существует как левый обратный z, так и правый обратный y, обратим в обычном смысле, иными словами, в этом случае $y = z = x^{-1}$.

Элемент $x \in R$ называется *левым делителем нуля*, если существует $y \in R$, $y \neq 0$, такое, что $xy = 0$. Элемент $x \in R$, не являющийся левым делителем нуля, называется *регулярным слева*. Множество всех $y \in R$ таких, что $xy = 0$ называется *правым аннулятором* x,

$$x^{\perp} = \{y \in R \mid xy = 0\},$$

элемент x в том и только том случае регулярен слева, когда $x^{\perp} = 0$. Правые делители нуля, регулярные справа элементы и *левые аннуляторы*

$$^{\perp}x = \{y \in R \mid yx = 0\},$$

определяются двойственным образом. Элемент x называется *регулярным*, если он регулярен слева и справа, $x^{\perp} = {}^{\perp}x = 0$.

Элемент $x \in R$ называется *идемпотентом*, если $x^2 = x$. Элемент $x \in R$ называется *нильпотентным*, если существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $x^n = 0$. Элемент $x \in R$ называется *унипотентным*, если $x - 1$ нильпотентен. В случае, когда $R = M(n, K)$ есть матричное кольцо над полем, нильпотентные элементы – это в точности матрицы, все собственные числа которых равны 0, а унипотентные элементы – это в точности матрицы, все собственные числа которых равны 1. *Множество* всех нильпотентных элементов кольца R обозначается через $\mathrm{Nil}(R)$. В случае, когда кольцо R коммутативно, множество $\mathrm{Nil}(R)$ является идеалом в R, который называется *нильрадикалом* R. Кольцо R, для которого $\mathrm{Nil}(R) = 0$, называется *приведенным*.

Радикал Джекобсона $\mathrm{Rad}(R)$ кольца R определяется следующим образом:

$$\mathrm{Rad}(R) = \{x \in R \mid \forall y \in R,\ 1 + yx \in R^*\}.$$

Из предыдущей леммы вытекает, что

$$\mathrm{Rad}(R) = \{x \in R \mid \forall z \in R,\ 1 + xz \in R^*\}$$

и, таким образом,

$$\mathrm{Rad}(R) = \{x \in R \mid \forall y, z \in R,\ 1 + yxz \in R^*\}.$$

Иными словами, $\mathrm{Rad}(R)$ – это наибольший идеал $J \trianglelefteq R$ такой, что $1 + x \in R^*$ для всех $x \in J$. Легко проверить, что $\mathrm{Rad}(R)$ совпадает с пересечением всех максимальных *левых* идеалов кольца R и с пересечением всех максимальных *правых* идеалов кольца R. Кольцо R, для которого $\mathrm{Rad}(R) = 0$, называется *полупростым*.

Кольцо R называется *полулокальным*, если его фактор-кольцо $R/\mathrm{Rad}(R)$ по радикалу Джекобсона $\mathrm{Rad}(R)$ *классически* полупросто. Иными словами, для полулокального кольца

$$R/\mathrm{Rad}(R) \cong M(n_1, T_1) \oplus \ldots \oplus M(n_s, T_s),$$

где $T_1, \ldots, T_s$ – некоторые тела. Большинство задач о линейных группах над полулокальными кольцами *сразу* сводится к случаю тел.

В частности, для коммутативного кольца R радикал Джекобсона $\mathrm{Rad}(R)$ совпадает с пересечением максимальных идеалов кольца R. Таким образом, R полулокально в том и только том случае, когда $R/\mathrm{Rad}(R) \cong K_1 \oplus \ldots \oplus K_s$ является прямой суммой конечного числа полей. По Китайской теореме об остатках, это эквивалентно тому, что у R имеется конечное число максимальных идеалов. Локализация позволяет свести многие – но далеко не все! – вопросы для произвольных коммутативных колец к соответствующим вопросам для полулокальных колец.

Кольцо R называется *локальным*, если все необратимые элементы кольца R образуют идеал M, или, что то же самое, если $R^* = R \setminus M$. В этом случае $M = \mathrm{Rad}(R)$ является единственным максимальным левым и правым идеалом и R/M изоморфно телу T. В коммутативном случае это совпадает с обычным определением: кольцо R имеет единственный максимальный идеал M. С другой стороны, в некоммутативном случае полулокальное кольцо R с единственным максимальным идеалом M не обязано быть локальным, оно является лишь *матрично локальным*, т.е. $R/M \cong M(n,T)$ для некоторого тела T и некоторого n.

§7. Основные обозначения: матрицы

Для двух натуральных чисел m,n через $M(m,n,R)$ обозначается аддитивная группа $m \times n$-матриц с коэффициентами из R. Как обычно, через e_{ij} обозначается *стандартная матричная единица*, т. е. матрица, у которой в позиции (i,j) стоит 1 и нули во всех остальных позициях. Для матрицы $x \in M(m,n,R)$ через x_{ij} обозначается ее матричный элемент в позиции (i,j), так что

$$x = (x_{ij}) = \sum x_{ij} e_{ij}, \quad 1 \leq i \leq m, \ 1 \leq j \leq n.$$

Через x_{*j} обозначается j-й столбец матрицы x, равный (x_{ij}), $1 \leq i \leq m$. Точно так же, через x_{i*} обозначается ее i-я строка (x_{ij}), $1 \leq j \leq n$.

Матричное умножение превращает аддитивную группу $M(n,R) = M(n,n,R)$ квадратных матриц **степени** n в ассоциативное кольцо, называемое полным матричным кольцом степени n над R. В случае, когда термин **степень** имеет альтернативное значение, об элементах $M(n,R)$ говорят как о матрицах **порядка** или **размера** n. Многие вычисления основаны на том, что в терминах стандартных матричных единиц умножение матриц определяется следующим образом

$$e_{ij} e_{hk} = \delta_{jh} e_{ik}, \quad 1 \leq i \leq l, \quad 1 \leq j,h \leq m, \quad 1 \leq k \leq n.$$

Как обычно, через $e = e_{11} + \ldots + e_{nn}$ обозначается единичная матрица степени n. Степень единичной матрицы обычно не фигурирует в обозначениях и определяется из контекста.

Кольцо $M(n,R)$ естественно истолковывается как кольцо линейных операторов свободного R-модуля ранга n.

• Пусть R^n – свободный *правый* R-модуль, состоящий из всех столбцов u высоты n с компонентами из R. Тогда $M(n,R)$ можно отождествить с кольцом эндоморфизмов R^n. А именно, $M(n,R)$ действует на R^n *слева*:

$$M(n,R)\times R^n\to R^n,\quad (x,u)\mapsto xu.$$

• Следуя Полю Кону, обозначим свободный *левый* R-модуль, состоящий из строк длины n с компонентами из R через ${}^nR$. Тогда $M(n,R)$ действует на ${}^nR$ *справа*:

$${}^nR\times M(n,R)\to {}^nR,\quad (v,x)\mapsto vx.$$

Естественное спаривание ${}^nR\times R^n\to R$ задается умножением, $u,v\mapsto vu$ для $u\in R^n$ и $v\in {}^nR$. Стандартные базисы R^n и ${}^nR$ обозначаются через

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad \dots,\quad e_n=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix},$$

и через

$$f_1=(1,0,\dots,0),\quad f_2=(0,1,\dots,0),\quad \dots,\quad f_n=(0,0,\dots,1),$$

соответственно. Иными словами, e_i является i-м столбцом единичной матрицы e степени n, в то время как f_i является i-й строкой e. Ясно, что для столбца $u\in R^n$ имеет место равенство $u_i=f_iu$ и точно так же $v_i=ve_i$ для строки $v\in {}^nR$. Вообще, для матрицы $x=(x_{ij})\in M(m,n,R)$ имеют место равенства $x_{*j}=xe_j$, $x_{i*}=f_ix$ и $x_{ij}=f_ixe_j$.

Для матрицы $x\in M(m,n,R)$ через $x^T\in M(n,m,R)$ обозначается ее *формальная* транспонированная, т. е. матрица, определенная равенствами $(x^T)_{ji}=x_{ij}$. Обратите внимание, что эта операция не обладает хорошими алгебраическими свойствами. Для того, чтобы транспонирование стало антигомоморфизмом, формальное транспонирование необходимо скомпоновать с кольцевым антигомоморфизмом.

Пусть R^o – кольцо *противоположное* к R, а $\alpha\mapsto\alpha^o$ – канонический анти-изоморфизм $R\to R^o$. Напомним, что $R^o=R$ как аддитивная группа, в то время как умножение в R^o *противоположно* к умножению R: $\alpha^o\beta^o=(\beta\alpha)^o$. Настоящая *транспонированная* матрица x^t к матрице $x\in M(m,n,R)$ живет вовсе не в $M(n,m,R)$, а в $M(n,m,R^o)$.

При этом $(x^t)_{ji} = x^o_{ij}$. Транспонирование обладает всеми обычными алгебраическими свойствами, в частности,

$$(x+y)^t = x^t + y^t, \quad \left(x^t\right)^t = x, \quad (\alpha x)^t = x^t\alpha^o, \quad (x\alpha)^t = \alpha^o x^t.$$

Кроме того, для любых $x \in M(l,m,R)$ и $y \in M(m,n,R)$ имеет место равенство $(xy)^t = y^t x^t$. В частности, при $m = n$ транспонирование отображает $M(n,R)$ на $M(n,R^o)$ и, таким образом, мы получаем следующий результат.

Лемма 4. *Транспонирование определяет анти-изоморфизм кольца $M(n,R)$ на $M(n,R^o)$.*

Тем самым, в частности, $M(n,R)^o = M(n,R^o)$. Для коммутативного кольца R имеет место равенство $R^o = R$, так что транспонирование совпадает с формальным транспонированием и отображает $M(m,n,R)$ на $M(n,m,R)$. В частности, $x \mapsto x^t$ является *анти-автоморфизмом* кольца $M(n,R)$. Иными словами, для основного кольца R полное матричное кольцо $M(n,R)$ изоморфно своему противоположному кольцу.

Глава 3. Линейные группы

Сейчас мы совсем коротко напомним определения полной линейной группы и некоторых связанных с ней групп.

§8. Полная линейная группа

Мультипликативная группа $M(n,R)^*$ полного матричного кольца $M(n,R)$ обозначается через $G = \mathrm{GL}(n,R)$ и называется **полной линейной группой** степени n над R. Таким образом, по определению

$$\mathrm{GL}(n,R) = \{x \in M(n,R) \mid \exists y \in M(n,R),\ xy = e = yx\}.$$

Мы обозначаем матрицу, обратную к матрице $g = (g_{ij}) \in G$, через $g^{-1} = (g'_{ij})$. Столбцы и строки обратной матрицы обозначаются через g'_{*j} и g'_{i*}, соответственно.

Как известно, для коммутативного основного кольца R можно построить мультипликативный гомоморфизм

$$\det : M(n,R) \to R, \quad \det(xy) = \det(x)\det(y).$$

Теорема Крамера состоит в том, что матрица x над коммутативным кольцом R в том и только том случае обратима, когда ее определитель

$\det(x)$ обратим в R. Таким образом, в случае коммутативного кольца R полную линейную группу можно определить следующим образом:

$$\mathrm{GL}(n,R)=\{x\in M(n,R)\mid \det(x)\in R^*\}.$$

В частности, над коммутативным кольцом односторонняя обратимость матриц совпадает с двусторонней обратимостью.

Более общо, теорема Кэли–Гамильтона утверждает, что в случае, когда кольцо R *почти коммутативно* – иными словами, конечно порождено как модуль над своим центром – матрица x^{-1} является *многочленом* от x. Таким образом, и в этом случае полную линейную группу можно определить как

$$\mathrm{GL}(n,R)=\{x\in M(n,R)\mid \exists y\in M(n,R),\ xy=e\}.$$

или как

$$\mathrm{GL}(n,R)=\{x\in M(n,R)\mid \exists y\in M(n,R),\ yx=e\}.$$

В следующей главе мы приведем примеры, показывающие, что в общем случае это совершенно неверно и нужно проверять именно двустороннюю обратимость.

Вообще, пусть V – любой R-модуль. Группа $\mathrm{GL}(V)=\mathrm{End}(V)^*$ обратимых линейных операторов на V называется полной линейной группой модуля V. С этой точки зрения группа $\mathrm{GL}(n,R)$ становится изоморфной группе автоморфизмов свободного модуля ранга n, после того, как мы выберем в этом модуле базис.

А именно, $\mathrm{GL}(n,R)$ можно отождествить с группой $\mathrm{GL}(R^n)$ автоморфизмов свободного *правого* R-модуля R^n. А именно, $g\in\mathrm{GL}(n,R)$ действует на R^n умножением *слева*: $u\mapsto gu$. При этом обратимость g гарантирует, что умножение на g является автоморфизмом, а не просто эндоморфизмом модуля R^n.

Точно так же группа $\mathrm{GL}(n,R)$ действует *справа* на свободном *левом* R-модуле ${}^nR$ как группа автоморфизмов $\mathrm{GL}({}^nR)$ посредством $v\mapsto vg$ для $g\in\mathrm{GL}(n,R)$ и $v\in{}^nR$.

В дальнейшем мы детально изучим вопрос об изоморфизмах между группами $\mathrm{GL}(n,R)$. Пока отметим несколько *очевидных* изоморфизмов, которые будут постоянно использоваться в дальнейшем без каких-либо специальных сслыок.

Лемма 5. *Имеет место канонический изоморфизм*

$$\mathrm{GL}(m,M(n,R))=\mathrm{GL}(mn,R).$$

Доказательство. В самом деле, $M(m, M(n, R)) = M(mn, R)$ – разбиение матрицы на блоки. $\square$

Лемма 6. *Имеет место канонический изоморфизм*

$$\mathrm{GL}(n, R \oplus S) = \mathrm{GL}(n, R) \times \mathrm{GL}(n, S).$$

Доказательство. В самом деле, $M(n, R \oplus S) = M(n, R) \oplus M(n, S)$ и $(R \oplus S)^* = R^* \times S^*$. $\square$

Лемма 7. *Имеет место канонический изоморфизм*

$$\mathrm{GL}(n, R) = \mathrm{GL}(n, R^o).$$

Доказательство. Такой изоморфизм задается *контраградиентом*

$$\mathrm{GL}(n, R) \to \mathrm{GL}(n, R^o), \quad g \mapsto g^{-t} = (g^t)^{-1}.$$

Матрица $g^{-t} \in \mathrm{GL}(n, R^o)$ называется матрицей *контраградиентной* к матрице $g \in \mathrm{GL}(n, R)$. $\square$

§9. Функториальность GL_n

Ясно, что $R \rightsquigarrow \mathrm{GL}(n, R)$ является функтором из колец в группы. Иными словами, *кольцевой* гомоморфизм $\phi : R \to S$ индуцирует *групповой* гомоморфизм

$$\mathrm{GL}(n, \phi) : \mathrm{GL}(n, R) \to \mathrm{GL}(n, S), \quad (g_{ij}) \mapsto (\phi(g_{ij})),$$

Чтобы подчеркнуть, что гомоморфизм $\mathrm{GL}(n, \phi)$ приходит из гомоморфизма колец, такие гомоморфизмы часто называются кольцевыми. Более того, при этом вместо $\mathrm{GL}(n, \phi)$ чаще всего пишут просто ϕ. Функтор

$$R \rightsquigarrow \mathrm{GL}(n, R), \qquad \phi \rightsquigarrow \mathrm{GL}(n, \phi),$$

обычно обозначается через GL_n.

Особенно часто в дальнейшем возникает следующий частный случай. Пусть I – идеал кольца R. Рассмотрим каноническую проекцию $\rho_I : R \to R/I$, посылающую элемент $\lambda \in R$ в элемент $\bar{\lambda} = \lambda \mod I = \lambda + I$. Эта проекция определяет **гомоморфизм редукции**

$$\rho_I : \mathrm{GL}(n, R) \to \mathrm{GL}(n, R/I),$$

такой, что образ матрицы $x = (x_{ij})$ равен $\bar{x} = (\bar{x}_{ij})$. Этот гомоморфизм известен как *редукция по модулю* I.

Стоит сразу предостеречь, что гомоморфизм редукции ρ_I совершенно не обязан быть сюръективным. Дело в том, что вообще говоря, несюръективен уже гомоморфизм $\rho_I : R^* \to (R/I)^*$. Пусть, например, $R = \mathbb{Z}$ и $I = p\mathbb{Z}$, где p – любое простое ≥ 5. Тогда $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ содержит $p-1 > 2$ элементов, в то время как $\mathbb{Z}^* = \{\pm 1\}$. Это значит, что гомоморфизм редукции $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}) \to \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ заведомо несюръективен, так как его образ состоит из матриц с определителем ± 1, в то время как в $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ есть матрицы с любым ненулевым определителем.

Однако имеется чрезвычайно важный случай – редукция по модулю *подрадикальных* идеалов – когда гомоморфизм редукции сюръективен. Для доказательства нам понадобится следующий хорошо известный – и очевидный – результат.

Лемма 8. *Имеет место равенство* $\mathrm{Rad}(M(n,R)) = M(n, \mathrm{Rad}(R))$.

Лемма 9. *В случае* $J \subseteq \mathrm{Rad}(R)$ *гомоморфизм редукции*

$$\rho_J : \mathrm{GL}(n,R) \to \mathrm{GL}(n, R/J)$$

сюръективен для всех $n \geq 1$.

Доказательство. Если класс элемента $u \in R$ попадает в $(R/J)^* = \mathrm{GL}(1,R)$, то $uv \equiv vu \equiv 1 \pmod J$ для некоторого $v \in R$. Тогда $uv, vu \in 1 + J \subseteq R^*$ и, таким образом, $u \in R^*$. Это означает, что гомоморфизм $R^* \to (R/J)^*$ сюръективен. Остается лишь применить это наблюдение к отображению

$$M(n,R) \longrightarrow M(n, R/J) = M(n,R)/M(n,J)$$

и вспомнить, что по предыдущей лемме $M(n,J) \leq \mathrm{Rad}(M(n,R))$. □

На категории *коммутативных* колец описанный выше функтор GL_n является аффинной групповой схемой над $\mathbb{Z}$. Аффинной алгеброй $\mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n]$ этой схемы является фактор-алгебра кольца многочленов $\mathbb{Z}[t, g_{ij} \mid 1 \leq i,j \leq n]$ от n^2+1 переменной по главному идеалу, порожденному элементом $t \det g - 1$, где g – это матрица с элементами g_{ij}. Это означает, что любой элемент h группы $\mathrm{GL}(n,R)$ однозначно соответствует кольцевому гомоморфизму $\phi_h : \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n] \to R$, посылающему g_{ij} в соответствующий элемент h_{ij} матрицы h, а элемент t в $(\det h)^{-1}$.

Матрица $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n])$ соответствует тождественному гомоморфизму $\phi_g : \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n] \to \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n]$ и называется *общим элементом* (generic element) групповой схемы GL_n. Аффинная алгебра аффинной групповой схемы и ее общий элемент удовлетворяют следующему универсальному свойству: для любого коммутативного кольца R и любого элемента $h \in \mathrm{GL}(n,R)$ существует единственный гомоморфизм

$\phi : \mathbb{Z}[\mathrm{GL}_n] \to R$ такой, что групповой гомоморфизм $\mathrm{GL}(n, \phi)$ отображает g в h. Легко видеть, что $\phi = \phi_h$.

§10. Проективная линейная группа

Пусть $A = \mathrm{Cent}(R)$ – центр кольца R. Матрица вида λe, $\lambda \in A^*$, называется **скалярной**. Следующий результат хорошо известен и легко проверяется. В действительности он сразу вытекает из гораздо более точных результатов, которые мы докажем во второй части.

Лемма 10. *Центр $C(n, R)$ полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, R)$ совпадает с множеством всех скалярных преобразований λe, $\lambda \in A^*$.*

Класс матрицы $g \in \mathrm{GL}(n, R)$ в фактор-группе $\mathrm{GL}(n, R)/C(n, R)$ полной линейной группы $\mathrm{GL}(n, R)$ по центру обычно обозначается через $[g]$. При этом в случае, когда в обозначении g использованы круглые скобки, в обозначении для $[g]$ они опускаются, так что вместо $[(g_{ij})]$ пишут просто $[g_{ij}]$. По определению,

$$[hg] = [h][g], \qquad [g^{-1}] = [g]^{-1}, \qquad [\lambda g] = [g],$$

для любого $\lambda \in A^*$.

В случае, когда $R = K$ – *поле*, фактор-группа $\mathrm{GL}(n, K)/C(n, K)$ обозначается $\mathrm{PGL}(n, K)$ и называется **проективной линейной группой** степени n над K. Некоторые наивные писатели, не знакомые с первыми группами когомологий, беззастенчиво называют $\mathrm{GL}(n, R)/C(n, R)$ проективной линейной группой и в случае колец, но это безнадежно неверно!

В действительности, даже для коммутативных колец проективная линейная группа $\mathrm{PGL}(n, R)$, которую естественно понимать, как группу автоморфизмов проективного пространства, почти всегда строго больше, чем просто фактор-группа $\mathrm{GL}(n, R)$ по центру! Дело в том, что эпиморфизмы алгебраических групп как правило не сюръективны на точках. Над коммутативным кольцом каждый элемент группы $\mathrm{PGL}(n, R)$ можно представить как $[g]$ для некоторой матрицы g степени n, но при этом, вообще говоря, $g \in \mathrm{GL}(n, S)$ для некоторого расширения S кольца R.

Предложение 1. *Для коммутативного локального кольца R имеет место равенство*

$$\mathrm{PGL}(n, R) = \mathrm{GL}(n, R)/C(n, R).$$

Доказательство. Точная последовательность аффинных групповых схем

$$1 \longrightarrow \mathrm{GL}_1 \longrightarrow \mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{PGL}_n \longrightarrow 1$$

дает точную последовательность когомологий Галуа, которая начинается следующим образом:

$$1 \longrightarrow R^* \longrightarrow \mathrm{GL}(n,R) \longrightarrow \mathrm{PGL}(n,R) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{GL}_1) \longrightarrow H^1(R,\mathrm{GL}_n).$$

Хорошо известно, что $H^1(R,\mathrm{GL}_1) = \mathrm{Pic}(R)$ представляет собой группу Пикара кольца R. Для локального кольца R группа Пикара тривиальна и, таким образом, в этом случае гомоморфизм $\mathrm{GL}(n,R) \to \mathrm{PGL}(n,R)$ сюръективен, как и утверждалось. □

§11. Специальная линейная группа

Для коммутативного кольца R можно определить **специальную линейную группу** степени n над R, состоящую из матриц с определителем 1,

$$\mathrm{SL}(n,R) = \{x \in M(n,R) \mid \det(x) = 1\}.$$

Очевидно, что $\mathrm{SL}(n,R)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n,R)$, причем фактор-группа

$$\mathrm{GL}(n,R)/\mathrm{SL}(n,R) \cong R^*$$

абелева. Таким образом,

$$[\mathrm{GL}(n,R),\mathrm{GL}(n,R)] \leq \mathrm{SL}(n,R).$$

Еще одна часто используемая подгруппа, заданная в терминах определителя, это

$$\mathrm{SL}^{\pm}(n,R) = \{x \in M(n,R) \mid \det(x) = \pm 1\}.$$

Следующее утверждение вытекает из более точного утверждения, которое мы докажем в дальнейшем.

Лемма 11. *Центр специальной линейной группы* $\mathrm{SL}(n,R)$ *равен*

$$C(n,R) \cap \mathrm{SL}(n,R).$$

Напомним, что через $\mu_n(R)$ обозначается группа корней n-й степени из 1 в кольце R. Лемма утверждает, что $\mathrm{Cent}\big(\mathrm{SL}(n,R)\big)$ совпадает с множеством всех скалярных преобразований вида εe, где $\varepsilon \in \mu_n(R)$.

Фактор-группа

$$\mathrm{PSL}(n,R) = \mathrm{SL}(n,R)/\mathrm{Cent}(\mathrm{SL}(n,R))$$

называется проективной специальной линейной группой. Заметим, что в отличие от групп $\mathrm{GL}(n,R)$, $\mathrm{SL}(n,R)$ и $\mathrm{PGL}(n,R)$, группа $\mathrm{PSL}(n,R)$ не является алгебраической группой.

Для примарного $q=p^m$ существует поле $K=\mathbb{F}_q$ из q элементов. В дальнейшем мы используем обычные сокращения $\mathrm{GL}(n,K)=\mathrm{GL}(n,q)$, $\mathrm{C}(n,K)=\mathrm{C}(n,q)$, $\mathrm{PGL}(n,K)=\mathrm{PGL}(n,q)$, $\mathrm{SL}(n,K)=\mathrm{SL}(n,q)$, и т.д.

Лемма 12. *Имеют место следующие исключительные изоморфизмы*

$$\mathrm{PSL}(2,2)\cong S_3,\qquad \mathrm{PSL}(2,3)\cong A_4,\qquad \mathrm{PSL}(2,4)\cong \mathrm{PSL}(2,5)\cong A_5,$$
$$\mathrm{PSL}(2,7)\cong \mathrm{PSL}(3,2),\qquad \mathrm{PSL}(2,9)\cong A_6,\qquad \mathrm{PSL}(4,2)\cong A_8.$$

В частности, отсюда вытекает, что группы $\mathrm{SL}(2,2)$ и $\mathrm{SL}(2,3)$ не являются совершенными.

Глава 4. Односторонние обратные

Необходимо работать с исключительной кропотливостью.
Нужна исключительная кропотливость, небрежность
недопустима, она зачастую ведет к ошибкам.

Новейшие указания председателя Мао Цзе-дуна

В этой главе мы введем несколько важных условий на кольцо, которые естественно возникают при изучении линейных групп. Роль этих условий конечности в теории линейных групп обсуждается в работах Зенона Боревича и первого автора [9, 10]. Изучение линейных групп над кольцами, не удовлетворяющими этим условиям, требует особой осторожности, так как при этом необходимо отказаться от *всех* навыков, выработанных при изучении обычной (конечномерной) линейной алгебры.

§12. Слабая конечность

Даже жареного цыпленка следует привязывать.

Хагакуре

Первая группа условий гарантирует, что односторонняя обратимость влечет двустороннюю обратимость.

• Кольцо R называется **конечным по Дедекинду** или **слабо 1-конечным**, если в нем односторонняя обратимость влечет двустороннюю обратимость.

Иными словами, в слабо 1-конечном кольце для любых двух элементов $x, y \in R$ равенство $xy = 1$ влечет равенство $yx = 1$.

• Кольцо R называется **слабо n-конечным**, если полное матричное кольцо $\mathrm{M}(n, R)$ степени n над R слабо 1-конечно.

Ясно, что если кольцо R слабо n-конечно для некоторого натурального n, то оно также слабо m-конечно для всех $m < n$. Это условие допускает естественную переформулировку на языке модулей. А именно, кольцо R в том и только том случае слабо n-конечно, когда модуль R^n не изоморфен никакому своему собственному прямому слагаемому.

• Кольцо R называется **слабо конечным**, если оно слабо n-конечно для всех натуральных n, т.е. если любая односторонне обратимая матрица конечной степени над R двусторонне обратима.

Несложно убедиться в том, что из слабой конечности кольца R, вообще говоря, не вытекает слабая конечность его фактор-колец.

• Кольцо R называется **вполне слабо конечным**, если все его фактор-кольца R/I слабо конечны.

Вся интуиция большинства математиков, за исключением специалистов по некоммутативным кольцам и функциональному анализу, относится к слабо конечным кольцам. Это обстоятельство является неисчерпаемым источником прямых ошибок.

Например, что такое группа верхних треугольных матриц? Наивный ответ состоит в том, что эта группа состоит из всех *обратимых* верхних треугольных матриц. Однако, ЭТОТ ОТВЕТ БЕЗНАДЕЖНО НЕВЕРЕН, так как обратимые верхние треугольные матрицы группы не образуют. В самом деле, пусть $x, y \in R$ таковы, что $xy = 1$, но $yx \neq 1$. Тогда верхняя треугольная матрица

$$b = \begin{pmatrix} y & e \\ 0 & -x \end{pmatrix}$$

двусторонне обратима. Но обратная к ней

$$b^{-1} = \begin{pmatrix} x & e \\ e - yx & -y \end{pmatrix}$$

не является верхней треугольной. Таким образом, группу $B = \mathrm{B}(n, R)$ верхних треугольных матриц следует определять как группу таких обратимых матриц b, что как b, так и b^{-1} *обе* верхние треугольные. То же относится, вообще говоря, ко многим другим обычным подгруппам $\mathrm{GL}(n, R)$.

Еще одно удивительное следствие этого примера состоит в том, что диагональные коэффициенты обратимой треугольной матрицы сами не обязаны быть обратимыми! Это показывает, что при переносе привычных результатов линейной алгебры в некоммутативную ситуацию требуется *крайняя* осторожность – ДАЖЕ ЖАРЕНОГО ЦЫПЛЕНКА СЛЕДУЕТ ПРИВЯЗЫВАТЬ.

§13. Примеры слабо конечных колец

Перечислим несколько очевидных примеров слабо конечных колец.

• Теорема Крамера утверждает, что матрица x над коммутативным кольцом R в том и только том случае односторонне обратима, когда ее определитель $\det(x)$ обратим в R. Так как все фактор-кольца коммутативного кольца снова коммутативны, то коммутативные кольца *вполне* слабо конечны.

• Кольцо R называется **почти коммутативным**, если оно конечно порождено как модуль над своим центром. Теорема Гамильтона–Кэли как раз и состоит в том, что над почти коммутативным кольцом обратная матрица x^{-1} является *многочленом* от x.

• Слабая конечность тел вытекает из того, что над телом каждая односторонне обратимая матрица есть произведение элементарных преобразований.

• Полное матричное кольцо $M(n, R)$ над слабо конечным кольцом R слабо конечно.

• Прямые суммы слабо конечных колец слабо конечны.

• Кольцо R в том и только том случае слабо конечно, когда его фактор-кольцо R/J по модулю радикала Джекобсона $J = \mathrm{Rad}(R)$ слабо конечно.

Комбинируя четыре предыдущих наблюдения, мы получаем следующее утверждение.

• Полулокальное кольцо слабо конечно.

Впрочем, это сразу следует также из следующего более общего результата. Мы обсудим понятие стабильного ранга в следующей части этой работы. Пока напомним, что кольцо R имеет **стабильный ранг 1**, если для любых $x, y \in R$, которые порождают R как *правый* идеал, найдется $z \in R$ такое, что $x + yz$ обратим *справа*. Полулокальные кольца как раз и являются простейшим и типичнейшим примером колец стабильного ранга 1. Приводимое ниже доказательство взято из [348].

Теорема Капланского–Ленстры. *Кольцо стабильного ранга* 1 *вполне слабо конечно.*

Доказательство. Так как кольца матриц над кольцом стабильного ранга 1 (это вытекает из результата Леонида Васерштейна [36] и будет доказано в следующей части настоящего обзора) и все его фактор-кольца также имеют стабильный ранг 1, то достаточно доказать слабую 1-конечность. Пусть $x, y \in R$ таковы, что $xy = 1$. Тогда y, $1 - yx$ порождают R как правый идеал. По определению стабильного ранга найдется $z \in R$ такое, что $y + (1 - yx)z$ обратим справа. Иными словами, существует $u \in R$ такое, что $(y + (1 - yx)z)u = 1$. Но тогда $u = x(y + (1 - yx)z)u = x$, и, значит, x обратим слева, так что $yx = 1$. □

Вот еще два огромных класса примеров.

• Кольца без делителей нуля слабо 1-конечны.

В действительности, слабо 1-конечно любое кольцо, в котором каждый регулярный слева элемент регулярен. В самом деле, если $xy = 1$, то $xf = fy = 0$ для $f = 1 - yx$. Так как $y^{\perp} = 0$, то ${}^{\perp}y = 0$ и, значит $f = 0$.

• Нетеровы и, тем более, артиновы кольца слабо конечны.

В действительности, кольцо R слабо n-конечно, если оно удовлетворяет условию максимальности или условию минимальности для n-порожденных правых идеалов.

В книге Фейта [120] отмечается, что для слабой 1-конечности достаточно, чтобы кольцо, удовлетворяло какому-нибудь, *сколь угодно слабому*, условию максимальности или минимальности. В качестве примеров там фигурируют

• условия максимальности или минимальности для правых аннуляторов,

• условие максимальности или минимальности для главных правых идеалов, порожденных идемпотентами,

• условие максимальности для прямых сумм,

• условие минимальности для прямых слагаемых, etc.

§14. Примеры колец, не являющихся слабо конечными

Приведем теперь примеры колец, которые не являются слабо конечными. Как и следует ожидать из названия, все такие кольца оказываются сугубо бесконечномерными.

• Вот универсальный пример. Пусть K – поле, $K\langle x,y\rangle$ – свободная алгебра с двумя образующими над полем K. Иными словами, $K\langle x,y\rangle$ – полугрупповая алгебра свободной полугруппы с образующими x и y. В самом кольце $K\langle x,y\rangle$ очень мало обратимых элементов и поэтому оно слабо конечно. Но $R=K\langle x,y\rangle/(xy-1)$ не является слабо конечным. В самом деле, обозначим через $\bar{x}$ и $\bar{y}$ образы x и y в R. Тогда $\bar{x}\,\bar{y}=1$, но $\bar{y}\,\bar{x}\neq 1$.

• Кольца операторов в бесконечномерных пространствах обычно не являются слабо 1-конечными. Пусть, например, $\mathrm{GL}(V)$ – группа всех обратимых линейных операторов счетномерного векторного пространства над полем K. Эта группа естественно изоморфна группе $\mathrm{GL}(\mathbb{N},K)$ обратимых *столбцово конечных* матриц, строки и столбцы которой индексированы натуральными числами. Положим

$$x=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 & \\ & & & 0 & \ddots \\ & & & & \ddots \end{pmatrix},\qquad y=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ 1 & \ddots & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & 1 & 0 & \\ & & & \ddots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Тогда $xy=e$, но

$$yx=\begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & 1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}\neq e.$$

• В действительности, как заметил Джекобсон, второй пример также является вездесущим. А именно, если кольцо R не является слабо n-конечным, то существуют матрицы $x, y \in M(n, R)$ такие, что $xy = e$, но $yx \neq e$. Рассмотрим элементы

$$f_{ij} = y^i(e - yx)x^j, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Они образуют бесконечную систему матричных единиц в $\mathrm{M}(n, R)$. В самом деле, $f = e - yx$ является идемпотентом, причем $x^h f = f y^h = 0$ для всех $h \geq 1$. Таким образом,

$$f_{ij} f_{kl} = y^i f x^j y^k f x^l = \begin{cases} f_{il}, & \text{if} \quad j = k, \\ 0, & \text{if} \quad i \neq k. \end{cases}$$

Это значит, что $M(n, R)$ содержит подкольцо, изоморфное $M(\mathbb{N}, A)$, где $A = \mathrm{Cent}(R)$ – центр кольца R.

§15. Свойство IBN, тип кольца

The only thing we can be sure of, is that we can't be sure of *anything*.

Richard Feynman, The character of physical law

Существуют кольца, которые ведут себя по отношению к обращению матриц еще хуже, чем кольца, не являющиеся слабо конечными. А именно, говорят, что свободный модуль R^n имеет *единственный ранг*, если он не изоморфен никакому модулю R^m при $m \neq n$. Кольцо R называется **IBN-кольцом** или кольцом с **инвариантным базисным числом**, если *все* свободные модули над ним имеют единственный ранг. Кольца, не обладающие свойством IBN, называются **безразмерными** = `non-dimensional`.

Предположим, что $R^m \cong R^n$ для некоторых $m \neq n$. Тогда в некотором свободном R-модуле существуют два базиса X и Y, мощностей m и n, соответственно. Если $x \in \mathrm{M}(m, n, R)$ и $y \in \mathrm{M}(n, m, R)$ соответствующие матрицы перехода от базиса к базису, то $xy = e_m$ и $yx = e_n$. В частности, в этом случае $M(m, R) \cong M(n, R)$, $\mathrm{GL}(m, R) \cong \mathrm{GL}(n, R)$ и т.д.

Это означает, что кольцо R в том и только том случае безразмерно, когда над ним СУЩЕСТВУЮТ НЕКВАДРАТНЫЕ ДВУСТОРОННЕ ОБРАТИМЫЕ МАТРИЦЫ. Ясно, что в конечномерном мире это в высшей степени необычное свойство. В частности, все слабо конечные кольца – и, таким образом, все обычные классы колец, рассматриваемых в алгебре – удовлетворяют условию IBN.

В то же время, как мы увидим в следующем параграфе, почти все АЛГЕБРЫ ОПЕРАТОРОВ В БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ БЕЗРАЗМЕРНЫ, притом в самом сильном смысле. А именно, для них $R^2 \cong R$, так что над ними вообще все свободные модули конечного ранга изоморфны или, что то же самое, существуют двусторонне обратимые матрицы *любого* конечного размера $m \times n$.

Рассмотрим наименьшую относительно лексикографичексого порядка пару (k,l), для которой $R^k \cong R^l$. Тогда $(k,h) = (k, l-k)$ называется *типом* кольца R. Сделаем несколько очевидных замечаний, относящихся к типу кольца, см. [226, 181].

• Если R – кольцо типа (k,h), то

$$R^m \cong R^n, \quad m \neq n, \qquad \Leftrightarrow \qquad m,n \geq k, \quad m \equiv n \pmod h.$$

• Пусть R и S – кольца типов (k,h) и (l,m), соответственно. Тогда тип $R \times S$ равен $(\max(k,l), \mathrm{lcm}(h,m))$.

• Если тип кольца R равен (k,h), то тип матричного кольца $M(n,R)$ равен $(\lceil k/n \rceil, h/\gcd(h,n))$. В частности, для всех больших n, кратных h, тип матричного кольца $M(n,R)$ равен $(1,1)$.

• Тип кольца R совпадает с типом кольца $R/\operatorname{Rad}(R)$.

• Предположим, что существует гомоморфизм $\phi : R \to S$, причем типы колец R и S равны (k,h) и (l,m), соответственно. Тогда $l \leq k$ и $m|h$.

• Тип IBN-кольца равен $(\infty, 0)$. В частности, не существует вообще *никаких* гомоморфизмов из колец без условия IBN в кольца с условием IBN.

Поведение безразмерных колец в высшей степени необычно. Как мы уже упоминали, если $R^m \cong R^n$ для некоторых $m \neq n$, то $\mathrm{M}(m,R) \cong \mathrm{M}(n,R)$ и, в частности, $\mathrm{GL}(m,R) \cong \mathrm{GL}(n,R)$. В ранних 80-х годах многие авторы, включая нас самих, высказывали предположения, что существование таких нестандартных изоморфизмов должно давать контр-примеры к стандартному описанию нормальных подгрупп, автоморфизмов, etc. Но, насколько нам известно, ни одного полного доказательства с тех пор так и не появилось. Упоминаемый ниже контр-пример Герасимова [41] основан на совершенно другой идее.

Проблема 1. *Можно ли получить контрпримеры к стандартным ответам, рассматривая кольцо R, для которого* $\mathrm{GL}(n,R)\cong\mathrm{GL}(2,R)$ *для некоторого* $n\geq 3$?

В заключение, отметим связь условия IBN с конечностью стабильного ранга.

В работе второго автора [98] приведен пример, показывающий, что аналог теоремы Капланского–Ленстры не имеет места для колец конечного стабильного ранга. А именно, существуют кольца стабильного ранга 2, не являющиеся слабо конечными. В частности, в статье второго автора [99] доказан следующий результат.

Теорема 1. *Стабильный ранг кольца* $K\langle x,y\rangle/(xy-1)$ *равен* 2.

Тем не менее, конечность стабильного ранга является небанальным условием конечности. Следующий результат очевиден, но, насколько нам известно, впервые опубликован в работе Корача и Ларотонда [233], доказательство приведено также в статье Сасане [545]. Мы воспроизведем это доказательство в соответствующей части настоящего обзора.

Теорема 2. *Кольцо конечного стабильного ранга обладает свойством* IBN.

§16. Примеры безразмерных колец

Мы все еще не знаем, существуют ли безразмерные кольца. Построим, прежде всего, кольца типа $(1,1)$. Над таким кольцом $R^2\cong R$ и, таким образом, $R^m\cong R^n$ для всех $m,n\in\mathbb{N}$, так что над таким R существуют прямоугольные двусторонне обратимые матрицы всех возможных размеров.

Используя матричную интерпретацию изоморфизма $R^2\cong R$, мы видим, что достаточно построить кольцо R и элементы x,y,u,v в нем такие, что

$$(x,y)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=xu+yv=1,\quad \begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}(x,y)=\begin{pmatrix}ux & uy\\ vx & vy\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

Следующая конструкция использует бесконечные матрицы над полем.

Теорема 3. *Существует кольцо R такое, что $R^2\cong R$.*

Доказательство. Пусть K – поле, а $R = F_c(\mathbb{N}, K)$ – кольцо столбцово конечных бесконечных матриц. Тогда в качестве требуемых x, y, u, v можно взять

$$x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \qquad v = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Непосредственное вычисление показывает, что $ux = e$, $uy = 0$, $vx = 0$, $vy = e$, и $xu + yv = e$. □

Разумеется, для алгебраиста существование безразмерных колец типа $(1,1)$ очевидно. Вместо того, чтобы искать такие кольца в природе, он просто построит кольцо с требуемым свойством. А именно, пусть $\mathbb{Z}\langle u,v,x,y\rangle$ кольцо многочленов от четырех некоммутирующих переменных, с целыми коэффициентами. Рассмотрим следующее фактор-кольцо, где мы явным образом постулируем двустороннюю обратимость матрицы (x,y):

$$R = \mathbb{Z}\langle u,v,x,y\rangle/(ux-1, uy, vx, vy-1, xu+yv-1).$$

Это и будет универсальным примером колец типа $(1,1)$.

В качестве еще одного *поразительного* свойства таких колец можно упомянуть, что над ними существуют обратимые верхние треугольные матрицы, обратные к которым являются *нижними* треугольными. Вот простейший пример, в котором используются введенные выше элементы x, y, u, v,

$$\begin{pmatrix} x & y & 0 \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & v \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u & 0 & 0 \\ v & 0 & 0 \\ 0 & x & y \end{pmatrix}.$$

Более общо, пусть x_{ij} и y_{ji}, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$, представляют собой две *общие матрицы*, все элементы которых являются независимыми некоммутирующими переменными. **Кольцо Ливитта** $L(m,n,K)$ над полем K определяется как фактор-кольцо кольца $K\langle x, y\rangle$ от $2mn$ некоммутирующих переменных x_{ij}, y_{ji}, по модулю идеала, порожденного соотношениями $xy = e^m$ и $yx = e^n$,

$$L(m,n,K) = K\langle x, y\rangle/(xy - e^m, yx - e^n).$$

Например, $L(1,1,K) = K[x, x^{-1}]$ – это обычное кольцо многочленов Лорана.

По построению, над кольцом Ливитта $L(m,n,K)$ существуют двусторонне обратимые матрицы размеров (m,n) и (n,m). Следующая теорема, впервые доказанная в [412, 413], утверждает, что над ним не существует никаких неквадратных двусторонне обратимых матриц *меньшего* размера. Таким образом, кольца Ливитта дают примеры колец всех возможных типов. В [226] и [181] можно найти более простые доказательства этого факта.

Теорема Ливитта. *Пусть $m < n$. Тогда $L(m,n,K)$ имеет тип $(m, n-m)$.*

Как мы уже отмечали, все эти примеры *бесконечно* далеки от коммутативности или конечномерности. Все коммутативные кольца – и вообще все кольца, для которых существуют гомоморфизмы в тела, обладают свойством IBN! Это показывает, что мир операторных колец вообще никак не взаимодействует с обычным конечномерным миром.

Глава 5. Элементарные преобразования

В настоящей главе мы опишем самые просто устроенные – и, тем самым, самые важные! – классы элементов в $\mathrm{GL}(n,R)$, элементарные трансвекции и элементарные псевдоотражения.

§17. Элементарные трансвекции

Элементарной трансвекцией называется матрица $t_{ij}(\xi)$ вида

$$t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}, \quad \xi \in R, \quad 1 \le i \ne j \le n.$$

Мнемонически `t` здесь является первой буквой слова `transvection`. Многие авторы обозначают элементарные трансвекции через $e_{ij}(\xi)$ – от слова `elementary`, или $x_{ij}(\xi)$ – в соответствии с общим обозначением унипотентных корневых элементов в теории алгебраических групп.

Изобразим для примера элементарные трансвекции в $\mathrm{GL}(2,R)$:

$$t_{12}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad t_{21}(\xi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix}.$$

Следующие наблюдения означают, что элементарные трансвекции – это в точности матрицы *элементарных преобразований первого типа*, играющих центральную роль в элементарной линейной алгебре.

• Умножение матрицы x на $t_{ij}(\xi)$ *слева* прибавляет j-ю строку матрицы x, умноженную на ξ *слева*, к i-й строке матрицы x.

• Умножение матрицы x на $t_{ij}(\xi)$ *справа* прибавляет i-й столбец матрицы x, умноженный на ξ *справа*, к j-му столбцу матрицы x.

Подгруппа полной линейной группы $G = \mathrm{GL}(n,R)$, порожденная всеми элементарными трансвекциями $t_{ij}(\xi)$, называется **элементарной подгруппой** и обозначается $E = E(n,R)$. Таким образом, по определению

$$E(n,R) = \langle t_{ij}(\xi),\ \xi \in R,\ 1 \le i \ne j \le n \rangle.$$

В алгебраической K-теории принято называть элементы $E(n,R)$ **элементарными матрицами**. Чтобы избежать конфликта с традиционным словоупотреблением, элементарные трансвекции и элементарные псевдоотражения называются **элементарными преобразованиями**.

Пусть кольцо R коммутативно. Тогда определитель всех трансвекций равен 1. Поэтому, заведомо $E(n,R) \le \mathrm{SL}(n,R)$, так что в общем случае никак нельзя ожидать, что $E(n,R) = \mathrm{GL}(n,R)$.

Как мы увидим в следующих частях этой работы, вообще говоря, $E(n,R) < \mathrm{SL}(n,R)$. Тем не менее, в некоторых важных случаях имеет место равенство. Для двух важных случаев доказательство можно найти в любом элементарном курсе линейной алгебры.

Теорема 4. *Для поля $R = K$ имеет место равенство*
$$E(n, K) = \mathrm{SL}(n, K).$$

Теорема 5. *Для эвклидова кольца R имеет место равенство*
$$E(n, R) = \mathrm{SL}(n, R).$$

Ясно, что элементарные группы функториальны по R. Иными словами, кольцевой гомоморфизм $\phi : R \to S$ определяет групповой гомоморфизм
$$\phi : E(n, R) \to E(n, S), \quad t_{ij}(\xi) \mapsto t_{ij}(\phi(\xi)).$$
Функтор $R \rightsquigarrow E(n, R)$ обычно обозначается через E_n.

Важное техническое преимущество E_n по отношению к GL_n состоит в том, что это функтор точен, т.е. переводит сюръективные гомоморфизмы колец в групповые эпиморфизмы.

Теорема 6. *Для любого сюръективного кольцевого гомоморфизма $\pi : R \to R/I$ соответствующий групповой гомоморфизм $\pi : E(n, R) \to E(n, R/I)$ также сюръективен.*

Доказательство. Образ π содержит все образующие элементарной группы $E(n, R/I)$. □

§18. Элементарные соотношения

Элементарные преобразования используются около 2500 лет. Однако, насколько нам известно, даже для поля соотношения между ними не были исследованы до начала 1960-х годов. Каковы *очевидные* соотношения между элементарными трансвекциями $t_{ij}(\xi)$, $\xi \in R$, $1 \leq i \neq j \leq n$? Вот два таких соотношения, обычно называемые **соотношениями Стейнберга**.

• **Аддитивность** по ξ,

(R1) $$t_{ij}(\xi) t_{ij}(\zeta) = t_{ij}(\xi + \zeta)$$

для всех $\xi, \zeta \in R$. В частности,
$$X_{ij} = \{t_{ij}(\xi) \mid \xi \in R\} \leq E(n, R),$$
является подгруппой в $E(n, R)$, причем
$$t_{ij} : R^+ \cong X_{ij}, \quad \xi \mapsto t_{ij}(\xi),$$
изоморфизм. Группы X_{ij} называются элементарными *корневыми подгруппами* в $\mathrm{GL}(n, R)$.

• Самое замечательное соотношение между трансвекциями – это следующее коммутационное соотношение, известное как **коммутационная формула Шевалле**:

$$[t_{ij}(\xi), t_{hl}(\zeta)] = \begin{cases} e, & \text{if } j \neq h, \quad i \neq l; \\ t_{il}(\xi\zeta), & \text{if } j = h, \quad i \neq l; \\ t_{hj}(-\zeta\xi), & \text{if } j \neq h, \quad i = l. \end{cases} \tag{R2}$$

Обратите внимание, что случай $j = h$, $i = l$ здесь исключен. Дело в том, что никакого более простого выражения для коммутатора $[t_{ij}(\xi), t_{ji}(\zeta)]$ в терминах элементарных трансвекций нет.

Так как в дальнейшем мы будем часто пользоваться подобными соотношениями, полезно понимать, как их легче всего проверять.

• Самый простой способ состоит в том, чтобы подставить $1, 2, 3, \ldots$ вместо $i, j, h, \ldots$, закодировав различные индексы различными цифрами. После этого достаточно прямым матричным вычислением проверить получающееся соотношение в соответствующей группе $\mathrm{GL}(m, R)$ небольшой степени. *Принцип Лагранжа* утверждает, что никакой потери общности при этом не происходит.

Например, аддитивность проверяется вычислением

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \xi + \zeta \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а для проверки коммутационной формулы Шевалле достаточно провести три вычисления наподобие следующего:

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \zeta \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \xi\zeta \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

• Другой подход состоит в том, чтобы проверять подобные соотношения в терминах умножения стандартных матричных единиц. Например, на этом языке аддитивность элементарных трансвекций проверяется следующим образом:

$$(e + \xi e_{ij})(e + \zeta e_{ij}) = e + \xi e_{ij} + \zeta e_{ij} + \xi\zeta e_{ij}^2.$$

Так как $i \neq j$, то $e_{ij}^2 = 0$, как и утверждалось.

Точно так же, коммутационная формула Шевалле сводится к вычислению

$$(e+\xi e_{ij})(e+\zeta e_{hk})(e-\xi e_{ij})(e-\zeta e_{hk}) =$$
$$(e+\xi e_{ij}+\zeta e_{hk}+\xi\zeta e_{ij}e_{hk})(e-\xi e_{ij}-\zeta e_{hk}+\xi\zeta e_{ij}e_{hk}).$$

В дальнейшем мы опускаем все подобные элементарные выкладки.

§19. Элементарные псевдоотражения

Сейчас мы подправим определение элементарной группы, с тем, чтобы получить группу, которая еще ближе к $\mathrm{GL}(n,R)$. В коммутативном случае определитель трансвекции равен 1. Таким образом, чтобы получить хорошее приближение к $\mathrm{GL}(n,K)$, нужно ввести другой тип элементарных преобразований, для которых определитель может принимать произвольные обратимые значения.

Для обратимого $\varepsilon\in R^*$ определим **элементарное псевдоотражение**

$$d_i(\varepsilon)=e+(\varepsilon-1)e_{ii},\quad \varepsilon\in R^*,\quad 1\le i\le n.$$

Иными словами,

$$d_i(\varepsilon)=\mathrm{diag}(1,\dots,1,\varepsilon,1,\dots,1),$$

где ε стоит на i-м месте. Ясно, что $d_i(\varepsilon)^{-1}=d_i(\varepsilon^{-1})$, так что действительно $d_i(\varepsilon)\in\mathrm{GL}(n,R)$ для всех обратимых ε.

Для примера изобразим элементарные псевдоотражения в $\mathrm{GL}(2,R)$:

$$d_1(\varepsilon)=\begin{pmatrix}\varepsilon&0\\0&1\end{pmatrix},\quad d_2(\varepsilon)=\begin{pmatrix}1&0\\0&\varepsilon\end{pmatrix}.$$

Заметим, что `d` здесь можно понимать как первую букву слова `diagonal` – или слова `dila[ta]tion`.

Следующие наблюдения означают, что элементарные псевдоотражения это в точности матрицы *элементарных преобразований второго типа*, играющих центральную роль в элементарной линейной алгебре.

• Умножение матрицы x на $d_i(\varepsilon)$ *слева* умножает i-ю строку x на ε *слева*.

• Умножение матрицы x на $d_i(\varepsilon)$ *справа* умножает i-й столбец x на ε *справа*.

Перечислим теперь очевидные соотношения между $d_i(\varepsilon)$.

• **Мультипликативность** по ε:

$$d_i(\varepsilon)d_i(\eta) = d_i(\varepsilon\eta), \quad \varepsilon, \eta \in R^*.$$

• **Коммутативность**:

$$d_i(\varepsilon)d_j(\eta) = d_j(\eta)d_i(\varepsilon), \quad \varepsilon, \eta \in R^*, \quad i \neq j.$$

Кроме того, имеются также следующие очевидные соотношения, связывающие $d_h(\varepsilon)$ с $t_{ij}(\xi)$.

• Для всех $1 \leq i, j, h \leq n$, $i \neq j$, $\xi \in R$, $\varepsilon \in R^*$, имеет место равенство

$$d_h(\varepsilon)t_{ij}(\xi)d_h(\varepsilon)^{-1} = \begin{cases} t_{ij}(\xi), & \text{если} \quad h \neq i, j; \\ t_{ij}(\varepsilon\xi), & \text{если} \quad h = i; \\ t_{ij}(\xi\varepsilon^{-1}), & \text{если} \quad h = j. \end{cases}$$

В терминах диагональных матриц это соотношение можно записать в виде

$$dt_{ij}(\xi)d^{-1} = t_{ij}(\varepsilon_i\xi\varepsilon_j^{-1}), \quad d = \operatorname{diag}(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n).$$

где $\varepsilon \in R^*$.

Определим теперь для произвольного кольца R **полную элементарную группу** $\mathrm{GE}(n, R)$ как подгруппу, порожденную всеми элементарными трансвекциями и всеми элементарными псевдоотражениями,

$$\mathrm{GE}(n, R) = \langle t_{ij}(\xi), \quad d_i(\varepsilon), \quad \xi \in R, \quad \varepsilon \in R^*, \quad 1 \leq i \neq j \leq n \rangle.$$

Смысл рассмотрения группы $\mathrm{GE}(n, R)$ состоит в том, что, с одной стороны, она задана очень простыми образующими, вычислять в которых легко, а, с другой стороны, она, как правило, весьма близка к $\mathrm{GL}(n, R)$. В частности, как мы уже отмечали, роль элементарных преобразований в элементарной линейной алгебре определяется следующим результатом.

Теорема 7. *Для поля $R = K$ имеет место равенство*

$$\mathrm{GE}(n, K) = \mathrm{GL}(n, K).$$

§20. Корневые элементы

Традиционно, кроме того, рассматриваются *элементарные преобразования третьего типа*, состоящие в перестановке двух строк или двух столбцов. Такие преобразования осуществляются как умножение слева или справа на матрицы транспозиций

$$w_{ij} = e - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}, \quad 1 \le i \ne j \le n,$$

которые обсуждаются в следующей главе.

Однако, эти матрицы уже лежат в полной элементарной группе $\mathrm{GE}(n,R)$. В самом деле,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Однако, удобнее пользоваться элементами чуть другого вида, обычно обозначаемыми $w_{ij}(\varepsilon)$ и $d_{ij}(\varepsilon)$, соответственно, где $\varepsilon \in R^*$ и $1 \le i \ne j \le n$.

• Положим

$$\text{(R3)} \qquad w_{ij}(\varepsilon) = t_{ij}(\varepsilon)t_{ji}(-\varepsilon^{-1})t_{ij}(\varepsilon).$$

• Далее, положим

$$\text{(R4)} \qquad d_{ij}(\varepsilon) = w_{ij}(\varepsilon)w_{ij}(-1).$$

Например, в случае $n = 2$ имеем

$$w_{12}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} 0 & \varepsilon \\ -\varepsilon^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad d_{12}(\varepsilon) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 0 \\ 0 & \varepsilon^{-1} \end{pmatrix}.$$

Отметим, что $d_{ij}(\varepsilon) = d_i(\varepsilon)d_j(\varepsilon^{-1})$ и что $w_{ij}(1)$ отличается от w_{ij} знаком одного элемента.

Перечисленные выше соотношения между элементами $t_{ij}(\xi)$ называются *элементарными соотношениями* или *соотношениями Стейнберга*. Вообще говоря, они не являются системой определяющих соотношений для элементарной группы $E(n,R)$, но дают хорошее первое приближение к таким соотношениям.

Однако, чтобы получить фактическое задание группы $E(n,K) = \mathrm{SL}(n,K)$ над полем K, достаточно добавить к ним еще ровно один тип соотношений.

• **Мультипликативность** $d_{ij}(\varepsilon)$ по ε:

$$\text{(R5)} \qquad d_{ij}(\varepsilon)d_{ij}(\eta) = d_{ij}(\varepsilon\eta).$$

Заметим, что при $n = 2$ коммутационная формула становится бессодержательной. Однако, легко проверить следующее соотношение

$$\text{(R6)} \qquad w_{ij}(\varepsilon)t_{ij}(\xi)w_{ij}(-\varepsilon) = t_{ji}(-\varepsilon^{-1}\xi\varepsilon^{-1}),$$

которое имеет смысл и при $n = 2$.

Глава 6. Некоторые очевидные подгруппы $\mathrm{GL}(n, R)$

В этой главе мы напомним определения некоторых важнейших подгрупп в $\mathrm{GL}(n, R)$. Все они будут постоянно использоваться в последующих доказательствах.

§21. Группы треугольных матриц

Напомним определения некоторых очевидных подгрупп в $G = \mathrm{GL}(n, R)$. Мнемонически, обозначения этих групп следует воспринимать как первые буквы соответствующих слов `D` – `diagonal`, `B` – `Borel subgroup`, `U` – `unipotent`.

• **Группа диагональных матриц.** Обозначим через

$$D = D(n, R) = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ 0 & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}$$

группу *диагональных матриц*, состоящую из всех матриц $x = (x_{ij}) \in G$ таких, что $x_{ij} = 0$ для всех $i \neq j$.

Каждая диагональная матрица $d = \mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$ выражается как произведение элементарных псевдоотражений

$$\mathrm{diag}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) = d_1(\varepsilon_1) \dots d_n(\varepsilon_n).$$

Тем самым,

$$D(n, R) = \big\langle d_i(\varepsilon),\ \varepsilon \in R^*,\ 1 \leq i \leq n \big\rangle.$$

• **Группы треугольных матриц.** Обозначим через

$$B = B(n, R) = \begin{pmatrix} * & * & \dots & * \\ 0 & * & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & * \end{pmatrix}$$

группу *верхних треугольных матриц*, состоящую из всех матриц $x = (x_{ij}) \in G$ таких, что $x_{ij} = 0 = x'_{ij}$ для всех $i > j$. Иными словами, группа B состоит из таких обратимых верхних треугольных матриц, обратные к которым также верхние треугольные. Из §12 и §16 мы знаем, что в общем случае обратная к верхней треугольной совершенно не обязана быть верхней треугольной. Поэтому совершенно недостаточно, как это иногда делается, проверять обращение в 0 поддиагональных элементов самой матрицы x.

Группа

$$B^- = B^-(n,R) = \begin{pmatrix} * & 0 & \dots & 0 \\ * & * & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & * \end{pmatrix}$$

нижних треугольных матриц определяется аналогично. Она состоит из всех матриц $x = (x_{ij}) \in G$ таких, что $x_{ij} = 0 = x'_{ij}$ для всех $i < j$.

• **Группы унитреугольных матриц.** Обозначим через

$$U = U(n,R) = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & 1 & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

группу *верхних унитреугольных матриц*, т.е. подгруппу в B, состоящую из **унипотентных** матриц. Иными словами, U состоит из всех матриц $x = (x_{ij})$ таких, что $x_{ij} = 0$ для всех $i > j$ и, кроме того, $x_{ii} = 1$ для всех i.

Группа

$$U^- = U^-(n,R) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ * & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

нижних унитреугольных матриц определяется аналогично. Она состоит из всех матриц $x = (x_{ij})$ таких, что $x_{ij} = 0$ для всех $i < j$ и, кроме того, $x_{ii} = 1$ для всех i.

Сформулируем очевидный, но важный факт.

Теорема 8. *Над произвольным кольцом R группа $B(n,R)$ является полупрямым произведением нормальной подгруппы $U(n,R)$ и дополнительной подгруппы $D(n,R)$,*

$$B(n,R) = D(n,R) \leftthreetimes U(n,R).$$

Естественно, аналогичный результат справедлив также, если заменить здесь $B(n,R)$ и $U(n,R)$ на $B^-(n,R)$ и $U^-(n,R)$, соответственно.

Коммутационная формула Шевалле является одним из важнейших инструментов всей структурной теории алгебраических групп. Сформулируем для примера одно из ее непосредственных следствий.

Теорема 9. *Для произвольного фиксированного линейного порядка на множестве пар (i,j), $1 \leq i < j \leq n$, имеет место разложение*

$$U(n,R) = \prod X_{ij}, \quad 1 \leq i < j \leq n.$$

Иными словами, утверждается, что матрицу $u \in U(n,R)$ можно единственным образом записать в виде $u = \prod t_{ij}(\xi_{ij})$. Чаще всего здесь используется один из следующих порядков.

- **Естественный порядок**

$$(n-1,n) < (n-2,n) < \ldots < (1,n) < (n-2,n-1)$$
$$< (n-3,n-1) < \ldots < (1,2),$$

для которого параметры ξ_{ij} совпадают с обычными матричными элементами в записи $u = (u_{ij})$ и поэтому удобно проводить индукцию по размерности n.

- **Регулярный порядок**

$$(1,2) < (2,3) < \ldots < (n-1,n) < (1,3) < (2,4) < \ldots < (1,n),$$

в котором удобно – при фиксированном n – проводить индукцию по высоте корня $j - i$.

Следствие. *Имеют место включения $U(n,R), U^-(n,R) \leq E(n,R)$.*

§22. Мономиальные подгруппы

Определим еще две очевидных, но очень важных подгруппы в $\mathrm{GL}(n,R)$. Как и в предыдущем параграфе, обозначения этих групп являются мнемоническими. А именно, `N` обозначает `torus Normalizer`, а `W` – `Weyl group`.

- **Мономиальная подгруппа.** Через $N = N(n,R)$ обозначается *мономиальная подгруппа*, состоящая из всех матриц $x = (x_{ij}) \in G$, в каждой строке и в каждом столбце которых имеется ровно один ненулевой элемент. Иными словами, для каждого i существует единственный j такой, что $x_{ij} \neq 0$, и наоборот. В этом случае автоматически $x_{ij} \in R^*$.

Например, мономиальная матрица степени 2 имеет одну из двух следующих форм:
$$\begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & 0 \end{pmatrix}.$$
Ясно, что подгруппа $N(n,R)$ нормализует $D(n,R)$. *Морально*, $N(n,R)$ совпадает с нормализатором диагональной подгруппы $D(n,R)$ в $G = \mathrm{GL}(n,R)$. Например, если $R = K$ – поле, не изоморфное $\mathbb{F}_2$, то
$$N(n,R) = N_G(D(n,K)).$$
Однако, для колец группа $N_G(D(n,R))$, вообще говоря, строго больше, чем $N(n,R)$.

Сформулируем еще один очевидный факт.

Лемма 13. *Имеет место равенство*
$$B(n,R) \cap N(n,R) = D(n,R).$$

• **Группа матриц перестановок.** Мы часто используем матрицы
$$w_{ij} = e - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}, \quad 1 \le i \ne j \le n.$$
Подгруппа в $\mathrm{GL}(n,R)$, порожденная всеми w_{ij}, $1 \le i \ne j \le n$, обозначается через $W = W_n$ и называется группой **матриц перестановок**. Она состоит из всех матриц, у которых ровно один ненулевой элемент в каждой строке и в каждом столбце, причем все эти ненулевые элементы равны 1.

Эта группа естественно изоморфна симметрической группе S_n степени n. А именно, сопоставим перестановке $\pi \in S_n$ соответствующую матрицу перестановки (π), элемент которой в позиции (i,j) равен $\delta_{i,\pi(j)}$. Ясно, что при этом соответствии матрицы w_{ij} это в точности образы транспозиций.

Непосредственная проверка показывает, что отображение $S_n \to W_n$, $\pi \mapsto (\pi)$, является изоморфизмом, $(\sigma\pi) = (\sigma)(\pi)$. В частности, обратная к матрице перестановки совпадает с транспонированной.

Перечислим, для примера, матрицы перестановки степени 3:
$$e = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad w_{13} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$w_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathtt{cox} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathtt{cox}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Имеет место еще одно очевидное разложение в полупрямое произведение, в котором D выступает в качестве нормальной подгруппы.

Теорема 10. *Над произвольным кольцом R группа $N(n,R)$ является полупрямым произведением нормальной подгруппы $D(n,R)$ и дополнительной подгруппы $W = W_n$,*

$$N(n,R) = D(n,R) \leftthreetimes W_n.$$

• **Группа означенных матриц перестановки.** Иногда вместо матриц перестановки удобнее использовать чуть большую группу *означенных* матриц перестановки.

Напомним, что матрицы перестановки соответствуют перестановкам стандартного базиса $e_1, \dots, e_n$ свободного правого модуля R^n. В свою очередь, *означенные матрицы перестановки* = `signed permutation matrices` отвечают перестановкам *означенного* стандартного базиса $\pm e_1, \dots, \pm e_n$.

Ясно, что линейное преобразование, переводящее e_i в $\pm e_j$, обязано переводить $-e_i$ в $\mp e_j$. Поэтому означенные матрицы перестановки отвечают не всем перестановкам $2n$ символов $1, \dots, n, -n, \dots, -1$, а лишь тем перестановкам $\pi \in S_{2n}$, для которых $\pi(-i) = -\pi(i)$. Все такие перестановки образуют **октаэдральную группу** Oct_n. Она порождается попарными произведениями транспозиций $(ij)(-i,-j)$, где $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, и сменами знака, т. е. транспозициями вида $(i,-i)$.

Таким образом, означенная матрица перестановки получается из обычной матрицы перестановки заменой некоторых 1 на -1. Иными словами, для любого кольца R, в котором $2 \neq 0$, группа означенных матриц перестановки с коэффициентами из R изоморфна группе $N(n,\mathbb{Z})$ целочисленных мономиальных матриц. Изобразим, для примера, все означенные матрицы перестановки степени 2:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

§23. Группы, связанные с разбиением

В действительности, описанные в предыдущих параграфах подгруппы допускают многочисленные аналоги, варианты и обобщения.

Здесь мы опишем одну из важнейших таких конструкций, а именно, группы, связанные с разбиением степени n.

Над телом T так построенные группы дают два важнейших класса *очевидных* максимальных подгрупп в $\mathrm{GL}(n,T)$, а именно, параболические подгруппы и импримитивные подгруппы. Доказательства большинства классических результатов в теории линейных групп над телами и теории представлений начинаются с редукции к неприводимым примитивным подгруппам, т.е. подгруппам, не содержащимся в собственных подгруппах этих типов. Над кольцами ситуация значительно сложнее, тем не менее и здесь центральным ингредиентом большинства доказательств является параболическая редукция.

Пусть $\nu = (n_1, \ldots, n_t)$ – **разбиение** стенени n, иными словами,

$$n = n_1 + \ldots + n_t.$$

Это разбиение определяет отношение эквивалентности $i \sim_\pi j$ – или просто $i \sim j$ – на множестве индексов $I = \{1, \ldots, n\}$, а именно,

$$i \sim_\pi j \iff n_1+\ldots+n_{h-1}+1 \le i, j \le n_1+\ldots+n_h \text{ для какого-то } 1 \le h \le t.$$

Пусть теперь $I_1, \ldots, I_t$ классы отношения эквивалентности $\sim$, порядков $n_1, \ldots, n_t$, соответственно. Тогда I представляется как дизъюнктное объединение

$$I = I_1 \sqcup \ldots \sqcup I_t.$$

С разбиением ν можно связать несколько подгрупп в полной линейной группе $\mathrm{GL}(n,R)$ над произвольным кольцом R.

• Обозначим через $D(\nu,R)$ группу **блочно диагональных матриц** типа ν. Она состоит из всех матриц $x = (x_{ij})$ таких, что $x_{ij} = 0$, если i не эквивалентно j:

$$D(\nu,R) = \{x = (x_{ij}) \in \mathrm{GL}(n,R) \mid x_{ij} = 0 \quad \text{для} \quad i \not\sim j\}.$$

Ясно, что

$$D(\nu,R) = \mathrm{GL}(n_1,R) \oplus \ldots \oplus \mathrm{GL}(n_t,R).$$

• Можно рассмотреть также группу $B(\nu,R)$ **верхних блочно треугольных матриц** типа ν, которая состоит из всех матриц $x = (x_{ij})$, с обратной матрицей $x^{-1} = (x'_{ij})$, таких, что $x_{ij} = 0$ и $x'_{ij} = 0$ для всех $i > j$ таких, что i не эквивалентно j:

$$B(\nu,R) = \{x = (x_{ij}) \in \mathrm{GL}(n,R) \mid x_{ij} = 0 = x'_{ij} \quad \text{для} \quad i > j,\ i \not\sim j\}.$$

Как мы уже знаем, условие на элементы x'_{ij} обратной матрицы здесь совершенно необходимо: для кольца, не являющегося слабо конечным, обратная к обратимой блочно треугольной матрице типа ν вовсе не обязана сама быть блочно треугольной матрицей того же типа.

• Как обычно, заменяя здесь верхние треугольные матрицы на нижние треугольные, мы получим группу $B^-(\nu, R)$ **нижних блочно треугольных матриц** типа ν, состоящую из всех матриц $x = (x_{ij})$ таких, что $x_{ij} = 0$ и $x'_{ij} = 0$ для всех $i < j$ таких, что i не эквивалентно j:

$$B^-(\nu, R) = \{x = (x_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, R) \mid x_{ij} = 0 = x'_{ij} \quad \text{для} \quad i < j,\ i \not\sim j\}.$$

• Можно рассмотреть также группу $U(\nu, R)$ **верхних блочно унитреугольных матриц** типа ν, состоящую из всех матриц $x = (x_{ij})$ таких, что $x_{ij} = 0$ для всех $i > j$ и $x_{ij} = \delta_{ij}$ для i эквивалентных j:

$$U(\nu, R) = \{x = (x_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, R) \mid x_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{для} \quad i > j \text{ или } i \sim j\}.$$

• Как и выше, группа $U^-(\nu, R)$ **нижних блочно унитреугольных матриц** типа ν, состоит из всех матриц $x = (x_{ij})$ таких, что $x_{ij} = 0$ если $i < j$ и $x_{ij} = \delta_{ij}$ для i эквивалентных j:

$$U^-(\nu, R) = \{x = (x_{ij}) \in \mathrm{GL}(n, R) \mid x_{ij} = \delta_{ij} \quad \text{для} \quad i < j \text{ или } i \sim j\}.$$

• Наконец, можно определить группу $N(\nu, R)$ *блочно мономиальных матриц* типа ν. Эта группа особенно важна в случае, когда $\nu = (m, \ldots, m)$ — разбиение на равные слагаемые. В этом случае $N(\nu, R)$ изоморфна *сплетению* группы $\mathrm{GL}(m, R)$ и симметрической группы $\mathrm{S}_{n/m}$.

Определенные в предыдущем параграфе группы $D(n, R)$, $B(n, R)$, $B^-(n, R)$, $U(n, R)$, $U^-(n, R)$ и $N(n, R)$ являются в точности группами $D(\nu, R)$, $B(\nu, R)$, $B^-(n, R)$, $U(\nu, R)$, $U^-(n, R)$ и $N(\nu, R)$, отвечающими самому тонкому разбиению $\nu = (1, \ldots, 1)$.

Глава 7. Разложения Брюа и Гаусса

Здесь мы докажем два важнейших классических результата, дающих короткие выражения обратимых матриц над телами и полулокальными кольцами в терминах элементарных преобразований.

§24. Разложение Брюа

Нет сомнения, что разложение Брюа является самым важным индивидуальным фактом о линейных группах над телами. Именно разложение Брюа объясняет специфику линейных групп над телами по сравнению с общими кольцами, когда никаких подобных разложений фиксированной длины не существует.

Пусть $R = T$ – тело. Хорошо известно, что в этом случае подгруппы $B = B(n,T)$ и $N = N(n,T)$ образуют BN-пару в $G = \mathrm{GL}(n,T)$ [12, 121]. В частности, это означает, что в $\mathrm{GL}(n,T)$ выполняется **лемма Брюа**. Однако, мы дадим прямое доказательство, не зависящее от теории BN-пар.

Лемма Брюа. *Для тела T полная линейная группа $G = \mathrm{GL}(n,T)$ допускает разложение*

$$G = BNB = BWB.$$

При этом W является системой представителей двойных смежных классов G по модулю B, иными словами, для $w_1, w_2 \in W$ имеет место эквивалентность

$$Bw_1B = Bw_2B \quad \Longleftrightarrow \quad w_1 = w_2.$$

Прежде всего, мы докажем, что любую матрицу $g \in \mathrm{GL}(n,T)$ можно выразить как произведение $g = b_1wb_2$ для некоторых $b_1, b_2 \in B$ и некоторого $w \in N$. Мы дадим два доказательства существования: замечательно элегантное доказательство Стейнберга и незамысловатое доказательство по индукции. Второе доказательство далеко не столь изящно, но зато фактически является алгоритмом, который позволяет *вычислять* разложение Брюа данной матрицы.

Доказательство Стейнберга. Возьмем $g \in G$ и среди всех произведений вида bg, для всевозможных $b \in B$, выберем то, в котором *общее* количество нулей в начале всех строк наибольшее. Мы утверждаем, что в этом случае любые две различные строки x начинаются с различного количества нулей. В самом деле, предположим, что i-я и j-я строки матрицы x начинаются с одинакового количества нулей, скажем, с h нулей, для каких-то $i < j$. Тогда $x_{j,h+1} \neq 0$ и умножая x слева на $t_{ij}(-x_{i,h+1}x_{j,h+1}^{-1}) \in B$ мы получим матрицу с большим количеством начальных нулей, что противоречит определению x.

Таким образом, все n строк матрицы x имеют различное количество начальных нулей. Пусть w – матрица перестановки, переставляющая эти строки по возрастанию количества нулей. Тогда матрица $wx = wbg \in B$ верхняя треугольная и, таким образом, $g \in b^{-1}w^{-1}B$, как и утверждалось. □

Конструктивное доказательство. Будем рассуждать индукцией по n. В качестве базы индукции возьмем случай $n = 1$, когда доказывать нечего. Так как матрица g обратима, то ее первая строка ненулевая, $g_{*1} \neq 0$. Пусть $h = i_1$ – наибольший индекс такой, что $g_{h,1} \neq 0$. Рассмотрим следующие верхние треугольные матрицы

$$u = t_{1h}(-g_{11}g_{h1}^{-1}) \dots t_{h-1,h}(-g_{h-1,1}g_{h1}^{-1}),$$
$$v = t_{12}(-g_{h1}^{-1}g_{h2}) \dots t_{1n}(-g_{h1}^{-1}g_{hn}).$$

Тогда x_{h1} – это *единственный* ненулевой коэффициент в первом столбце x_{*1} и в h-й строке x_{h*} матрицы $x = ugv$. Вычеркивая из x эти строку и столбец, мы получим матрицу $y \in \mathrm{GL}(n-1,T)$. Применяя к y индукционное предположение, мы можем заключить, что $y \in B(n-1,T)N(n-1,T)B(n-1,T)$. □

Нам остается еще доказать единственность множителя из группы Вейля.

Единственность. Пусть $Bw_1B = Bw_2B$ для некоторых $w_1, w_2 \in W$. Это равенство можно переписать в виде $w_2^{-1}Bw_1 = B$. В частности, $w_2^{-1}w_1D = w_2^{-1}Dw_1 \leq B$. Так как $N \cap B = D$, это возможно только в случае, когда $w_2^{-1}w_1D = D$, иными словами, только при $w_2^{-1}w_1 = 1$. □

§25. Параболические подгруппы

Как уже упоминалось, основным инструментом большинства доказательств является редукция по рангу, в первую очередь в форме параболической редукции.

Пусть вначале $R = T$ – тело, как и в предыдущем параграфе. Напомним, что *стандартной параболической* подгруппой в $G = \mathrm{GL}(n,T)$ называется подгруппа, содержащая B. **Параболической** подгруппой называется подгруппа, сопряженная со стандартной параболической.

Знаменитая теорема Жака Титса утверждает, что параболические подгруппы в $G = \mathrm{GL}(n,T)$ – или, более общо, в любой группе, для которой выполняется разложение Брюа – допускают *стандартное описание*. Сформулируем этот классический результат для случая $\mathrm{GL}(n,T)$.

Теорема Титса. *Каждая подгруппа H, $B(n,T) \leq H \leq \mathrm{GL}(n,T)$, имеет вид $H = B(\nu,T)$ для единственного разбиения ν степени n.*

Вернемся теперь к случаю произвольного кольца R. Мы сохраним название **параболические подгруппы** за группами точек групп $B(\nu, R)$ и их сопряженных и над произвольным кольцом. В большинстве вопросов редукция проходит к максимальным параболическим подгруппам.

Через $P_r = B(r, n-r, R)$ мы обозначаем r-ю стандартную **максимальную параболическую подгруппу** в $G = \mathrm{GL}(n, R)$. С геометрической точки зрения подгруппа P_r, $r = 1, \dots, n-1$, это в точности стабилизатор подмодуля V_r в $V = R^n$, порожденного стандартными базисными векторами $e_1, \dots, e_r$. В матрицах P_r реализуется как следующая группа верхних блочно треугольных матриц,

$$P_r = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix}, x \in \mathrm{GL}(r, R), y \in M(r, n-r, R), z \in \mathrm{GL}(n-r, R) \right\}.$$

С точки зрения двойственного модуля $V^* = {}^nR$ группа P_r является стабилизатором подмодуля $V^{r+1} = V_r^{\perp}$. Любая подгруппа, сопряженная с P_r, называется параболической подгруппой **типа** P_r.

Наибольший интерес для нас представляют подгруппа P_1 – это в точности стабилизатор подмодуля $e_1R \leq V$, состоящий из всех матриц, *первый* столбец которых пропорционален e_1, и подгруппа P_{n-1} – это стабилизатор подмодуля $Rf_n \leq V^*$, состоящий из матриц, *последняя* строка которых пропорциональна f_n. В некоторых случаях для редукции к меньшему рангу нам понадобятся еще *субмаксимальные* параболические подгруппы $P_{rs} = P_r \cap P_s$, где $1 \leq r < s \leq n-1$, стабилизирующие флаг $V_r < V_s$.

Мы будем постоянно пользоваться **разложением Леви** для параболических подгрупп, обобщающим разложение верхних треугольных матриц в полупрямое произведение диагональных и верхних унитреугольных матриц. Ограничимся для простоты случаем максимальных параболических подгрупп. Свяжем с подгруппой P_r **подгруппу Леви** $L_r = \mathrm{GL}(r, R) \oplus \mathrm{GL}(n-r, R)$ и **унипотентный радикал** $U_r = U(r, n-r, R)$. В матрицах эти группы выглядят следующим образом:

$$L_r = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix}, x \in \mathrm{GL}(r, R), z \in \mathrm{GL}(n-r, R) \right\},$$

$$U_r = \left\{ \begin{pmatrix} e & y \\ 0 & e \end{pmatrix}, y \in M(r, n-r, R) \right\}.$$

Разложение Леви. *Группа P_r представляется в виде полупрямого произведения $P_r = L_r \leftthreetimes U_r$.*

Вместе с подгруппой P_r рассматривается также **противоположная** подгруппа P_r^-, стабилизирующая подмодуль в V, порожденный $e_{r+1}, \dots, e_n$ — таким образом, P_r^- – подгруппа типа P_{n-r}, а вовсе не типа P_r. В матрицах P_r^- реализуется как

$$P_r^- = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}, x \in \mathrm{GL}(r,R), y \in M(n-r,r,R), z \in \mathrm{GL}(n-r,R) \right\}.$$

иными словами, $P_r^- = P_r^t$. Таким образом, стандартная подгруппа Леви группы P_r^- совпадает с $L_r = \mathrm{GL}(r,R) \oplus \mathrm{GL}(n-r,R)$, в то время как унипотентный радикал U_r^- группы P_r^- равен $U_r^t = U^-(r,n-r,R)$.

§26. Разложение Гаусса

Обратимые матрицы над полулокальным кольцом допускают разложение, которое лишь на 50% сложнее, чем разложение Брюа над полями. В действительности, ничуть не сложнее доказать это разложение в естественной общности.

Для этого напомним, что кольца стабильного ранга 1 определяются следующим образом. Для любых $x, y \in R$ таких, что $xR + yR = R$, найдется $z \in R$ такое, что $(x + yz)R = R$. В следующей части настоящего обзора мы докажем, что кольца стабильного ранга 1 слабо конечны так что в этом случае автоматически $x + yz \in R^*$.

Разложение Гаусса. *Для любого кольца R стабильного ранга 1 полная линейная группа $G = \mathrm{GL}(n,R)$ допускает следующее разложение*:

$$G = BB^-B = UB^-U.$$

Мы докажем этот результат индукцией по n. А именно, мы докажем, что

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & \dots & * & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 \\ * & \dots & * & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & * \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

после чего, с учетом того обстоятельства, что L_{n-1} нормализует U_{n-1}^-, наше утверждение сразу вытекает из индукционного предположения.

Для этого заметим, прежде всего, что для колец стабильного ранга 1 выполняется следующее утверждение.

Лемма 14. *Пусть R – кольцо стабильного ранга 1 и пусть, кроме того, $x = (x_1, \dots, x_n) \in {}^nR$ – унимодулярная строка длины $n \geq 2$. Тогда найдутся $z_1, \dots, z_{n-1} \in R$ такие, что*

$$x_n + x_1 z_1 + \ldots + x_{n-1} z_{n-1} \in R^*.$$

Аналогичное свойство для колец произвольного стабильного ранга установлено в следующей части настоящего обзора. Этот специальный случай сразу следует из условия $\mathrm{sr}(R) = 1$ индукцией по n. Теперь у нас все готово, чтобы доказать разложение Гаусса.

Доказательство. Возьмем произвольную матрицу $g \in \mathrm{GL}(n, R)$. Так как ее последняя строка

$$g_{n*} = (g_{n1}, \dots, g_{n,n-1}, g_{nn})$$

унимодулярна, то по лемме найдутся $z_1, \dots, z_{n-1} \in R$ такие, что

$$h_{nn} = g_{nn} + g_{n1} z_1 + \ldots + g_{n,n-1} z_{n-1} \in R^*.$$

Положим

$$h = gu = g \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & z_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & z_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1,n-1} & h_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ g_{n-1,1} & \dots & g_{n-1,n-1} & h_{n-1,n} \\ g_{n,1} & \dots & g_{n-1,n} & h_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Полагая теперь $y_i = -h_{in} h_{nn}^{-1} \in R$, мы видим, что

$$vh = vgu = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & y_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & y_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} gu = \begin{pmatrix} * & \dots & * & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ * & \dots & * & 0 \\ g_{n,1} & \dots & g_{n-1,n} & h_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Перенося множители u и v в правую часть, мы получаем разложение $G = U_{n-1} P_{n-1}^{-} U_{n-1}$. Так как $P_{n-1}^{-} = L_{n-1} U_{n-1}^{-}$, а для $L_{n-1} \cong \mathrm{GL}(n-1, R)$ утверждение следует из индукционного предположения, то искомое разложение доказано. □

Глава 8. Относительные группы

В этой главе мы начнем изучать еще несколько важнейших подгрупп в полной линейной группе $\mathrm{GL}(n, R)$, а именно *относительные* группы, связанные с идеалами $I \trianglelefteq R$.

§27. Конгруэнц-подгруппы

В настоящем параграфе мы свяжем с каждым идеалом $I \trianglelefteq R$ две нормальные подгруппы в полной линейной группе $\mathrm{GL}(n, R)$.

Ядро гомоморфизма редукции ρ_I называется **главной конгруэнц-подгруппой** в $\mathrm{GL}(n, R)$ уровня I и обозначается $\mathrm{GL}(n, R, I)$. По определению

$$1 \to \mathrm{GL}(n, R, I) \to \mathrm{GL}(n, R) \to \mathrm{GL}(n, R/I).$$

Две матрицы $x = (x_{ij})$ и $y = (y_{ij})$ называются **сравнимыми по модулю** I, если $x_{ij} \equiv y_{ij} \pmod I$ для всех $1 \leq i, j \leq n$. Как и для скаляров, сравнимость по модулю I обозначается через $x \equiv y \pmod I$. Главная конгруэнц-подгруппа $\mathrm{GL}(n, R, I)$ состоит из всех матриц $x \in \mathrm{GL}(n, R)$ сравнимых с e по модулю I:

$$\mathrm{GL}(n, R, I) = \{x \in \mathrm{GL}(n, R) \mid x \equiv e \pmod I\}.$$

Так как ядро *любого* гомоморфизма является нормальной подгруппой, это показывает, что в группе $\mathrm{GL}(n, R)$ может быть довольно много нормальных подгрупп, по крайней мере, если в кольце R много идеалов.

С каждым идеалом связана еще одна естественная нормальная подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$. А именно, рассмотрим центр $C(n, R/I)$ группы $\mathrm{GL}(n, R/I)$. Полный прообраз группы $C(n, R/I)$ относительно гомоморфизма редукции ρ_I обозначается через $C(n, R, I)$ и называется **полной конгруэнц-подгруппой** уровня I:

$$C(n, R, I) = \rho_I^{-1}\big(C(n, R/I)\big).$$

Так как центр $C(n, R)$ группы $\mathrm{GL}(n, R)$ является ядром канонической проекции $\pi_R : \mathrm{GL}(n, R) \to \mathrm{PGL}(n, R)$, это значит, что $C(n, R, I)$ является ядром $\pi_{R/I} \circ \rho_I$:

$$1 \to C(n, R, I) \to \mathrm{GL}(n, R) \to \mathrm{PGL}(n, R/I).$$

Тем самым, полная конгруэнц-подгруппа $C(n, R, I)$ тоже является нормальной подгруппой в $\mathrm{GL}(n, R)$. Хайман Басс обозначал группу $C(n, R, I)$ через $\mathrm{GL}'(n, R, I)$, в то время как в книге Хана и О'Миры используется обозначение $\mathrm{GL}^{\sim}(n, R, I)$. Однако обозначение $C(n, R, I)$ является общепринятым в русской литературе и кажется нам более суггестивным.

Переводя это определение на язык сравнений, мы видим, что

$$C(n, R, I) = \{x \in \mathrm{GL}(n, R) \mid x \equiv \lambda e \pmod I,\ \bar\lambda \in \mathrm{Cent}(R/I)\}.$$

Таким образом,

$$[\mathrm{GL}(n,R), C(n,R,I)] \leq \mathrm{GL}(n,R,I).$$

Если кольцо R коммутативно, то можно ввести аналоги главной и полной конгруэнц-подгрупп в специальной линейной группе $\mathrm{SL}(n,R)$. А именно, **главная конгруэнц-подгруппа** $\mathrm{SL}(n,R,I)$ уровня I – это ядро гомоморфизма редукции

$$\rho_I : \mathrm{SL}(n,R) \to \mathrm{SL}(n,R/I).$$

Точно так же, **полная конгруэнц-подгруппа** $\mathrm{SC}(n,R,I)$ уровня I – это прообраз центра $\mathrm{SC}(n,R/I)$ группы $\mathrm{SL}(n,R/I)$ по отношению к ρ_I.

Таким образом, точны последовательности

$$1 \to \mathrm{SL}(n,R,I) \to \mathrm{SL}(n,R) \to \mathrm{SL}(n,R/I),$$
$$1 \to \mathrm{SC}(n,R,I) \to \mathrm{SL}(n,R) \to \mathrm{PSL}(n,R/I).$$

Замечание. Стоит подчеркнуть, что главные конгруэнц-подгруппы не зависят от выбора ассоциативного (коммутативного в случае специальной линейной группы) кольца с 1, содержащего I в качестве идеала. Таким образом, в принципе, мы могли бы вместо $\mathrm{GL}(n,R,I)$ и $\mathrm{SL}(n,R,I)$ писать просто $\mathrm{GL}(n,I)$ и $\mathrm{SL}(n,I)$ и рассматривать эти группы как полную и специальную линейные группы над кольцом I *без* 1, соответственно. В то же время, полные конгруэнц-подгруппы, $C(n,R,I)$ и $\mathrm{SC}(n,R,I)$ – как и определяемые чуть далее относительные элементарные группы! – вообще говоря, *зависят* от выбора кольца R. Поэтому их следует рассматривать как *относительные* группы, определенные *парой* (R,I), где $I \trianglelefteq R$.

§28. Относительные элементарные группы

Пусть теперь I – идеал кольца R. Элементарная трансвекция $x = t_{ij}(\xi)$ такая, что $\xi \in I$, называется трансвекцией **уровня** I. Заметим, что классически в этом случае говорили, что уровень x *содержится в* I.

Рассмотрим подгруппу $F(n,R,I)$ в $E(n,R)$, порожденную всеми элементарными трансвекциями уровня I:

$$F(n,R,I) = \langle t_{ij}(\xi), \xi \in I, 1 \leq i \neq j \leq n\rangle.$$

Снова эта группа не зависит от выбора объемлющего кольца R с 1, а лишь от самого I, рассматриваемого как кольцо без 1, и часто обозначается просто $E(n, I)$.

Однако, с точки зрения группы $\mathrm{GL}(n, R)$ группа $E(n, I)$ не может быть правильным аналогом элементарной группы $E(n, R)$. Дело в том, что, вообще говоря, группа $E(n, I)$ не может быть нормальной в $\mathrm{GL}(n, R)$. Почему? Возьмем матрицу $x = (x_{ij}) \in E(n, I)$. Тогда $x_{ij} \equiv 0 \pmod I$ для $i \neq j$, но $x_{ii} \equiv 1 \pmod{I^2}$. Таким образом, матрицы

$$z_{12}(\xi, \zeta) = t_{21}(\zeta)t_{12}(\xi)t_{21}(-\zeta) = \begin{pmatrix} 1 - \xi\zeta & \xi \\ -\zeta\xi\zeta & 1 + \zeta\xi \end{pmatrix},$$

где $\xi \in I$, $\zeta \in R$, не могут принадлежать $E(n, I)$

Чтобы подгруппа H была нормальной в $\mathrm{GL}(n, R)$, *по крайней мере* необходимо, чтобы H нормализовалась элементарной группой $E(n, R)$. Поэтому Хайманом Басс предложил называть **элементарной подгруппой** уровня I *нормальную* подгруппу в элементарной группе $E(n, R)$, порожденную всеми элементарными трансвекциями уровня I. Эта группа зависит от выбора объемлющего кольца R и обозначается $E(n, R, I)$.

Иными словами, $E(n, R, I)$ это нормальное замыкание $F(n, R, I)$ в $E(n, R)$:

$$E(n, R, I) = \langle t_{ij}(\xi), \xi \in I, 1 \leq i \neq j \leq n \rangle^{E(n,R)}.$$

Если $I \neq R$, то группа $E(n, R, I)$ называется **относительной** элементарной подгруппой, в противоположность **абсолютной** элементарной группе $E(n, R)$. У этой группы уже больше шансов быть нормальной в $\mathrm{GL}(n, R)$. Как мы увидим в дальнейшем, при $n \geq 3$ эта группа действительно довольно часто нормальна в $\mathrm{GL}(n, R)$.

§29. Порождение относительных элементарных групп

Ce, que l'un voit, l'autre ne le voit pas.

Voltaire, Micromegas

Относительная элементарная группа $E(n, R, I)$ уровня I порождается элементарными трансвекциями уровня I как *нормальная* подгруппа в $E(n, R)$. Чем она порождается *как подгруппа*? Оказывается, при $n \geq 3$ в предыдущем параграфе мы уже видели ее образующие.

Следующий результат — в большей общности! — доказан в работе Майкла Стайна [568]. После этого он передоказывался в работе Жака Титса [592] и непосредственно для случая GL_n в работе Леонида Васерштейна и Андрея Суслина [40].

Теорема 11. *При $n \geq 3$ относительная элементарная группа $E(n, R, I)$ порождается матрицами*

$$z_{ij}(\xi, \zeta) = t_{ji}(\zeta) t_{ij}(\xi) t_{ji}(-\zeta), \quad \xi \in I, \quad \zeta \in R, \quad 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Доказательство фактически не использует ничего, кроме тождеств с коммутаторами и коммутационной формулы Шевалле. Приводимое ниже доказательство является обработкой [159], где все детали вычислений приведены для более сложного случая унитарной группы.

Доказательство. Так как матрица $z_{ij}(\xi, 0) = t_{ij}(\xi)$ является обычной элементарной трансвекцией, то группа, порожденная $z_{ij}(\xi, \zeta)$, содержит $F(n, R, I)$. По определению подгруппа $E(n, R, I)$ порождается матрицами ${}^{x}t_{ij}(\xi) = x t_{ij}(\xi) x^{-1}$, где $x \in E(n, R)$, $\xi \in I$, а $1 \leq i \neq j \leq n$. Доказательство ведется индукцией по длине t самого короткого выражения x как произведения элементарных трансвекцией. При $t \leq 1$ доказывать нечего. При $t \geq 2$ можно представить x в виде $t_{hk}(\zeta) y$, где $y \in E(n, R)$, $\zeta \in R$ и $1 \leq h \neq k \leq n$. Применяя теперь коммутаторное тождество ${}^{ab}c = {}^{a}[b, c] \cdot {}^{a}c$, получим

$${}^{t_{hk}(\zeta) y} t_{ij}(\xi) = {}^{t_{hk}(\zeta)}[y, t_{ij}(\xi)] \cdot {}^{t_{hk}(\zeta)} t_{ij}(\xi).$$

При $(h, k) \neq (j, i)$ можно заключить, что $z = {}^{t_{hk}(\zeta)} t_{ij}(\xi)$ принадлежит $F(n, R, I)$. Если же $(h, k) = (j, i)$, то $z = z_{ij}(\xi, \zeta)$. С другой стороны, так как y короче, чем x, коммутатор $[y, t_{ij}(\xi)]$ является произведением множителей вида $z_{lm}(\omega, \theta)$, $\omega \in I, \theta \in R$, $1 \leq l \neq m \leq n$. В свою очередь для матрицы $w = {}^{t_{hk}(\zeta)} z_{lm}(\omega, \theta)$ имеет место одна из следующих трех возможностей: Если $(h, k) \neq (l, m), (m, l)$, то $w \in z_{lm}(\omega, \theta) F(n, R, I)$. Если $(h, k) = (m, l)$, то $w = z_{lm}(\omega, \theta + \zeta)$. Наконец, если $(h, k) = (l, m)$, то можно выбрать индекс $p \neq h, k$ и выразить $t_{lm}(\omega)$ в виде $t_{lm}(\omega) =$

$[t_{lp}(1), t_{pm}(\omega)]$. Тогда

$$\begin{aligned}
{}^{t_{lm}(\zeta)}z_{lm}(\omega,\theta) &= {}^{t_{lm}(\zeta)t_{ml}(\theta)}t_{lm}(\omega)\\
&= {}^{t_{lm}(\zeta)t_{ml}(\theta)}[t_{lp}(1), t_{mp}(\omega)]\\
&= [{}^{t_{lm}(\zeta)t_{ml}(\theta)}t_{lp}(1), {}^{t_{lm}(\zeta)t_{ml}(\theta)}t_{pm}(\omega)]\\
&= [t_{mp}(\theta)t_{lp}(1+\zeta\theta), t_{pl}(-\omega\theta)t_{pm}(\omega(1+\theta\zeta))].
\end{aligned}$$

□

В этом месте Васерштейн и Суслин [40] говорят: “очевидно, что этот коммутатор можно выразить как произведение множителей требуемого вида”. Для удобства читателя воспроизведем это очевидное вычисление, которое часто используется и в других ситуациях.

Лемма 15. *Пусть $\theta, \zeta \in R$, $\xi, \omega \in I$ и l, m, p — три попарно различных индекса. Тогда коммутатор $[t_{mp}(\theta)t_{lp}(\zeta), t_{pl}(\xi)t_{pm}(\omega)]$ можно выразить как произведение трансвекций из $F(n, R, I)$ и множителей вида $z_{pl}(\sigma, \tau)$ и $z_{pm}(\sigma, \tau)$ для некоторых $\sigma \in I$ и $\tau \in R$.*

Доказательство. В самом деле, для любых четырех элементов a, b, c, d группы G имеют место тождества $[ab, c] = {}^a[b, c]\cdot[a, c]$ и $[a, bc] = [a, b]\cdot{}^b[a, c]$. Применяя их к коммутатору $[ab, cd]$, мы получим

$$[ab, cd] = {}^a[b, c]\cdot{}^{ac}[b, d]\cdot[a, c]\cdot{}^c[a, d] = {}^a[b, c]\cdot[a, c]\cdot{}^{ca}[b, d]\cdot{}^c[a, d].$$

Применяя теперь получившееся тождество к коммутатору в условии леммы, мы выразим его как произведение следующих четырех множителей

$$\begin{aligned}
{}^{t_{mp}(\theta)}[t_{lp}(\zeta), t_{pl}(\xi)] &= {}^{t_{mp}(\theta)}z_{pl}(\xi,\zeta)^{t_{mp}(\theta)}t_{pl}(\omega\theta),\\
{}^{t_{mp}(\theta)t_{pl}(\xi)}t_{lm}(\zeta\omega) &= {}^{t_{mp}(\theta)}\big(t_{lm}(\zeta\omega)t_{pm}(\xi\zeta\omega)\big)\\
&= {}^{t_{mp}(\theta)}t_{lm}(\zeta\omega)z_{pm}(\xi\zeta\omega,\omega),\\
[t_{mp}(\theta), t_{pl}(\xi)] &= t_{ml}(-\theta\xi),\\
{}^{t_{pl}(\xi)}[t_{mp}(\theta), t_{pm}(\omega)] &= {}^{t_{pl}(\xi)}z_{pm}(\omega,\theta)t_{pm}(-\omega).
\end{aligned}$$

Так как ξ и ω принадлежат I, все эти выражения являются произведениями трансвекций из $F(n, R, I)$ и множителей требуемого вида. □

Следствие. *Пусть $n \geq 3$. Тогда для каждого идеала $I \trianglelefteq R$ имеет место включение $F(n, R, I) \geq E(n, R, I^2)$.*

Доказательство. Так как $z_{ij}(\xi,\zeta)$ аддитивна по ξ, группа $E(n,R,I^2)$ порождается матрицами вида $z_{ij}(\xi_1\xi_2,\zeta)$, где $\xi_1,\xi_2\in I$, $\zeta\in R$, $1\le i\ne j\le n$. Возьмем индекс $h\ne i,j$. Тогда

$$z_{ij}(\xi_1\xi_2,\zeta)={}^{t_{ji}(\zeta)}[t_{ih}(\xi_1),t_{hj}(\xi_2)]=[t_{ih}(\xi_1)t_{jh}(\zeta\xi_1),t_{hj}(\xi_2)t_{hi}(\xi_2\zeta)].$$

Правая часть принадлежит $F(n,R,I)$ по определению. □

§30. Взаимные коммутанты относительных подгрупп

If you can figure out, how to order a beer,
your language skills are just fine.
Dave Barry

Сделаем несколько очевидных замечаний, относящихся к взаимным коммутантам подгрупп $\mathrm{GL}(n,R,I)$ и $\mathrm{E}(n,R,I)$.

Лемма 16. *Пусть $n\ge 2$. Для любых двух идеалов A и B в R имеет место равенство*

$$E(n,R,A)E(n,R,B)=E(n,R,A+B).$$

Доказательство. Из соотношения $t_{ij}(\alpha+\beta)=t_{ij}(\alpha)t_{ij}(\beta)$, $1\le i\ne j\le n$, $\alpha\in A$, $\beta\in B$, вытекает, что левая часть содержит $E(n,A+B)$. Произведение двух нормальных подгрупп нормально в $E(n,R)$. □

Следующее простое, но важное утверждение является непосредственным следствием коммутационной формулы Шевалле. Условие $n\ge 3$ означает, что всегда можно выбрать индекс h, отличный от двух данных индексов i,j. Именно такого рода соображения объясняют, почему анализ групп большой степени проще, чем анализ групп меньшей степени.

Лемма 17. *Пусть $n\ge 3$. Тогда для любых двух идеалов A и B в R имеет место включение*

$$[E(n,R,A),E(n,R,B)]\ge E(n,R,AB+BA).$$

Доказательство. Пусть $1\le i\ne j\le n$. Возьмем произвольный индекс h, отличный от i,j. Тогда левая часть содержит элементарные трансвекции вида $t_{ij}(\alpha\beta)=[t_{ih}(\alpha),t_{hj}(\beta)]$, $t_{ij}(\beta\alpha)=[t_{ih}(\beta),t_{hj}(\alpha)]$, $\alpha\in A$, $\beta\in B$. Кроме того, будучи взаимным коммутантом двух нормальных подгрупп, левая часть нормальна в абсолютной элементарной подгруппе $E(n,R)$. Таким образом, она содержит $E(n,R,AB)$ и

$E(n,R,BA)$ – и, тем самым, также их произведение, которое равно $E(n,R,AB+BA)$ по предыдущей лемме. □

Следствие 1. *Для любых $n \geq 3$ и $I \trianglelefteq R$ относительная элементарная группа $E(n,R,I)$ является $E(n,R)$-совершенной. Иными словами, имеет место равенство*

$$[E(n,R),E(n,R,I)] = E(n,R,I).$$

Следствие 2. *При $n \geq 3$ абсолютная элементарная группа $E(n,R)$ совершенна,*

$$[E(n,R),E(n,R)] = E(n,R).$$

Как хорошо известно, при $n=2$ это, вообще говоря, неверно даже для поля: группы $\mathrm{SL}(2,2)$ и $\mathrm{SL}(2,3)$ над полями $\mathbb{F}_2$ и $\mathbb{F}_3$ совершенными не являются. Именно с этим связана *часть* специфики случая $n=2$.

Лемма 18. *Пусть $n \geq 2$. Тогда для любых двух идеалов A и B в R имеет место включение*

$$[\mathrm{GL}(n,R,A),\mathrm{GL}(n,R,B)] \leq \mathrm{GL}(n,R,AB+BA).$$

Доказательство. Рассмотрим произвольные матрицы

$$x \in \mathrm{GL}(n,R,A) \quad \text{и} \quad y \in \mathrm{GL}(n,R,B).$$

Тогда $x = e+x_1$, $x^{-1} = e+x_2$ для некоторых $x_1,x_2 \in M(n,A)$ таких, что $x_1+x_2+x_1x_2 = 0$. Точно так же, $y = e+y_1$, $y^{-1} = e+y_2$ для некоторых $y_1,y_2 \in M(n,B)$ таких, что $y_1+y_2+y_1y_2 = 0$. По модулю $AB+BA$ получаем

$$[x,y] = (e+x_1)(e+y_1)(e+x_2)(e+y_2) \equiv e+x_1+x_2+x_1x_2+y_1+y_2+y_1y_2 = e.$$

□

§31. Релятивизация

Майкл Стайн [567] придумал чрезвычайно простой общий трюк, позволяющий сводить многие вопросы об относительных группах к соответствующим вопросам для абсолютных групп. В дальнейшем этот трюк многократно использовали Джон Милнор [75], Андрей Суслин и Вячеслав Копейко [106], Леонид Васерштейн [603], и мы сами [100, 574]. В работах Энтони Бака, первого автора, Виктора Петрова и Рузби Хазрата предложены дальнейшие усовершенствования [159, 90, 153], Определим **дубль** $R \times_I R$ кольца R по отношению к идеалу $I \leq R$ посредством декартова квадрата

$$\begin{array}{ccc} R \times_I R & \xrightarrow{\pi_1} & R \\ {\scriptstyle \pi_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ R & \xrightarrow[\pi]{} & R/I. \end{array}$$

Иными словами, $R \times_I R$ состоит из всех пар $(a, b) \in R \times R$ таких, что $a \equiv b \pmod I$ с покомпонентными операциями и $\pi_1(a, b) = a$, $\pi_2(a, b) = b$. Ясно, что $\operatorname{Ker} \pi_1 = (0, I)$ и $\operatorname{Ker} \pi_2 = (I, 0)$. Диагональное вложение $\delta : R \longrightarrow R \times_I R$, $\delta(a) = (a, a)$ расщепляет как π_1, так и π_2.

Кроме того, для пары (R, I) можно определить полупрямое произведение $R \leftthreetimes I$ кольца R и идеала I как множество пар (a, c), $a \in R$, $c \in I$, с покомпонентным сложением и с умножением $(a, c)(b, d) = (ab, ad + cb + cd)$.

Лемма 19. *Кольцо $R \times_I R$ изоморфно полупрямому произведению $R \leftthreetimes I$ кольца $\delta(R) \cong R$ и идеала $\operatorname{Ker} \pi_1 \cong I$.*

Доказательство. Определим отображение $R \times_I R$ в $R \leftthreetimes I$ посредством $(a, b) \mapsto (a, b - a)$. Из определения умножения в $R \leftthreetimes I$ вытекает, что это гомоморфизм. Обратный гомоморфизм определяется посредством $(a, c) \mapsto (a, a + c)$. $\square$

Функтор GL_n из колец в группы коммутирует с пределами. Таким образом, декартов квадрат колец, определяющий дубль $R \times_I R$, превращается в декартов квадрат групп

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}(n, R \times_I R) & \xrightarrow{\pi_1} & \mathrm{GL}(n, R) \\ {\scriptstyle \pi_2}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \mathrm{GL}(n, R) & \xrightarrow[\pi]{} & \mathrm{GL}(n, R/I). \end{array}$$

Стандартный факт, касающийся таких квадратов, состоит в том, что ядра параллельных стрелок изоморфны. Иными словами,

$$\mathrm{GL}(n, R \times_I R, I) = \mathrm{GL}(n, R, I).$$

Ровно так Стайн и определяет релятивизацию группы GL_n:

$$1 \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R, I) \longrightarrow \mathrm{GL}(n, R \times_I R) \underset{\delta}{\overset{\pi_1}{\rightleftarrows}} \mathrm{GL}(n, R) \longrightarrow 1.$$

Точно так же он определяет и относительные элементарные группы посредством расщепляющейся точной последовательности

$$1 \longrightarrow E(n,R,I) \longrightarrow E(n,R\times_I R) \underset{\delta}{\overset{\pi_1}{\rightleftarrows}} E(n,R) \longrightarrow 1.$$

После этого он доказывает, что получающиеся так группы совпадают с обычными относительными элементарными группами, как мы определили их в предыдущем параграфе. Иными словами,

$$E(n,R\times_I R,I) = E(n,R,I),$$

причем этот канонический изоморфизм встраивается в коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & \longrightarrow & E(n,R\times_I R,I) & \longrightarrow & E(n,R\times_I R) & \underset{\delta}{\overset{\pi_1}{\rightleftarrows}} & E(n,R) & \longrightarrow & 1 \\
 & & \| & & \delta\big\uparrow\big\downarrow\pi_2 & & \big\downarrow\pi & & \\
1 & \longrightarrow & E(n,R,I) & \longrightarrow & E(n,R) & \underset{\pi}{\longrightarrow} & E(n,R/I) & \longrightarrow & 1
\end{array}$$

с точными строками. В этой новой конструкции естественные вложения

$$E(n,R,I) \longrightarrow E(n,R) \quad \text{и} \quad \mathrm{GL}(n,R,I) \longrightarrow \mathrm{GL}(n,R)$$

определяются π_2, но теперь мы оказываемся в гораздо лучшей ситуации. Дело в том, что в отличие от исходных точных последовательностей, приходящих из проекции $R \longrightarrow R/I$, новые точные последовательности *расщепляются*.

Используя этот факт легко показать, что

$$\mathrm{GL}(n,R\times_I R,I) \cap E(n,R\times_I R) = E(n,R\times_I R,I).$$

В частности, это сводит задачу доказательства нормальности относительной элементарной группы к задаче доказательства абсолютной элементарной группы, для некоторого другого кольца.

Теорема Стайна. *Предположим, что абсолютная элементарная группа $E(n,R\times_I R)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n,R\times_I R)$. Тогда относительная элементарная группа $E(n,R,I)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n,R)$.*

Доказательство. Пересечение двух нормальных подгрупп является нормальной подгрупппой. Поэтому $E(n,R\times_I R,I) = E(n,R,I)$ нормальна в $\mathrm{GL}(n,R\times_I R)$. *Тем более* $E(n,R,I)$ нормальна в *меньшей* группе $\mathrm{GL}(n,R)$. $\square$

Глава 9. В пределе

В настоящей главе мы начнем изучать поведение группы $\mathrm{GL}(n,R)$ при росте степени n. Как обнаружил Хайман Басс [162, 163], предельная полная линейная группа $\mathrm{GL}(R) = \varinjlim \mathrm{GL}(n,R)$ устроена значительно проще, чем полные линейные группы $\mathrm{GL}(n,R)$ конечной степени. Для предельной группы многие естественные вопросы допускают над произвольным ассоциативным кольцом R столь же простые ответы, как и над полем.

§32. Предельная полная линейная группа

Через $x_1 \oplus \ldots \oplus x_t$ обозначается **прямая сумма** матриц $x_1,\ldots,x_t$, $x_i \in \mathrm{GL}(n_i,R)$, т. е. блочно диагональная матрица с блоками $x_1,\ldots,x_t$ на главной диагонали и нулями во всех остальных местах. Иногда $x_1 \oplus \ldots \oplus x_t$ называется также **диагональной суммой** $x_1,\ldots,x_t$, и обозначается $\mathrm{diag}(x_1,\ldots,x_t)$. Например,

$$x \oplus y = \mathrm{diag}(x,y) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & y \end{pmatrix}.$$

Если отвлечься от блочной структуры, прямая сумма ассоциативна, $(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$.

Пусть теперь $m > n$. Определим вложение $\phi = \phi_n^m$ полной линейной группы $\mathrm{GL}(n,R)$ степени n в полную линейную группу $\mathrm{GL}(m,R)$ степени m полагая

$$\phi(x) = x \oplus e = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

где e – единичная матрица степени $m-n$. В дальнейшем мы *отождествляем* $\mathrm{GL}(n,R)$ с ее образом $\phi(\mathrm{GL}(n,R)) < \mathrm{GL}(m,R)$ относительно этого вложения.

Ясно, что эти вложения согласованы, иными словами, $\phi_n^l = \phi_m^l \circ \phi_n^m$ для любых $l > m > n$. Индуктивный предел направленной системы $(\mathrm{GL}(n,R), \phi_n^m)$

$$\mathrm{GL}(R) = \varinjlim \mathrm{GL}(n,R) = \bigcup \mathrm{GL}(n,R),$$

совпадает с *объединением* всех групп $\mathrm{GL}(n,R)$, $n \in \mathbb{N}$, по отношению к этим вложениям, и называется **предельной полной линейной группой** = `quite general linear group`.

Простейший способ представлять себе $\mathrm{GL}(R)$ состоит в том, чтобы изображать ее элементы бесконечными матрицами

$$x = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

такими, что $x_{ij} \in R$ для всех $i, j \in \mathbb{N}$ и при этом $x_{ij} \neq \delta_{ij}$ лишь для конечного числа пар (i, j). Такие *формально* бесконечные – но отличающиеся от единичной матрицы лишь в конечном числе позиций! – матрицы называются **финитарными**. Группа $\mathrm{GL}(R)$ состоит из всех *обратимых* финитарных матриц.

Предельная группа $\mathrm{GL}(R)$ является подгруппой группы автоморфизмов $\mathrm{GL}(\aleph_0, R)$ свободного R-модуля $R^{\aleph_0}$ бесконечного ранга, состоящей из тех автоморфизмов, которые отличаются от тождественного автоморфизма лишь на подмодуле конечного ранга, порожденном первыми n базисными элементами для какого-то $n \in \mathbb{N}$.

Ясно, что семейства подгрупп $E(n, R)$ и $\mathrm{GE}(n, R)$ согласованы с вложениями ϕ_n^m, в том смысле, что при вложении каждая из этих подгрупп переходит в подгруппу того же типа, но большей степени. Это означает, что мы можем определить **стабильные элементарные группы** $E(R)$ и $\mathrm{GE}(R)$ посредством

$$E(R) = \varinjlim E(n, R) = \bigcup E(n, R),$$

$$\mathrm{GE}(R) = \varinjlim \mathrm{GE}(n, R) = \bigcup \mathrm{GE}(n, R).$$

Пусть теперь I – идеал в R. Главные конгруэнц-подгруппы $\mathrm{GL}(n, R, I)$ и относительные элементарные группы $E(n, R, I)$ также согласованы с этими вложениями. В частности, можно определить соответствующие предельные группы, а именно, предельную главную конгруэнц-подгруппу уровня I

$$\mathrm{GL}(R, I) = \varinjlim \mathrm{GL}(n, R, I) = \bigcup \mathrm{GL}(n, R, I),$$

и предельную относительную элементарную группу уровня I:

$$E(R, I) = \varinjlim E(n, R, I) = \bigcup E(n, R, I),$$

Группа $E(R) = E(R, R)$ совпадает с определенной выше абсолютной элементарной подгруппой.

В случае, когда кольцо R коммутативно, семейства $\mathrm{SL}(n,R)$ и $\mathrm{SL}(n,R,I)$ также согласованы с этими вложениями, так что можно определить предельную специальную линейную группу

$$\mathrm{SL}(R)=\varinjlim \mathrm{SL}(n,R)=\bigcup \mathrm{SL}(n,R)$$

и предельную специальную главную конгруэнц-подгруппу уровня I

$$\mathrm{SL}(R,I)=\varinjlim \mathrm{SL}(n,R,I)=\bigcup \mathrm{SL}(n,R,I).$$

В то же время образ полной конгруэнц-подгруппы $C(n,R,I)$ относительно ϕ_n^m совершенно не обязан содержаться в $C(m,R,I)$. Таким образом, вообще говоря, невозможно определить предельные полные конгруэнц-подгруппы $C(R,I)$ и $\mathrm{SC}(R,I)$.

§33. Леммы типа Уайтхеда

Напомним, что полную линейную группу $\mathrm{GL}(n,R)$ степени n можно рассматривать как подгруппу в $\mathrm{GL}(n+1,R)$ посредством вложения

$$x\mapsto x\oplus 1=\begin{pmatrix} x & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Это вложение согласовано со многими естественными подгруппами в $\mathrm{GL}(n,R)$, например, $\mathrm{SL}(n,R)\le \mathrm{SL}(n+1,R)$, $E(n,R)\le E(n+1,R)$, и так далее. Итерируя эти вложения, мы получаем вложения $\mathrm{GL}(n,R)\hookrightarrow \mathrm{GL}(m,R)$ для любого $m>n$.

Оказывается, что умножение матриц и образование прямой суммы *совпадают по модулю элементарных матриц*. Это удивительное наблюдение, которое обычно называется **леммой Уайтхеда**, было одной из отправных точек алгебраической K-теории. В действительности, мы обсудим чуть более общие факты, связанные с редукцией к меньшему рангу, которые обычно цитируются как **леммы типа Уайтхеда**.

Пусть $x,y\in R$ таковы, что $1+xy\in R^*$. Следует ли отсюда, что $1+yx\in R^*$? Следующий результат означает, в частности, что это действительно так, причем в гораздо более общем контексте.

Лемма Уайтхеда–Васерштейна. *Пусть матрицы $x\in M(r,s,I)$ и $y\in M(s,r,R)$ таковы, что $e+xy\in \mathrm{GL}(r,R)$. Тогда $e+yx\in \mathrm{GL}(s,R)$ и*

$$\begin{pmatrix} e+xy & 0\\ 0 & (e+yx)^{-1}\end{pmatrix}\in E(r+s,R,I).$$

Доказательство. Первое утверждение следует из равенства

$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ 0 & e+yx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ -y & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -x \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e+xy & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ y & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & x \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

все множители в правой части которого обратимы. Умножая это равенство справа на $(e+xy)^{-1} \oplus e$, мы получим

$$\begin{pmatrix} (e+xy)^{-1} & 0 \\ 0 & e+yx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & 0 \\ -y & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & -x \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ y & e \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} e & 0 \\ y(e+xy)^{-1} - y & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & (e+xy)x \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Произведение первых трех множителей и последний множитель принадлежат $E(r+s, R, I)$ по самому определению этой группы. Но так как $(e+xy)^{-1} = e+z$, где $z \in M(r, I)$, то и четвертый множитель тоже принадлежит $E(r+s, R, I)$. □

Из предыдущей леммы сразу вытекает такой факт.

Лемма Уайтхеда. *Пусть* $a \in \mathrm{GL}(n, R, I)$ *и* $b \in \mathrm{GL}(n, R)$. *Тогда*

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ba^{-1}b^{-1} & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} aba^{-1}b^{-1} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \in E(2n, R, I).$$

Доказательство. Применяя предшествующую лемму вначале к $x = a-e, y = e$, а потом к $x = (a^{-1}-1)b^{-1}, y = b$, мы видим, что первые две матрицы принадлежат $\mathrm{GL}(2n, R, I)$. Третья матрица является их произведением. □

Теперь как следствие мы получаем первоначальную форму леммы Уайтхеда.

Лемма Уайтхеда. *Пусть* $a \in \mathrm{GL}(n, R, I)$ *и* $b \in \mathrm{GL}(n, R)$. *Тогда левые (и правые) смежные классы матриц*

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ab & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} ba & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix}$$

относительно подгруппы $E(2n, R, I)$ *совпадают.*

Сформулируем еще одну форму леммы Уайтхеда.

Лемма Уайтхеда. *Пусть матрицы* $x \in M(n, I)$ *и* $y \in M(n, R)$ *таковы, что* $e + xy \in \mathrm{GL}(n, R)$. *Тогда*

$$\begin{pmatrix} (e+xy)(e+yx)^{-1} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \in E(2n, R, I).$$

Доказательство. В самом деле, в этом случае

$$\begin{pmatrix} e+xy & 0 \\ 0 & (e+yx)^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (e+yx)^{-1} & 0 \\ 0 & e+yx \end{pmatrix} \in E(2n, R, I).$$

□

§34. Некоторые финитарные явления

Сейчас мы обсудим некоторые чисто финитарные явления, у которых в общем случае нет никаких аналогов на уровне GL_n, при фиксированном n.

Рассмотрим не обязательно обратимые финитарные матрицы. Мы продолжаем называть матрицу $x = (x_{ij})_{i,j \in \mathbb{N}}$ над кольцом R финитарной, если $x_{ij} = \delta_{ij}$ для всех пар (i, j), кроме конечного числа. Иными словами, это формально бесконечная матрица вида

$$x = \begin{pmatrix} \tilde{x} & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix},$$

где $\tilde{x} \in M(n, R)$. Наименьшее такое n называется **порядком** матрицы x. Подчеркнем, что мы не предполагаем, что матрица x обратима. Финитарные матрицы из $M(\aleph_0, R)$ отвечают тем *эндоморфизмам* свободного R-модуля $R^{\aleph_0}$ бесконечного ранга, которые совпадают с тождественным эндоморфизмом вне подмодуля *конечного ранга*, порожденного первыми n базисными элементами.

Рассмотрим формально бесконечные матрицы над полиномиальным кольцом $R[x]$. В дальнейшем *степенью* матрицы a называется $\deg(a) = \max \deg(a_{ij})$, где максимум берется по всем матричным элементам a. Так как лишь конечное число a_{ij} отлично от 0 или 1, степень любой формально бесконечной матрицы *конечна*. Следующий результат известен как *линеаризация* или **трюк Хигмана**. Основная идея состоит в том, что увеличив порядок матрицы в два раза, можно понизить ее степень на 1.

Лемма Хигмана. *Пусть a – финитарная матрица над $R[x]$. Тогда найдутся матрицы $b_1, b_2 \in E(R[x], xR[x])$ такие, что*

$$c = b_1 a b_2 = c_0 + c_1 x.$$

где c_0, c_1 – финитарные матрицы над R. Если $a \in \mathrm{GL}(R[x])$, можно взять $b_1 = e$.

Доказательство. Пусть $a \in M(n, R[x])$. Докажем лемму индукцией по $d = \deg(a)$. Если $d \leq 1$, доказывать нечего. Таким образом, можно предполагать, что $d \geq 2$ и заключение леммы выполнено для матриц степени меньше, чем d. Прежде всего, заметим, что матрицу a можно выразить в виде

$$a = a_0 + a_1 x + \ldots + a_d x^d,$$

где $a_i \in M(n, R)$.

Вот, собственно, сам трюк, понижающий степень. Положим

$$f = \begin{pmatrix} e & a_d x^{d-1} \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ -xe & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - a_d x^d & a_d x^{d-1} \\ -xe & e \end{pmatrix}.$$

Матрица $f \in M(2n, R)$ имеет степень $d-1$, и к ней можно применить индцукционное предположение.

Если матрица a обратима, то

$$\begin{pmatrix} e & a_d x^{d-1} \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & a^{-1} a_d x^{d-1} \\ 0 & e \end{pmatrix}.$$

Осталось заметить, что вторая матрица в правой части также принадлежит $E(R[x], xR[x])$. □

Вот еще одна совершенно замечательная имплементация той же идеи, **разложение Шарпа**. Следующее равенство проверяется непосредственным вычислением. Это по существу незначительное упрощение тождества из [551, 552], но с заменой рассматривавшихся там матриц на контраградиентные к ним.

Лемма 20. *Для любых матриц $a, b, c, d \in \mathrm{GL}(n, R)$ имеет место равенство*

$$\begin{pmatrix} abcd & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & -ab \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -c^{-1} \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & 0 \\ cd & e \end{pmatrix}.$$

Следующее разложение – это в точности то, что выживает от разложений Брюа и Гаусса для совершенно произвольных ассоциативных колец. Заметим, что для групп фиксированной конечной степени никаких подобных разложений в общем случае не существует. Аналогом разложений Брюа, Гаусса и Шарпа для группы $\mathrm{GL}(n, R)$ являются параболические факторизации, которые мы обсуждаем в третьей части этого обзора, но они гораздо менее точны и выполняются, только если степень n велика по сравнению с размерностью кольца R.

Разложение Шарпа. *Для любого ассоциативного кольца R имеет место разложение*

$$E(R) = U(R)WU(R)U^-(R).$$

Доказательство. Взяв в предыдущей лемме $a, c \in W_n$ и $b, d \in U(n, R)$ мы видим, что

$$W_nU(n, R)W_nU(n, R) \le U(2n, R)W_{2n}U(2n, R)U^-(2n, R).$$

С другой стороны, ясно, что подмножество $U(n, R)W_nU(n, R)U^-(n, R)$ выдерживает умножение на $U(n, R)$ слева. Осталось вспомнить, что вместе $U(n, R)$ и W_n порождают $E(n, R)$, так что

$$E(n, R) \le U(R)WU(R)U^-(R)$$

для любого n, как и утверждалось. □

Глава 10. Трансвекции

Класс элементарных трансвекций зависит от выбора базиса и не замкнут относительно сопряжения. В настоящей главе мы рассмотрим более широкий класс преобразований, который описывается в геометрических терминах и имеет инвариантный смысл.

§35. Что такое трансвекция?

В традиционной геометрии классических групп над полями [2, 57, 79, 80, 300] **трансвекциями** называются матрицы, сопряженные с элементарными трансвекциями – с точки зрения теории алгебраических групп это в точности **корневые элементы** группы $\mathrm{SL}(n, K)$.

Каждая такая трансвекция имеет вид

$$gt_{ij}(\xi)g^{-1} = g(e + \xi e_{ij})g^{-1} = e + g_{*i}\xi g'_{j*},$$

для некоторой элементарной трансвекции $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$, $\xi \in R$, $1 \le i \ne j \le n$, и некоторой матрицы $g \in \mathrm{GL}(n, R)$.

Положив $u = g_{*i}$ и $v = g'_{j*}$, можно переписать это выражение в виде

$$x_{uv}(\xi) = e + u\xi v, \quad u \in R^n, \quad \xi \in R, \quad v \in {}^nR,$$

причем так как $i \neq j$, то $vu = 0$.

В случае, когда $R = K$ – поле, верно и обратное, т. е. для любого *унимодулярного* столбца u высоты n и любой *унимодулярной* строки v длины n таких, что $vu = 0$ найдется такая обратимая матрица g, что u является 1-м столбцом матрицы g, а v – 2-й строкой обратной матрицы g^{-1}; так что любая матрица вида $e+u\xi v$ сопряжена с $t_{12}(\xi)$.

Кроме того, в случае поля трансвекции допускают следующую простую геометрическую характеризацию – это в точности матрицы x, для которых вычет и определитель равны 1, т. е. $\operatorname{res}(x)=1$ и $\det(x)=1$. Напомним, см. например, [300], что **вычетом** матрицы x называется ранг матрицы $x-e$. Те матрицы x, вычет которых равен 1, часто называются **одномерными преобразованиями**. Таким образом, трансвекции – это одномерные преобразования с определителем 1.

Нет сомнения, что трансвекции являются наиболее важными индивидуальными элементами линейных групп над полем. Во-первых, это самые простые элементы: самый маленький вычет, самая маленькая орбита, самый большой централизатор. Геометрически это преобразования, поэлементно сохраняющие некоторую гиперплоскость в пространстве V, классически называемую **осью** x, и сдвигающие любой вектор вне этой гиперплоскости на вектор из некоторой прямой, классически называемой **центром** x, лежащей на неподвижной гиперплоскости. Большая часть традиционных доказательств в геометрии классических групп над полями и телами основана на изучении и характеризации трансвекций и их образов под действием гомоморфизмов, см., в частности, [2, 57, 79, 80].

При переходе от полей к кольцам приведенные выше определения перестают быть эквивалентными. Элементы, сопряженные с элементарными трансвекциями, по-прежнему называются корневыми элементами группы $\mathrm{GL}(n, R)$. Однако, простейшие примеры показывают, что в общем случае класс корневых элементов слишком узок, чтобы быть полезным при доказательстве структурных теорем.

Таким образом, чтобы определить правильный аналог трансвекций для колец, нужно исходить из их характеризации в терминах вычета и определителя.

§36. Ранг матрицы

В случае поля (a parte: и, более общо, колец Безу) все определения ранга совпадают. Однако это совершенно не так в случае колец – даже для нетеровых областей целостности обычные определения ранга перестают быть эквивалентными.

• Напомним, что **ранг по минорам** матрицы y, обозначаемый $\mathrm{mrk}(y)$ – это наибольший порядок ненулевого минора матрицы y. В случае кольца понятие ранга по минорам абсолютно бесполезно – в случае поля это обстоятельство слегка затушевывается его совпадением с другими понятиями ранга.

• Вне всякого сомнения, наиболее важным и естественным понятием ранга матрицы является **тензорный ранг** $\mathrm{rk}(y)$, определяемый как наименьшее d такое, что матрица y может быть представлена в виде $y = u_1v_1 + \ldots + u_dv_d$ для подходящих столбцов $u_1, \ldots, u_d \in R^n$ и строк $v_1, \ldots, v_d \in {}^nR$. Тензорный ранг иногда называется также **внутренним рангом**, **скелетным рангом** или **мультипликативной сложностью** матрицы y.

• Наконец, можно дать *несколько* различных определений **ранга по строкам** $\mathrm{rrk}(y)$ и **ранга по столбцам** $\mathrm{crk}(y)$, вообще говоря, неэквивалентных. *Обычно* – но не всегда! – рангом по столбцам матрицы y называется ранг подмодуля, порожденного ее столбцами, в случае, когда этот модуль свободен. Аналогично для ранга по строкам.

Даже для коммутативного основного кольца ранги по строкам и столбцам ведут себя намного сложнее, чем тензорный ранг, и их вычисление может представлять большие сложности. Стоит сразу подчеркнуть несколько принципиальных трудностей, связанных с использованием этих понятий.

• В общем случае ранги по строкам и столбцам совершенно не обязаны существовать.

• Из того, что существует один из этих рангов, совершенно не следует, что существует и второй.

Теорема 12. *Если основное кольцо R коммутативно, а ранги матрицы x по строкам и столбцам оба определены, то они равны между собой.*

Общее значение ранга матрицы по строкам и столбцам называется ее **внешним рангом**,

$$\mathrm{ork}(y) = \mathrm{crk}(y) = \mathrm{rrk}(y).$$

• Однако, в случае *некоммутативного* основного кольца даже если ранги по строкам и столбцам оба существуют, они НИКАК НЕ СВЯЗАНЫ МЕЖДУ СОБОЙ.

Дело в том, что ранг по столбцам матрицы x связан вовсе не с рангом подмодуля, порожденного строками матрицы x, а с рангом его *линейного замыкания*. Точно так же ранг этой матрицы по строкам связан вовсе не с рангом подмодуля, порожденного столбцами этой матрицы, а с рангом его *линейного замыкания*. Легко привести примеры, показывающие, что в общем случае нет *никакой* связи между рангом подмодуля и рангом его линейного замыкания: ранг замыкания может быть как больше, так и меньше ранга самого подмодуля.

В следующих примерах мы предполагаем, что кольцо R является некоммутативным кольцом без делителей нуля, в котором существуют линейно независимые элементы x и y. В качестве примера такого кольца можно взять, скажем, кольцо $R = K\langle x, y\rangle$ многочленов от двух некоммутирующих переменных x и y над полем K. По самому определению некоммутирующие переменные x и y линейно независимы как справа, так и слева. Следующие простые примеры показывают, что ДЕЙСТВИТЕЛЬНОСТЬ ПРЕВОСХОДИТ ВСЕ НАШИ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ О НЕЙ.

• Если x, y линейно независимые справа элементы R, то столбцы

$$(x, 0, \dots, 0)^t, \quad (y, 0, \dots, 0)^t$$

порождают в R^n свободный подмодуль ранга 2, линейное замыкание которого равно $(R, 0, \dots, 0)^t$ и имеет ранг 1.

• С другой стороны, если x, y линейно независимы слева, то ни один ненулевой линейный функционал не обращается в 0 на столбце $(x, y)^t$. Это значит, что хотя сам подмодуль в R^2, порожденный $(x, y)^t$, имеет ранг 1, его линейное замыкание совпадает с R^2 и, тем самым, имеет ранг 2.

В общем случае для *коммутативных* колец имеют место очевидные неравенства

$$\mathrm{mrk}(y) \le \mathrm{rk}(y) \le \mathrm{ork}(y),$$

первое из которых называется теоремой о базисном миноре. Однако, как мы сейчас увидим, даже для области целостности все эти неравенства могут быть строгими.

• Приведем простой пример, принадлежащий Полю Кону [67]. Пусть K – поле и $R = K[a, b, c, d]/(ad - bc)$. Тогда R является областью целостности, причем определитель матрицы $x = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ равен 0, в то время как ее тензорный ранг равен 2 – но при этом матрица x является делителем 0.

• В действительности, как показал Дмитрий Григорьев [56], даже в классе нетеровых колец совпадение ранга по минорам с тензорным рангом есть редчайшее явление. В частности, в [56] доказана гипотеза Андрея Суслина, утверждающая, что для нетеровых областей целостности это совпадение имеет место в том и только том случае, когда

◦ глобальная размерность $\mathrm{gl}\,.\dim(R)$ не превосходит 2,

◦ конечно порожденные проективные модули над R свободны.

Например, совпадение ранга по минорам с тензорным рангом имеет место для кольца $R = K[x_1, x_2]$ многочленов от двух переменных, но не для кольца $R = K[x_1, x_2, x_3]$ многочленов от трех переменных!

Также и совпадение тензорного ранга с внешним представляет собой *очень* ограничительное условие арифметического характера на кольцо R. Дело в том, что $\mathrm{rk}(x)$ равен наименьшему числу r такому, что модуль столбцов матрицы x содержится в подмодуле, порожденном *какими-то* r столбцами или, ЧТО ТО ЖЕ САМОЕ, модуль строк матрицы x содержится в подмодуле, порожденном *какими-то* r строками. Таким образом, из классификации подмодулей свободных модулей над кольцом главных идеалов вытекает следующий факт.

Теорема 13. *Если R – кольцо главных идеалов, то для любой матрицы x ее внешний ранг равен ее тензорному рангу.*

Вообще, если для любой матрицы y над областью целостности R имеет место равенство $\mathrm{rk}(y) = \mathrm{ork}(y)$, то для любых $a, b_1, b_2 \in R$ из того, что $a|b_1b_2$ вытекает, что $a = a_1a_2$, где $a_1|b_1$ и $a_2|b_2$, см. [67]. *Целозамкнутые* области целостности, удовлетворяющие этому условию, называются **кольцами Шрайера**.

Резюмируя эту дискуссию, можно заключить, что *единственным* определением ранга, осмысленным и полезным в общем случае, является *тензорный* ранг. В дальнейшем именно он будет называться **рангом** матрицы.

§37. Трансвекции

В соответствии с только что сказанным, мы определим **трансвекцию** в $G = \mathrm{GL}(n, R)$ как матрицу x такую, что *тензорный* ранг $x - e$ равен 1 и, кроме того, $\det(x) = 1$. Таким образом, по определению x имеет вид $x = x_{uv} = e + uv$ для столбца $u \in R^n$ и строки $v \in {}^nR$, причем так как $\det(e + uv) = 1 + \mathrm{tr}(uv)$, то $vu = 0$.

Часто удобно вводить в обозначение трансвекции дополнительный скалярный параметр $\xi \in R$ полагая

$$x_{uv}(\xi) = x_{u\xi,v} = x_{u,\xi v}.$$

При этом множество X_{uv} всех трансвекций вида $x_{uv}(\xi)$, где $\xi \in R$, образует подгруппу в $\mathrm{GL}(n, R)$, являющуюся гомоморфным образом R^+, т. е.

$$x_{uv}(\xi + \zeta) = x_{uv}(\xi)x_{uv}(\zeta).$$

Напомним основные соотношения между трансвекциями.

• Очевидно, элементарные трансвекции – и, более общо, столбцовые $x_r(u)$ и строчные $y_r(v)$ трансвекции – являются трансвекциями в этом понимании.

Напомним, что для $u \in R^n$ и $v \in {}^nR$ через $x_r(u)$ и $y_r(u)$ обозначаются матрицы

$$x_r(u) = \prod_{i \neq r} t_{ir}(u_i), \quad y_r(v) = \prod_{j \neq r} t_{rj}(v_j),$$

отличающиеся от единичной матрицы только во внедиагональных элементах r-го столбца или r-й строки, соответственно, а внедиагональные элементы их r-го столбца $x_r(u)$ и r-й строки $y_r(v)$ равны соответствующим элементам столбца u или строки v, соответственно. Легко видеть, что, если $u_r = 0$, то $x_r(u) = x_{u,f_r}$, а если $v_r = 0$, то $y_r(v) = x_{e_r,v}$, в частности,

$$t_{ij}(\xi) = x_{e_i,\xi f_j}.$$

• Класс трансвекций замкнут относительно сопряжения: для любой трансвекции x_{uv} и любого $g \in G$ имеет место равенство

$$gx_{uv}g^{-1} = x_{gu,vg^{-1}}.$$

• **Формула сложения**, утверждающая аддитивность трансвекции по обоим аргументам, в случае когда все множители определены. Например, аддитивность по второму аргументу означает, что

$$x_{u,v+w} = x_{uv}x_{uw},$$

каждый раз как $u \in R^n$, $v, w \in {}^nR$, таковы, что $vu = wu = 0$.

• **Формула коммутирования**

$$[x_{uv}, x_{xy}] = x_{uy}(vx),$$

где $u, x \in R^n$, $v, y \in {}^nR$, причем $vu = yx = yu = 0$. Подгруппа в $\mathrm{GL}(n, R)$, порожденная всеми трансвекциями, обозначается через $T(n, R)$ и называется **подгруппой Эйхлера**. По определению

$$E(n, R) \le T(n, R) \trianglelefteq \mathrm{SL}(n, R).$$

Проблема 2. *Найти условия, при которых каждая трансвекция является элементарной матрицей, иными словами, имеет место равенство $T(n, R) = E(n, R)$.*

Отметим, что из леммы Уайтхеда–Васерштейна вытекает, что каждая трансвекция степени n, рассматриваемая как матрица степени $n+1$, элементарна, т.е. $T(n, R) \le E(n+1, R)$. В действительности из этой леммы вытекает даже более точное утверждение.

Лемма 21. *Пусть I – идеал кольца R, $\xi \in I$. Далее, пусть $u \in R^n$ и $v \in {}^nR$ – столбец и строка такие, что $vu = 0$, причем в u или v есть хотя бы одна нулевая компонента. Тогда трансвекция $e + u\xi v$ принадлежит $\mathrm{E}(n, R, I)$.*

Доказательство. Пусть, например, $v_j = 0$ для некоторого j. Представляя u в виде $u = u_je_j + (u - u_je_j)$, а затем используя аддитивность и коммутационное соотношение, мы получим

$$\begin{aligned} e + u\xi v &= (e + u_je_j\xi v)(e + (u - u_je_j)\xi v) = \\ &= (e + u_je_j\xi v)[e + (u - u_je_j)f_j, e + e_j\xi v]. \end{aligned}$$

Но ведь $e+u_je_j\xi v$ и $e+e_j\xi v$ принадлежат $E(n, R, I)$, в то время как $e+(u-u_je_j)f_j \in E(n, R)$. По определению подгруппа $E(n, R, I)$ нормальна в $E(n,R)$ и, таким образом, $e+u\xi v \in E(n,R,I)$. В случае, когда $u_i = 0$ для некоторого i, доказательство аналогично. □

Таким образом, для выполнения включения $T(n,R) \le E(n,R)$, достаточно, чтобы $E(n+1,R) \cap \mathrm{SL}(n,R) = E(n,R)$, иными словами, чтобы естественное отображение $\mathrm{SK}_1(n,R) \longrightarrow \mathrm{SK}_1(n+1,R)$, было инъективным.

В этой связи Рави Рао сформулировал следующий вопрос.

Проблема 3. *Верно ли, что для коммутативного кольца всякая трансвекция степени n является элементарной матрицей той же степени?*

Мы уверены, что ответ на этот вопрос отрицателен и, таким образом, его можно сформулировать так: для любого n привести примеры нетеровых коммутативных колец, для которых не всякая трансвекция степени n является элементарной матрицей той же степени.

В связи с этим некоторые авторы пользуются чуть более ограничительными определениями трансвекций, при которых каждая трансвекция автоматически будет элементарной матрицей *той же* степени. Наиболее употребительны следующие варианты определения, см. Winnie-the-Pooh comments в [620]:

- как столбец u, так и строка v предполагаются унимодулярными;
- столбец u **или** строка v предполагаются унимодулярными.

Например, в доказательстве теоремы Суслина фактически проверяется не просто нормальность группы $E(n,R)$ в $\mathrm{GL}(n,R)$, а именно то, что любая трансвекция $e+uv$ такая, что столбец u унимодулярен, при $n \ge 3$ является элементарной матрицей. В некоторых статьях, например, в [349], трансвекция определяется как матрица вида $e+uv$, где $vu = 0$, а столбец u унимодулярен. Это определение обладает тем недостатком, что в нем утрачивается симметрия между строкой и столбцом.

Любопытный способ восстановить эту симметрию предложен в [106], где предполагается, что строка (u^t, v), составленная из компонент столбца u и строки v, унимодулярна.

Пусть теперь π – какое-то рациональное представление группы $\mathrm{SL}(n,R)$. Уже в случае поля $R = K$ группа K-точек $\pi(\mathrm{SL}_n)$, рассматриваемая как алгебраическая группа, может быть строго больше, чем $\pi(\mathrm{SL}(n,R))$ (“несюръективность на точках”). Мы можем рассмотреть образы трансвекций под действием π. Получившиеся матрицы продолжают оставаться **квадратичными унипотентами**, т.е. имеют вид $e + x$, где $x^2 = 0$, но могут иметь довольно большой вычет. Например, если π есть m-векторное представление $\mathrm{SL}(n, R)$, то вычет матрицы $\pi(t_{12}(1))$ равен C_{n-2}^{m-1} (т.е. второму индексу представления π). Как мы убедились выше, класс корневых элементов, сопряженных в $\pi(\mathrm{SL}_n)(R)$ с образами элементарных трансвекций, слишком мал, а класс элементов, заданных теми же уравнениями, что корневые элементы, слишком велик.

Проблема 4. *Как соотносятся между собой разные группы, порожденные трансвекциями?*

Мы вернемся к обсуждению этой задачи в следующей части настоящего обзора, посвященной основным структурным теоремам.

Заметим, что приводимая ниже библиография включает не только те работы, которые непосредственно цитируются в этой вводной части, но также и те, которые обсуждаются в трех следующих частях, которые будут посвящены основным структурным теоремам, младшей K-теории и вопросам порождения, соответственно.

Авторы искренне благодарны Александру генералову, который чрезвычайно внимательно прочитал рукопись и предложил огромное количество исправлений и улучшений.

Литература

1. Э. Абе, *Автоморфизмы групп Шевалле над коммутативными кольцами.* — Алгебра и анализ **5**, No. 2 (1993), 74–90.
2. Э. Артин, *Геометрическая алгебра.* Наука, М. (1969).
3. А. С. Аткарская, *Автоморфизмы группы* $\mathrm{GL}_n(R)$, $n \geq 4$, *над ассоциативным градуированным кольцом.* — Курсовая работа. МГУ (2009), 1–24.
4. В. Г. Бардаков, *О разложении автоморфизмов свободных модулей на простые множители.* — Изв. РАН, сер. Мат. **59**, No. 2 (1995), 109–128.
5. Х. Басс, *Алгебраическая* K*-теория.* Мир, М. (1973).
6. Х. Басс, Дж. Милнор, Ж.-П. Серр, *Решение конгруэнц-проблемы для* SL_n $(n \geq 3)$ *и* Sp_{2n} $(n \geq 2)$. — Математика. Период. сб. перев. ин. статей **14**, No. 6 (1970), 64–128; **15**, No. 1 (1971), 44–60.
7. В. М. Бондаренко, *О подобии матриц над кольцами вычетов.* — Математический Сборник, Наукова Думка, Киев (1976), 275–277.
8. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп, содержащих группу клеточно диагональных матриц, в полной линейной группе над кольцом.* — Математика. Изв. ВУЗ'ов, No. 11 (1982), 12–16.

9. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Об определении сетевой подгруппы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **132** (1983), 26–33.
10. З. И. Боревич, Н. А. Вавилов, *Расположение подгрупп в полной линейной группе над коммутативным кольцом.* — Тр. Мат. ин-та АН СССР **165** (1984), 24–42.
11. О. В. Брюханов, *Генетика универсальных групп Шевалле над некоторыми коммутативными кольцами.* — Мат. Заметки **57**, No. 6 (1995), 814–826.
12. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли.* Гл. IV–VI. Мир, М. (1972).
13. Н. А. Вавилов, *Строение расщепимых классических групп над коммутативным кольцом.* — Докл. АН СССР **299**, No. 6 (1988), 1300–1303.
14. Н. А. Вавилов, *Вычисления в исключительных группах.* — Вестник Самарского ун-та, Естественнонаучная сер., No. 7 (2007), 11–24.
15. Н. А. Вавилов, *Не совсем наивная линейная алгебра.* II. Алгебра матриц. ОЦЭиМ, СПб. (2007), pp. 1–223.
16. Н. А. Вавилов, *Строение изотропных редуктивных групп.* — Тр. Ин-та Математики НАН Беларуси **18**, No. 1 (2010), 1–13.
17. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* E_6 *и* E_7. — Алгебра и Анализ **16**, No. 4 (2004), 54–87.
18. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, С. И. Николенко, *Строение групп Шевалле: доказательство из Книги.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 36–76.
19. Н. А. Вавилов, В. Г. Казакевич, *Еще одна вариация на тему разложения трансвекций.* — Вестн. СПбГУ сер. 1, No. 3 (2008), 71–74.
20. Н. А. Вавилов, В. Г. Казакевич, *Разложение трансвекций для автоморфизмов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 47–62.
21. Н. А. Вавилов, В. Г. Казакевич, *Еще несколько вариаций на тему разложения трансвекций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 32–47.
22. Н. А. Вавилов, А. Ю. Лузгарев, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типа* E_8. — 2011.
23. Н. А. Вавилов, С. И. Николенко, A_2*-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типа* F_4. — Алгебра и Анализ **20**, No. 4 (2008), 27–63.
24. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l, R)$. — Алгебра и Анализ **15**, No. 3 (2003), 72–114.
25. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов, *Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами.* — Докл. АН СССР **40**, No. 1 (1990), 145–147.
26. Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *Разложения типа Денниса–Васерштейна.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 48–60.
27. Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *Параболические факторизации расщепимых классических групп.* — Алгебра и Анализ **23**, No. 4 (2011), 1–30.
28. Н. А. Вавилов, А. К. Ставрова, *Основные редукции в задаче описания нормальных подгрупп.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 30–52.
29. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *О подгруппах полной линейной группы над кольцом, удовлетворяющим условиям стабильности.* — Изв. ВУЗ'ов, No. 10 (1989), 19–25.

30. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Стандартная коммутационная формула.* — Вестн. СПбГУ, сер. 1, No. 1 (2008), 9–14.
31. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Надгруппы полупростых групп.* — Вестн. Самарского ун-та, Естественнонаучная сер., No. 3 (2008), 51–95.
32. Н. А. Вавилов, А. В. Степанов, *Еще раз о стандартной коммутационной формуле.* — Вестн. СПбГУ, сер. 1, No. 1 (2010), 16–22.
33. Л. Н. Васерштейн, K_1*-теория и конгруэнцпроблема.* — Мат. Заметки **5**, No. 2 (1969), 233–244.
34. Л. Н. Васерштейн, *О стабилизации общей линейной группы над кольцом.* — Мат. Сб. **79**, No. 3 (1969), 405–424.
35. Л. Н. Васерштейн, *Стабилизация унитарных и ортогональных групп над кольцами с инволюцией.* — Мат. Сб. **81**, No. 3 (1970), 328–251.
36. Л. Н. Васерштейн, *Стабильный ранг колец и размерность топологических пространств.* — Функц. Анализ **5**, No. 2 (1971), 102–110.
37. Л. Н. Васерштейн, *О группе* SL_2 *над дедекиндовыми кольцами арифметического типа.* — Мат. Сб. **89**, No. 2 (1972), 313–322.
38. Л. Н. Васерштейн, *Стабилизация классических групп над кольцами.* — Мат. Сб. **93**, No. 2 (1974), 268–295.
39. Л. Н. Васерштейн, А. В. Михалев, *О нормальных подгруппах ортогональных групп над кольцом с инволюцией.* — Алгебра и Логика **9**, No. 6 (1970), 629–632.
40. Л. Н. Васерштейн, А. А. Суслин, *Проблема Серра о проективных модулях над кольцами многочленов и алгебраическая* K*-теория.* — Изв. АН СССР, сер. матем. **40**, No. 5 (1976), 993–1054.
41. В. Н. Герасимов, *Группа единиц свободного произведения колец.* — Мат. Сб. **134**, No. 1 (1987), 42–65.
42. И. З. Голубчик, *О полной линейной группе над ассоциативным кольцом.* — Успехи мат. наук **28**, No. 3 (1973), 179–180.
43. И. З. Голубчик, *О нормальных делителях ортогональной группы над ассоциативным кольцом с инволюцией.* — Успехи Мат. наук **30**, No. 6 (1975), 165.
44. И. З. Голубчик, *Нормальные подгруппы линейных и унитарных групп над кольцами.* Канд. дисс., МГУ (1981), 1–117.
45. И. З. Голубчик, *О нормальных делителях линейных и унитарных групп над ассоциативным кольцом.* — Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей, Уфа (1985), 122–142.
46. И. З. Голубчик, *Изоморфизмы проективных групп над ассоциативными кольцами.* — Фундам. прикл. Мат. **1**, No. 1 (1995), 311–314.
47. И. З. Голубчик, *О полной линейной группе над слабо нетеровыми ассоциативными кольцами.* — Фундам. и прикладн. мат. **1**, No. 3 (1995), 661–668.
48. И. З. Голубчик, *Группы типа Ли над* PI*-кольцами.* — Фунд. и прикладн. мат. **3**, No. 2 (1997), 399–424.
49. И. З. Голубчик, *Линейные группы над ассоциативными кольцами.* Докт. дисс., Уфа (1997).
50. И. З. Голубчик, *Изоморфизм группы* $\mathrm{GL}_2(R)$ *над ассоциативным кольцом* R. — Ученые Зап. Сб. научн. трудов, Изд-во Башк. ГПУ, Уфа (2003), 21–34.

51. И. З. Голубчик, А. В. Михалев, *Эпиморфизмы проективных групп над ассоциативными кольцами.* — В кн.: Алгебра, МГУ (1982), 34–45.
52. И. З. Голубчик, А. В. Михалев, *Обобщенные групповые тождества в классических группах.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **114** (1982), 96–119.
53. И. З. Голубчик, А. В. Михалев, *Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом.* — Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, No. 3 (1983), 61–72.
54. И. З. Голубчик, А. В. Михалев, *Изоморфизмы унитарных групп над ассоциативными кольцами.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **132** (1983), 97–109.
55. И. З. Голубчик, А. В. Михалев, *О группе элементарных матриц над* PI-*кольцами.* — В кн.: Исследования по алгебре, Тбилиси (1985), 20–24.
56. Д. Ю. Григорьев, *О соотношении ранга и мультипликативной сложности билинейной формы над коммутативным нетеровым кольцом.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **86** (1979), 66–81.
57. Ж. Дьедонне, *Геометрия классических групп.* Мир, М. (1974).
58. К. Х. Закирьянов, *Критерий вхождения в подгруппу, порожденную двумерными элементарными матрицами.* — Алгебра и Логика **22**, No. 5 (1983), 489–503.
59. К. Х. Закирьянов, *Конечность ширины симплектических групп над кольцами алгебраических чисел относительно элементарных матриц.* — Алгебра и Логика **24**, No. 6 (1985), 667–673.
60. К. Х. Закирьянов, *Об одном свойстве для колец многочленов над дискретно нормированным кольцом.* — Изв. ВУЗ'ов, No. 2 (1992), 74–90.
61. А. Е. Залесский, *Линейные группы.* — Итоги науки. Фундаментальные направления, М. ВИНИТИ No. 37 (1989), 114–228.
62. Е. И. Зельманов, *Изоморфизмы полных линейных групп над ассоциативными кольцами.* — Сиб. Мат. Журн. **26**, No. 4 (1985), 49–67.
63. А. С. Исмагилова, *Гомоморфизм группы* $\mathrm{GL}_2(R)$. — Фундам. прикл. Мат. **11**, No. 3 (2005), 95–108.
64. А. С. Исмагилова, *Изоморфизмы унитарных групп над кольцами.* — Фундам. прикл. Мат. **12**, No. 2 (2006), 55–70.
65. И. С. Клейн, А. В. Михалев, *Ортогональная группа Стейнберга над кольцом с инволюцией.* — Алгебра и Логика **9**, No. 2 (1970), 145–166.
66. И. С. Клейн, А. В. Михалев, *Унитарная группа Стейнберга над кольцом с инволюцией.* — Алгебра и Логика **9**, No. 5 (1970), 510–519.
67. П. Кон, *Свободные кольца и их связи.* Мир, М. (1975).
68. В. И. Копейко, *Стабилизация симплектических групп над кольцом многочленов.* — Мат. Сб. **106**, No. 1 (1978), 94–107.
69. В. И. Копейко, *Об одной теореме Суслина.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **132** (1983), 119–121.
70. В. И. Копейко, *О структуре симплектической группы колец многочленов над регулярными кольцами размерности* ≤ 1. — Успехи мат. наук **47**, No. 4 (1992), 193–194.
71. В. И. Копейко, *О структуре симплектической группы колец многочленов над регулярным кольцом.* — Фунд. и прикладн. мат. **1**, No. 2 (1995), 545–548.

72. В. И. Копейко, *О структуре специальной линейной группы над кольцом лорановских многочленов.* — Фунд. и прикладн. мат. **1**, No. 4 (1995), 1111–1114.
73. В. И. Копейко, *Симплектические группы над кольцами лорановских многочленов и диаграммы склейки.* — Фунд. и прикладн. мат. **5**, No. 3 (1999), 943–945.
74. А. Ю. Лузгарев, А. К. Ставрова, *Совершенность элементарной подгруппы изотропной редуктивной группы.* — Алгебра и Анализ **23**, No. 5 (2011), 140–154.
75. Дж. Милнор, *Введение в алгебраическую K-теорию.* Мир, М. (1974).
76. С. В. Нагорный, *Комплексные представления полной линейной группы степени три по модулю степени простого числа.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **75** (1978), 143–150.
77. Ю. П. Нестеренко, А. А. Суслин, *Гомологии полной линейной группы над локальным кольцом и K-теория Милнора.* — Изв. АН СССР, Сер. Матем. **53**, No. 1 (1989), 121–146.
78. Г. А. Носков, *Порождающие элементы и определяющие соотношения симплектических групп над некоторыми кольцами.* — Мат. Заметки **26**, No. 3 (1974), 237–246.
79. О. Т. О'Мира, *Лекции о линейных группах.* — В кн.: Автоморфизмы классических групп. Мир, М. (1976), 57–166.
80. О. Т. О'Мира, *Лекции о симплектических группах.* Мир, М. (1979).
81. О. Т. О'Мира, *Общая теория изоморфизмов линейных групп.* Изоморфизмы классических групп над целостными кольцами. Мир, М. (1980), 58–119.
82. И. А. Панин, *О стабилизации для ортогональной и симплектической алгебраических K-теорий.* — Алгебра и анализ **1**, No. 1 (1989), 172–195.
83. А. А. Пащевский, *Группы автоморфизмов сетевых подгрупп линейных групп.* Канд. дисс. Ленингр. Гос. Ун-т (1984), 1–100.
84. В. М. Петечук, *Автоморфизмы SL_n и GL_n над некоторыми локальными кольцами.* — Мат. Заметки **28**, No. 2 (1980), 187–204.
85. В. М. Петечук, *Автоморфизмы $\mathrm{SL}_3(R)$, $\mathrm{GL}_3(R)$.* — Мат. Заметки **31**, No. 5 (1982), 657–668.
86. В. М. Петечук, *Автоморфизмы матричных групп над коммутативными кольцами.* — Мат. Сб. **45** (1983), 527–542.
87. В. М. Петечук, *Гомоморфизмы линейных групп над коммутативными кольцами.* — Мат. Заметки **46**, No. 5 (1989), 50–61.
88. В. М. Петечук, *Стабільна будова лінійных груп над кільцями.* — Доповіді НАН Україны, No. 11 (2001), 17–22.
89. В. М. Петечук, *Стабильность колец.* — Наук. Вісник Ужгород. ун-ту **19** (2009), 87–111.
90. В. А. Петров, *Нечетные унитарные группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **305** (2003), 195–225.
91. В. А. Петров, *Надгруппы классических групп.* Канд. дисс., СПб. Гос. Ун-т (2005), 1–129.
92. В. А. Петров, А. К. Ставрова, *Элементарные подгруппы изотропных редуктивных групп.* — Алгебра и Анализ **20**, No. 4 (2008), 160–188.

93. Ж.-П. Серр, *Проблема конгруэнц-подгрупп для* SL_2. — Математика. Период. сб. перев. ин. статей **15**, No. 6 (1971), 12–45.
94. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М. (1975).
95. А. В. Степанов, *Идеальный стабильный ранг колец.* — Вестн. ЛГУ, No. 3 (1986), 46–51.
96. А. В. Степанов, *Стабильный ранг и стабильность произвольных строк.* — Успехи мат. наук **48**, No. 2 (1987), 243–244.
97. А. В. Степанов, *Условия стабильности в теории линейных групп над кольцами.* Канд. дисс. ЛГУ (1987), 1–112.
98. А. В. Степанов, *Кольцо конечного стабильного ранга не обязательно конечно по Дедекинду.* — Докл. АН СССР **36**, No. 2 (1988), 301–304.
99. А. В. Степанов, *Описание подгрупп полной линейной группы над кольцом при помощи условий стабильности.* — Кольца и линейные группы, Краснодар (1988), 82–91.
100. А. В. Степанов, *О нормальном строении полной линейной группы над кольцом.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **236** (1997), 166–182.
101. А. А. Суслин, *Об одной теореме Кона.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 127–130.
102. А. А. Суслин, *О стабильно свободных модулях.* — Мат. Сб. **102**, No. 4 (1977), 479–491.
103. А. А. Суслин, *О структуре специальной линейной группы над кольцом многочленов.* — Изв. АН СССР, Сер. Мат. **41**, No. 2 (1977), 235–253.
104. А. А. Суслин, *Законы взаимности и стабильный ранг кольца многочленов.* — Изв. АН СССР, Сер. Матем. **43**, No. 6 (1979), 1394–1425.
105. А. А. Суслин, *Гомологии* GL_n*, характеристические классы и* K*-теория Милнора.* — Тр. Матем. Ин-та АН СССР **165** (1984), 188–204.
106. А. А. Суслин, В. И. Копейко, *Квадратичные модули и ортогональные группы над кольцами многочленов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **71** (1977), 216–250.
107. А. А. Суслин, М. С. Туленбаев, *Теорема о стабилизации для* K_2*-функтора Милнора.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 131–152.
108. О. И. Тавгень, *Конечная ширина арифметических групп Шевалле ранга* ≥ 2. — Докл. АН СССР **310**, No. 4 (1990), 802–806.
109. О. И. Тавгень, *Ограниченное порождение групп Шевалле над кольцами алгебраических чисел.* — Изв. АН СССР, сер. матем. **54**, No. 1 (1990), 97–122.
110. С. Тажетдинов, *Субнормальное строение двумерных линейных групп над кольцами, близкими к полям.* — Алгебра и Логика **24**, No. 4 (1985), 414–425.
111. С. Тажетдинов, *Субнормальное строение симплектических групп над локальными кольцами.* — Мат. Заметки **36**, No. 2 (1985), 289–298.
112. С. Тажетдинов, *Нормальное строение симплектических групп над кольцами стабильного ранга* 1. — Мат. Заметки **39**, No. 4 (1986), 512–517.
113. С. Тажетдинов, *Субнормальное строение двумерных линейных групп над* 6*-примитивными кольцами.* — Мат. Заметки **52**, No. 4 (1992), 99–105.
114. С. Тажетдинов, *Субнормальное строение симплекических групп над* $(2,3)$*-полными кольцами.* — Сиб. Мат. Журн. **34**, No. 6 (1993), 165–169.

115. С. Тажетдинов, *Субнормальное строение двумерных линейных групп над полными кольцами.* — Мат. Заметки **71**, No. 6 (2002), 924–930.
116. С. Тажетдинов, *Строение субнормальных подгрупп симплектических групп над локальными кольцами.* — Сиб. Мат. Журн. **47**, No. 3 (2006), 665–669.
117. С. Тажетдинов, *О субнормальных подгруппах линейных групп.* — Сиб. Мат. Журн. **49**, No. 1 (2008), 218–223.
118. М. С. Туленбаев, *Мультипликатор Шура группы элементарных матриц конечного порядка.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **86** (1979), 162–169.
119. М. С. Туленбаев, *Группа Стейнберга над кольцом многочленов.* — Мат. Сб. **45**, No. 1 (1983), 139–154.
120. К. Фейс, *Алгебра: кольца, модули и категории.* I. Мир, М. (1977).
121. Дж. Хамфри, *Арифметические группы.* Мир, М. (1983).
122. С. Г. Хлебутин, *Достаточные условия нормальности группы элементарных матриц.* — Успехи Мат. Наук **39**, No. 3 (1984), 245–246.
123. С. Г. Хлебутин, *Некоторые свойства элементарной подгруппы.* — Алгебра, логика и теория чисел. Изд-во МГУ, М. (1986), 86–90.
124. E. Abe, *Whitehead groups of Chevalley groups over polynomial rings.* — Comm. Algebra **11**, No. 12 (1983), 1271–1308.
125. E. Abe, *Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Radical Theory, Sendai–1988 (1988), 1–23.
126. E. Abe, *Normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Contemp. Math. **83** (1989), 1–17.
127. E. Abe, *Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings.* — St.-Petersburg Math. J. **5**, No. 2 (1993), 74–90.
128. E. Abe, *Chevalley groups over commutative rings. Normal subgroups and automorphisms.* — Contemp. Math. (1995), 13–23.
129. E. Abe, J. Morita, *Some Tits systems with affine Weyl groups in Chevalley groups over Dedekind domains.* — J. Algebra **115** (1988), 450–465.
130. E. Abe, K. Suzuki, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Tôhoku Math. J. **28**, No. 1 (1976), 185–198.
131. H. Abels, *Finite presentability of S-arithmetic groups. Compact presentability of solvable groups.* Lecture Notes in Mathematics **1261**, Springer-Verlag (1987).
132. H. Abels, *Finiteness properties of certain arithmetic groups in the function field case.* — Israel J. Math. **76** (1991), 113–128.
133. P. Abramenko, *Über einige diskret normierte Funktionenringe, die keine* GE_2-*Ringe sind.* — Archiv Math. **46** (1986), 233–239.
134. P. Abramenko, *Endlichkeitseigenschaften der Gruppen* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{F}_q[t])$. Thesis Univ. Frankfurt (1987).
135. P. Abramenko, *Finiteness properties of Chevalley groups over* $\mathbb{F}_q[t]$. — Israel J. Math. **87** (1994), 203–223.
136. P. Abramenko, *Twin buildings and applications to S-arithmetic groups.* Lecture Notes Math. **1641**, Springer-Verlag (1996).
137. P. Abramenko, *Finiteness properties of groups acting on twin buildings.* — Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects, London Math. Soc. Lecture Notes **331**, Cambridge Univ. Press (2004), 21–26.

138. P. Abramenko, *On finite and elementary generation of* $\mathrm{SL}_2(R)$. — arXiv:0808.1095v1 (2008), 1–20.
139. A. N. Acharya, *A note on a stability theorem of the general linear group.* — J. Indian Math. Soc. **39**, No. 1–4 (1975), 51–68.
140. S. I. Adian, J. Mennicke, *Bounded generation of* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. — Int. J. Algebra Comput. **2**, No. 4 (1992), 357–365.
141. R. Alperin, $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[(1+\sqrt{5})/2])$. — Duke Math. J. **47**, No. 3 (1980), 487–509.
142. R. Alperin, *Homology of* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\omega])$. — Comment. Math. Helv. **55** (1980), 364–377.
143. R. Alperin, *Normal subgroups of* $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{Z}[\sqrt{-3}])$. — Proc. Amer. Math. Soc. **124**, No. 10 (1996), 2935–2941.
144. R. Alperin, D. Wright, $\mathrm{K}_2(2, k[T, T^{-1}])$ *is generated by "symbols".* — J. Algebra **59**, No. 1 (1979), 39–46.
145. J. B. An, X.-P. Tang, *The structure of symplectic groups over semilocal domains.* — Acta Math. Sinica. New Series **1**, No. 1 (1985), 1–15.
146. P. Ara, R. R. Goodearl, *Stable rank of corner rings.* — Proc. Amer. Math. Soc. **133**, No. 3 (2004), 379–386.
147. F. A. Arlinghaus, L. N. Vaserstein, *The work of Pere Menal on normal subgroups.* — Publicacions Math. **36** (1992), 389–400.
148. S. Bachmuth, H. Mochizuki, $E_2 \neq \mathrm{SL}_2$ *for most Laurent polynomial rings.* — Amer. J. Math. **104** (1982), 1181–1189.
149. A. Bak, *The stable structure of quadratic modules.* Thesis, Columbia Univ. (1969).
150. A. Bak, *Subgroups of the general linear group normalized by relative elementary groups.* — Lecture Notes Math. **967** (1982), 1–22.
151. A. Bak, *Nonabelian* K*-theory: The nilpotent class of* K_1 *and general stability.* — K-Theory **4** (1991), 363–397.
152. A. Bak, R. Hazrat, N. Vavilov, *Localization-completion strikes again: relative* K_1 *is nilpotent by abelian.* — J. Pure Appl. Algebra **213** (2009), 1075–1085.
153. A. Bak, R. Hazrat, and N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups.* II. *Normal subgroups.* — Algebra Colloq. (2011).
154. A. Bak, V. Petrov, Guoping Tang, *Stability for quadratic* K_1. — K-Theory **30**, No. 1 (2003), 1–11.
155. A. Bak, U. Rehmann, *The congruence subgroup and metaplectic problem for* $\mathrm{SL}_{n\geq 2}$ *of division algebras.* — J. Algebra **78** (1982), 475–547.
156. A. Bak, A. Stepanov, *Dimension theory and nonstable* K*-theory for net groups.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **106** (2001), 207–253.
157. A. Bak, Guoping Tang, *Stability for hermitian* K_1. — J. Pure Appl. Algebra **150**, No. 2 (2000), 109–121.
158. A. Bak, N. Vavilov, *Normality for elementary subgroup functors.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **118**, No. 1 (1995), 1–18.
159. A. Bak, N. Vavilov, *Structure of hyperbolic unitary groups.* I. *Elementary subgroups.* — Algebra Colloq. **7**, No. 2 (2000), 159–196.
160. C. Bartolone, F. Bartolozzi, *Topics in geometric algebra over rings.* — Rings and Geometry (1985), 353–389.

161. C. Bartolone, A. G. Spera, *Tits's theorem for the group* $\mathrm{PGL}_2(L)$*, L a not necessarily commutative local ring.* — Ann. Mat. Pura Appl. **149** (1987), 297–309.
162. H. Bass, *The stable structure of quite general linear groups.* — Bull. Amer. Math. Soc. **70**, No. 3 (1964), 430–434.
163. H. Bass, K*-theory and stable algebra.* — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math., No. 22 (1964), 5–60.
164. H. Bass, *Lectures on topics in algebraic K-theory.* Tata Inst. of Fundam. Research, Bombay (1967).
165. H. Bass, *Some problems in classical algebraic* K*-theory.* — Algebraic K-Theory. II: Classical algebraic K-Theory (Proc. Conf. Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes Math. **342** (1973), 3–73.
166. H. Bass, *Unitary algebraic* K*-theory.* — Algebraic K-Theory. III: Hermitian K-Theory and Geometric Applications (Proc. Conf. Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972), Lecture Notes Math. **343** (1973), 57–265.
167. H. Bass, *Introduction to some methods of algebraic K-theory.* Conf. Board Math. Sci. **20** (1974).
168. H. Bass, J. Tate, *The Milnor ring of a global field.* — Lecture Notes Math. **342** (1973), 349–446.
169. R. Basu, R. Khanna, and R. A. Rao, *On Quillen's local global principle.* — Contemp. Math. **390** (2005), 17–30.
170. R. Basu, R. A. Rao, *Injective stability for* K_1 *of classical modules.* — J. Algebra **323** (2010), 867–877.
171. E. Bayer-Fluckiger, L. Fainsilber, *Non unimodular hermitian forms.* — Invent. Math. **123** (1996), 233–240.
172. H. Behr, *Endliche Erzeugbarkeit arithmetischer Gruppen über Funktionenkörpern.* — Invent. Math. **7** (1969), 1–32.
173. H. Behr, *Eine endliche Präsentation der symplektischen Gruppe* $\mathrm{Sp}_4(\mathbb{Z})$. — Math. Z. **141** (1975), 47–56.
174. H. Behr, *Explizite Präsentation von Chevalleygruppen über* $\mathbb{Z}$. — Math. Z. **141** (1975), 235–241.
175. H. Behr, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{F}_q[t])$ *is not finitely presentable.* — Proc. Symp. Homological Group Theory (Durham, 1977), London Math. Soc. Lecture Notes **36**, 213–224.
176. H. Behr, *Finite presentability of arithmetic groups over global function fields.* — Proc. Edinburgh Math. Soc. **30** (1987), 23–39.
177. H. Behr, *Arithmetic groups over function fields.* I. *A complete characterisation of finitely generated and finitely presented arithmetic subgroups of reductive groups.* — J. reine angew. Math. **495** (1998), 79–118.
178. H. Behr, *Higher finiteness properties of S-arithmetic groups in the function field case.* I. — Groups: topological, combinatorial and arithmetic aspects. London Math. Soc. Lecture Notes **331**, Cambridge Univ. Press (2004), 27–42.
179. P. Bender, *Eine Präsentation der symplektischen Gruppe* $\mathrm{Sp}(4,\mathbb{Z})$ *mit* 2 *Erzeugenden und* 8 *definierenden Relationen.* — J. Algebra **65**, No. 2 (1980), 328–331.
180. G. M. Bergman, *Coproducts and some universal ring constructions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **200** (1977), 33–88.

181. A. J. Berrick, M. E. Keating, *Rectangular invertible matrices.* — Amer. Math. Monthly **104**, No. 4 (1997), 297–302.
182. M. Bestvina, N. Brady, *Morse theory and finiteness properties of groups.* — Invent. Math. **129** (1997), 445–470.
183. S. Betley, *Homological stability for $O_{n,n}$ over a local ring.* — Trans. Amer. Math. Soc. **303**, No. 1 (1987), 413–429.
184. S. Betley, *Vanishing theorems for homology of* $\mathrm{GL}_n R$. — J. Pure Appl. Algebra **58** (1989), 213–226.
185. S. Betley, *Homological stability for $O_{n,n}$ over semi-local rings.* — Glasgow Math. J. **32**, No. 2 (1990), 255–259.
186. M. Bhargava, *Higher composition laws.* I. *A new view of Gauss composition and quadratic generalizations.* — Ann. Math. **159** (2004), 217–250.
187. M. Bhargava, *Higher composition laws.* II. *On cubic analogues of Gauss composition.* — Ann. Math. **159** (2004), 865–886.
188. M. Bhargava, *Higher composition laws.* III. *The parametrization of quartic rings.* — Ann. Math. **159** (2004), 1329–1360.
189. M. Bhargava, *Higher composition laws.* IV. *The parametrization of quintic rings.* — Ann. Math. **167** (2008), 53–94.
190. M. L. Bolla, *Isomorphism of general linear groups over rings.* — J. Algebra **96** (1985), 592–602.
191. A. Borel, *On the automorphisms of certain subgroups of semisimple Lie groups.* — Proc. Bombay Coll. on Algebraic Geometry (1968), 43–73.
192. A. Borel, J. Tits, *On abstract homomorphisms of simple algebraic groups.* — Proc. Bombay Coll. on Algebraic Geometry (1968), 75–82.
193. A. Borel, J. Tits, *Homomorphismes “abstraits” de groupes algébriques semi-simples.* — Ann. Math. **73** (1973), 499–571.
194. J. Brenner, *The linear homogeneous groups.* III. — Ann. Math. **71** (1960), 210–223.
195. J. Browkin, J. Hurrelbrink, *On the generation of $K_2(\mathcal{O})$ by symbols.* — Lecture Notes Math. **1046** (1982), 29–31.
196. E. I. Bunina, *Automorphisms of adjoint Chevalley groups of types* A_l, D_l, E_l *over local rings.* — `arXiv:math/0702046` (2007), 1–20.
197. E. I. Bunina, *Automorphisms of Chevalley groups of types* B_2 *and* G_2 *over local rings.* — `arXiv:math/0711.0531` (2007), 1–21.
198. E. I. Bunina, *Automorphisms of Chevalley groups of type* F_4 *over local rings with* 1/2. — J. Algebra **323** (2010), 2270–2289.
199. K.-U. Bux, K. Wortman, *A geometric proof that* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[t,t^{-1}])$ *is not finitely presented.* — Algebr. Geom. Topol. **6** (2006), 839–852.
200. K.-U. Bux, K. Wortman, *Finiteness properties of arithmetic groups over function fields.* — Invent. Math. **167** (2007), 355–378.
201. K.-U. Bux, A. Mohammadi, K. Wortman, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}[x])$ *is not* FP_{n-1}. — Comment. Math. Helv. **85** (2010), 151–164.
202. Cao Chongguang, Wang Luqun, *Normal subgroups of symplectic groups over rings with one in its stable range.* — Acta Math. Sinica **29** (1986), 323–326.
203. D. Carter, G. E. Keller, *Bounded elementary generation of* $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$. — Amer. J. Math **105** (1983), 673–687.

204. D. Carter, G. E. Keller, *Elementary expressions for unimodular matrices.* — Commun. Algebra **12** (1984), 379–389.
205. D. Carter, G. E. Keller, *Bounded elementary expressions in* $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$. — Preprint Univ. Virginia (1985), 1–11.
206. D. Carter, G. E. Keller, *The congruence subgroup problem for non standard models.* — Preprint Univ. Virginia (1985), 1–44.
207. D. Carter, G. E. Keller, and E. Paige, *Bounded expressions in* $\mathrm{SL}(2,\mathcal{O})$. — Preprint Univ. Virginia (1985), 1–21.
208. R. W. Carter, Yu Chen, *Automorphisms of affine Kac–Moody groups and related Chevalley groups over rings.* — J. Algebra **155** (1993), 44–94.
209. J.-L. Cathelineau, *The tangent complex to the Bloch–Suslin complex.* — Bull. Soc. Math. France **135** (2007), 565–597.
210. C. Chang, *The structure of the symplectic groups over semi-local domains.* — J. Algebra **35** (1975), 457–476.
211. C. N. Chang, *Orthogonal groups over semi-local domains.* — J. Algebra **37** (1975), 137–164.
212. R. Charney, *Homology stability for* GL_n *over a Dedekind domain.* — Inv. Math. **56** (1980), 1–17.
213. R. Charney, *On the problem of homology stability for congruence subgroups.* — Comm. Algebra **12** (1984), 2081–2123.
214. R. Charney, *A generalization of a theorem of Vogtmann.* — J. Pure Appl. Algebra **44** (1987), 107–125.
215. P. Chattopadhyay, R. A. Rao, *Elementary symplectic orbits and improved* K_1-*stability.* — J. K-theory **7**, No. 2 (2011), 389–403.
216. Chen Huanyin, Chen Miaosen, *On products of three triangular matrices over associative rings.* — Linear Algebra Applic. **387** (2004), 297–311.
217. Chen Sheng, You Hong, *Subrings in imaginary quadratic fields which are not universal for* GE_2. — Acta Arithm. **107**, No. 3 (2003), 299–305.
218. Chen Yu, *Isomorphic Chevalley groups over integral domains.* — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **92** (1994), 231–237.
219. Chen Yu, *On representations of elementary subgroups of Chevalley groups over algebras.* — Proc. Amer. Math. Soc. **123**, No. 8 (1995), 2357–2361.
220. Chen Yu, *Automorphisms of simple Chevalley groups over* $\mathbb{Q}$-*algebras.* — Tôhoku Math. J. **348** (1995), 81–97.
221. Chen Yu, *Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains.* — Trans. Amer. Math. Soc. **348**, No. 2 (1996), 521–541.
222. Chen Yu, *Isomorphisms of Chevalley groups over algebras.* — J. Algebra **226**, No. 2 (2000), 719–741.
223. Chen Yu, *Representation of degree two for elementary matrices over rings.* — Comm. Algebra **30**, No. 9 (2002), 4219–4234.
224. Chu Huah, *On the* GE_2 *of graded rings.* — J. Algebra **90**, No. 1 (1984), 208–216.
225. Chu Huah, *The rows of a matrix in* $E_2(R[X])$. — Chinese J. Math. **12**, No. 4 (1984), 245–254.
226. P. M. Cohn, *Some remarks on the invariant basis property.* — Topology **5** (1966), 215–228.

227. P. M. Cohn, *On the structure of* GL_2 *over a ring.* — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. No. 30 (1966), 5–53.
228. P. M. Cohn, *A presentation of* GL_2 *of a Euclidean imaginary quadratic number fields.* — Mathematika **15** (1968), 156–163.
229. P. M. Cohn, *Automorphisms of two-dimensional linear groups over Euclidean domains.* — J. London Math. Soc. **1** (1969), 279–292.
230. P. M. Cohn, K_2 *of polynomial rings and of free algebras.* — Proc. Conf. Ring Theory (Utah, 1971) (1972), 117–123, Academic Press, N. Y. – London.
231. P. M. Cohn, L. Gerritzen, *On the group of symplectic matrices over a free associative algebra.* — J. London Math. Soc. **63**, No. 2 (2001), 353–363.
232. G. Cooke, P. J. Weinberger, *On the construction of division chains in algebraic number fields with application to* SL_2. — Comm. Algebra **3** (1975), 481–524.
233. G. Corach, A. R. Larotonda, *Le rang stable de certaines algèbres d'opérateurs.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér I. Mathématique **296**, No. 23 (1983), 949–951.
234. D. L. Costa, *Zero-dimensionality and the* GE_2 *of polynomial rings.* — J. Pure Appl. Algebra **50** (1988), 223–229.
235. D. L. Costa, G. E. Keller, *On the normal subgroups of* $\mathrm{SL}(2, A)$. — J. Pure Appl. Algebra **53** (1988), 201–226.
236. D. L. Costa, G. E. Keller, *On the normal subgroups of* $\mathrm{GL}(2, A)$. — J. Algebra **135** (1990), 395–226.
237. D. L. Costa, G. E. Keller, *Normal subgroups of* $\mathrm{SL}(2, A)$. — Bull. Amer. Math. Soc. **24** (1991), 131–135.
238. D. L. Costa, G. E. Keller, *The* $\mathrm{E}(2, A)$ *sections of* $\mathrm{SL}(2, A)$. — Ann. Math. **134**, No. 1 (1991), 159–188.
239. D. L. Costa, G. E. Keller, *Radix redux: normal subgroups of symplectic group.* — J. reine angew. Math. **427** (1992), 51–105.
240. D. L. Costa, G. E. Keller, *Abstract radices.* — Comm. Algebra **25**, No. 7 (1997), 2099–2104.
241. D. L. Costa, G. E. Keller, *Power residue symbol and the central sections of* $\mathrm{SL}(2, A)$. — K-Theory **15**, No. 1 (1998), 33–98.
242. D. L. Costa, G. E. Keller, *On the normal subgroups of* $\mathrm{G}_2(A)$. — Trans. Amer. Math. Soc. **351**, No. 12 (1999), 5051–5088.
243. R. K. Dennis, *Stability for* K_2. — Lecture Notes. Math. **353** (1973), 85–94.
244. R. K. Dennis, *The* GE_2 *property for discrete subrings of* $\mathbb{C}$. — Proc. Amer. Math. Soc. **50** (1975), 77–82.
245. R. K. Dennis, M. Krusemeyer, $\mathrm{K}_2(A[X, Y]/XY)$, *a problem of Swan and related computations.* — J. Pure Appl. Algebra **15** (1979), 125–148.
246. R. K. Dennis, B. Magurn, and L. N. Vaserstein, *Generalized Euclidean group rings.* — J. reine angew. Math. **351** (1984), 113–128.
247. R. K. Dennis, M. R. Stein, *The functor* K_2*: a survey of computations and problems.* — Lecture Notes Math. **342** (1972), 243–280.
248. R. K. Dennis, M. R. Stein, *Injective stability for* K_2 *of local rings.* — Bull. Amer. Math. Soc. **80** (1974), 1010–1013.
249. R. K. Dennis, M. R. Stein, K_2 *of discrete valuation rings.* — Advances Math. **18** (1975), 182–238.

250. R. K. Dennis, L. N. Vaserstein, *On a question of M. Newman on the number of commutators.* — J. Algebra **118** (1988), 150–161.
251. R. K. Dennis, L. N. Vaserstein, *Commutators in linear groups.* — K-theory **2** (1989), 761–767.
252. W. Dicks, B. Hartley, *On homomorphisms between special linear groups over division rings.* — Comm. Algebra **19** (2001), 1919–1943.
253. M. H. Dull, *Automorphisms of* PSL_2 *over domains with few units.* — J. Algebra **27** (1973), 372–379.
254. M. H. Dull, *Automorphisms of the two-dimensional linear groups over integral domains.* — Amer. J. Math. **41** (1974), 1–40.
255. M. J. Dunwoody, K_2 *of a Euclidean ring.* — J. Pure Appl. Algebra **7** (1976) 53–58.
256. W. G. Dwyer, *Twisted homological stability for general linear groups.* — Ann. Math. **111** (1980), 239–251.
257. P. Elbaz-Vincent, *The indecomposable* K_3 *of rings and homology of* SL_2. — J. Pure Appl. Algebra **132**, No. 1 (1998), 27–71.
258. P. Elbaz-Vincent, *Homology of linear groups with coefficients in the adjoint action and K-theory.* — K-Theory **16**, No. 1 (1999), 35–50.
259. E. Ellers, H. Ishibashi, *Factorization of transformations over a local ring.* – Linear Algebra. Appl. **85**, No. 1 (1987), 17–27.
260. E. W. Ellers, H. Lausch, *Length theorems for the general linear group of a module over a local ring.* — J. Austral. Math. Soc. ser. A **46** (1989), 122–131.
261. E. W. Ellers, H. Lausch, *Generators for classical groups of modules over local rings.* — J. Geometry **39**, No. 1–2 (1990), 60–79.
262. I. V. Erovenko, $\mathrm{SL}_n(F[x])$ *is not boundedly generated by elementary matrices: explicit proof.* — Electronic J. Linear Algebra **11** (2004), 162–167.
263. I. V. Erovenko, A. S. Rapinchuk, *Bounded generation of some S-arithmetic orthogonal groups.* — C. R. Acad. Sci. **333**, No. 5 (2001), 395–398.
264. I. V. Erovenko, A. S. Rapinchuk, *Bounded generation of S-arithmetic subgroups of isotropic orthogonal groups over number fields.* — J. Number Theory **119**, No. 1 (2006), 28–48.
265. D. R. Estes, J. Ohm, *Stable range in commutative rings.* — J. Algebra **7**, No. 3 (1967), 343–362.
266. B. Fine, M. Newman, *The normal subgroup structure of the Picard groups.* — Trans. Amer. Math. Soc. **302** (1987), 769–786.
267. D. Flöge, *Zur Struktur der* PSL_2 *über einigen imaginär-quadratischen Zahlringen.* — Math. Z. **183** (1983), 255–279.
268. T. Fournelle, S. Sidki, K. Weston, *On algebraic embeddings of rings into groups.* — Arch. Math. **51** (1988), 425–433.
269. M. R. Gabel, *Lower bounds on the stable range of polynomial rings.* — Pacific J. Math. **61**, No. 1 (1975), 117–120.
270. M. R. Gabel, A. V. Geramita, *Stable range for matrices.* — J. Pure Appl. Algebra **5**, No. 1 (1974), 97–112; *Erratum*, ibid. **7** (1976), 236.
271. A. S. Garge, R. A. Rao, *A nice group structure on the orbit space of unimodular vectors.* — K-Theory **38**, No. 2 (2008), 113–133.

272. A. S. Garge, *The Steinberg formula for orbit groups.* — Expositiones Math. **27** (2009), 341–349.
273. S C. Geller, *On the* GE_n *of a ring.* — Ill. J.Math. **21**, No. 1 (1977), 109–112.
274. S. C. Geller, C. A. Weibel, $\mathrm{K}_1(A, B, I)$. — J. reine angew. Math. **342** (1983), 12–34.
275. S. C. Geller, C. A. Weibel, *Subgroups of the elementary and Steinberg groups of congruence level* I^2. — J. Pure Appl. Algebra **35** (1985), 123–132.
276. S. C. Geller, C. A. Weibel, $\mathrm{K}_1(A, B, I)$. II. — K-theory **2** (1989), 753–760.
277. L. Gerritzen, *Symplectic* 2×2 *matrices over free algebras.* — Indag. Math. **10**, No. 4 (1999), 507–512.
278. I. Z. Golubchik, *Isomorphisms of the general linear group* $\mathrm{GL}_n(R)$, $n \geq 4$, *over an associative ring.* — Contemp. Math. **131**, No. 1 (1992), 123–136.
279. K. R. Goodearl, P. Menal, *Stable range one for rings with many units.* — J. Pure Appl. Algebra **54** (1988), 261–287.
280. D. R. Grayson, SK_1 *of an interesting principal ideal domain.* — J. Pure Appl. Algebra **20** (1981), 157–163.
281. Sh. M. Green, *Generators and relations for* K_2 *of a division ring.* — Lecture Notes Math. **551** (1976), 74–76.
282. Sh. M. Green, *Generators and relations for the special linear group over a division ring.* — Proc. Amer. Math. Soc. **62**, No. 2 (1977), 229–232.
283. F. J. Grunewald, J. Mennicke, and L. N. Vaserstein, *On symplectic groups over polynomial rings.* — Math. Z. **206**, No. 1 (1991), 35–56.
284. F. J. Grunewald, J. Mennicke, and L. N. Vaserstein, *On the groups* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[x])$ *and* $\mathrm{SL}_2(K[x, y])$. — Israel J. Math. **86**, No. 1–3 (1994), 157–193.
285. F. J. Grunewald, J. Schwermer, *Free nonabelian quotients of* SL_2 *over orders of imaginary quadratic number fields.* — J. Algebra **69** (1981), 298–304.
286. D. Guin, *Stabilité de l'homologie du groupe linéare et* K*-théorie algébrique.* — C. R. Acad. Sci. Paris **304** (1987), 219–222.
287. D. Guin, *Homologie du groupe lineire et* K*-théorie de Milnor des anneaux.* — J. Algebra **123**, No. 1 (1989), 27–59.
288. S. K. Gupta, M. P. Murthy, *Suslin's work on linear groups over polynomial rings and Serre problem.* ISI Lect. Notes **8** (1980).
289. G. Habdank, *A classification of subgroups of* Λ*-quadratic groups normalized by relative elementary subgroups.* Dissertation Universität Bielefeld (1987), 1–71.
290. G. Habdank, *A classification of subgroups of* Λ*-quadratic groups normalized by relative elementary subgroups.* — Adv. Math. **110**, No. 2 (1995), 191–233.
291. U. Hadad, *Uniform Kazhdan constant for some familes of linear groups.* — J. Algebra **318**, No. 2 (2007), 607–618.
292. A. J. Hahn, *On the homomorphisms of the integral linear groups.* — Math. Ann. **197** (1972), 234–250.
293. A. J. Hahn, *Isomorphisms of the integral classical groups and their congruence subgroups.* — Amer. J. Math. **97**, No. 4 (1975), 865–887.
294. A. J. Hahn, *Cayley algebras and the automorphisms of* $\mathrm{PO}'_8(V)$ *and* $\mathrm{P}\Omega_8(V)$. — Amer. J. Math. **98**, No. 4 (1976), 953–987.
295. A. J. Hahn, *Cayley algebras and the isomorphisms of the orthogonal groups over arithmetic and local domains.* — J. Algebra **45** (1977), 210–246.

296. A. J. Hahn, *Isomorphisms theory for orthogonal groups over arbitrary integral domains.* — J. Algebra **51** (1978), 233–287.
297. A. J. Hahn, *Category equivalences and linear groups over rings.* — J. Algebra **77**, No. 2 (1982), 505–543.
298. A. J. Hahn, *The finite presentability of linear groups.* — Contemp. Math. **82** (1989), 23–33.
299. A. J. Hahn, D. G. James, and B. Weisfeiler, *Homomorphisms of algebraic and classical groups: a survey.* — Canad. Math. Soc. Proc. **4** (1984), 249–296.
300. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* Springer, Berlin et al. (1989).
301. R. Hazrat, *Dimension theory and non-stable* K_1 *of quadratic module.* — K-theory **27** (2002), 293–327.
302. R. Hazrat, V. Petrov, and N. Vavilov, *Relative subgroups in Chevalley groups.* — J. K-theory **5**, No. 3 (2010), 603–618.
303. R. Hazrat, A. Stepanov, N. Vavilov, and Zhang Zuhong, *The yoga of commutators.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **287** (2011), 53–82.
304. R. Hazrat, N. Vavilov, K_1 *of Chevalley groups are nilpotent.* — J. Pure Appl. Algebra **179** (2003) 99–116.
305. R. Hazrat, N. Vavilov, *Bak's work on* K*-theory of rings* (*with an appendix by Max Karoubi*). — J. K-Theory **4**, No. 1 (2009), 1–65.
306. R. Hazrat, N. Vavilov, and Zhang Zuhong, *Relative unitary commutator calculus, and applications.* — J. Algebra **343**, No. 1 (2011), 107–137.
307. R. Hazrat, N. Vavilov, and Zhang Zuhong, *Relative Commutator Calculus in Chevalley groups.* — J. Algebra (2012), 1–32 (to appear).
308. R. Hazrat, Zhang Zuhong, *Generalized commutator formula.* — Comm. Algebra **38**, No. 4 (2011), 1441–1454.
309. R. Herman, L. N. Vaserstein, *The stable range of* C^**-algebras.* — Invent. Math. **77**, No. 3 (1984), 553–555.
310. J. A. Hermida-Alonso, *Linear algebra over commutative rings.* — Handbook of Algebra **3** (2003), 3–61.
311. A. C. Hibbard, *A new presentation of hyperbolic classical groups over a division ring.* — J. Algebra **165**, No. 2 (1994), 360–379.
312. A. C. Hibbard, *The generation of* $U_{2n}(R,\Lambda)$ *and the presentation of* $O_{2n}^{+}(R)$. — J. Algebra **172**, No. 3 (1995), 819–829.
313. E. K. Hinson, *Paths of unimodular vectors.* — J. Algebra **142**, No. 1 (1991), 58–75.
314. E. K. Hinson, *Word length in elementary matrices.* — J. Algebra **142**, No. 1 (1991) 76–80.
315. E. K. Hinson, *On Vaserstein's power operation on elementary orbits.* — Comm. Algebra (2011).
316. Hua Lokeng, I. Reiner, *Automorphisms of the unimodular group.* — Trans. Amer. Math. Soc. **71** (1951), 331–348.
317. J. Huebschmann, *Stem extensions of the infinite general linear group and large Steinberg groups.* — Lecture Notes Math. **966** (1980), 108–111.
318. J. E. Humphreys, *On the automorphisms of infinite Chevalley groups.* — Canad. J. Math. **21**, No. 1 (1969), 908–911.

319. J. Hurrelbrink, *Endlich präsentierte arithmetische Gruppen und* K_2 *über Laurent-Polynomringen.* — Math. Ann. **225** (1977), 123–129.
320. J. Hurrelbrink, *The elements of* $\mathrm{K}_2(\mathbb{Z}_S)$. — Manuscripta Math. **24** (1978), 173–177.
321. J. Hurrelbrink, *Endlich präsentierte arithmetische Gruppen im Funktionenkörperfall.* — Math. Ann. **225**, No. 2 (1977), 123–129.
322. J. Hurrelbrink, *On* $\mathrm{K}_2(\mathcal{O})$ *and presentations of* $\mathrm{SL}_n(\mathcal{O})$ *in the real quadratic case.* — J. reine angew. Math. **319** (1980), 213–220.
323. J. Hurrelbrink, *On the size of certain K-groups.* — Comm. Algebra **10** (1982), 1873–1889.
324. J. Hurrelbrink, *On presentations of* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z}_S)$. — Comm. Algebra **11**, No. 9 (1983), 937–947.
325. J. Hurrelbrink, U. Rehmann, *Eine endliche Präsentation der Gruppe* $\mathrm{G}_2(\mathbb{Z})$. — Math. Z. **141** (1975), 243–251.
326. J. Hurrelbrink, U. Rehmann, *Zur endliche Präsentation von Chevalleygruppen über den euklidischen imaginär-quadratischen Zahlringen.* — Arch. Math. **27**, No. 1 (1976), 123–133.
327. K. Hutchinson, *A new approach to Matsumoto's theorem.* — K-theory **4**, No. 2 (1990), 181–200.
328. K. Hutchinson, *Conditions under which $K_2(\mathcal{O}_F)$ is not generated by Dennis–Stein symbols.* — Acta Arithm. **89** (1999), 189–199.
329. F. Ischebeck, *Hauptidealringe mit nichttrivialer* SK_1*-Gruppe.* — Arch. Math. **35** (1980), 138–139.
330. H. Ishibashi, *Generators of a symplectic group over a local valuation domain.* — J. Algebra **53**, No. 1 (1978), 125–128.
331. H. Ishibashi, *Generators of $O_n(V)$ over a quasi semilocal semihereditary domain.* — Comm. Algebra **7**, No. 10 (1979), 1043–1064.
332. H. Ishibashi, *Generators of* $\mathrm{Sp}_n(V)$ *over a quasi semilocal semihereditary domain.* — Comm. Algebra **7**, No. 16 (1979), 1673–1683.
333. H. Ishibashi, *Generators of $U_n(V)$ over a quasi semilocal semihereditary domain.* — J. Algebra **60**, No. 1 (1979), 199–203.
334. H. Ishibashi, *Generators of* $\mathrm{Sp}_n(V)$ *over a quasi semilocal semihereditary ring.* — J. Pure Appl. Algebra **22**, No. 2 (1981), 121–129.
335. H. Ishibashi, *Generators of orthogonal groups over valuation rings.* — Canad. J. Math. **33**, No. 1 (1981), 116–128.
336. H. Ishibashi, *Structure of $O(V)$ over full rings.* — J. Algebra **75**, No. 1 (1982), 1–9.
337. H. Ishibashi, *Involutory expressions of elements in* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$ *and* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. — Linear Algebra Applic. **219** (1995) 165–177.
338. D. G. James, *Unitary groups over local rings.* — J. Algebra **52**, No. 2 (1978), 354–363.
339. D. G. James, *Projective geometry over rings with stable range condition.* — Linear Multilinear Algebra **23**, No. 4 (1988), 299–304.
340. D. G. James, W. C. Waterhouse, and B. Weisfeiler, *Abstract homomorphisms of algebraic groups: problems and bibliography.* — Commun. Algebra **9** (1981), 95–114.

341. W. Jehne, *Die Struktur der symplektischen Gruppen über lokalen und dedekindschen Ringen.* — Sitzungber. Heidelberg Akad. Wiss., Math. Naturwiss. **3**, (1962/64), 189–235.
342. G. A. Jones, *Congruence and non-congruence subgroups of the modular group: a survey.* — London Math. Soc. Lect. Notes Ser. Cambridge Univ. Press **121** (1986), 223–234.
343. S. Jose, R. A. Rao, *A local global principle for the elementary unimodular vector group.* — Contemp. Math. **390** (2005), 119–125.
344. S. Jose, R. A. Rao, *A structure theorem for the elementary unimodular vector group.* — Trans. Amer. Math. Soc. **358**, No. 7 (2005), 3097–3112.
345. B. Kahn, K_2 *d'un anneau Euclidien.* — J. Pure Appl. Algebra **34** (1984), 255–257.
346. W. van der Kallen, *Le* K_2 *des nombres duaux.* — C. R. Acad. Sci. Paris, ser. A–B (1971), 1204–1207.
347. W. van der Kallen W. *The Schur multipliers of* $\mathrm{SL}(3,\mathbb{Z})$ *and* $\mathrm{SL}(4,\mathbb{Z})$. — Math. Ann. **212** (1974), 47–49.
348. W. van der Kallen, *Injective stability for* K_2. — Lecture Notes Math. **551** (1976), 77–154.
349. W. van der Kallen, *Another presentation for Steinberg groups.* — Indag. Math. **39**, No. 4 (1977), 304–312.
350. W. van der Kallen, *The* K_2 *of rings with many units.* — Ann. Sci. École Norm. Sup., $4^{\text{éme}}$ sér. **10** (1977), 473–515.
351. W. van der Kallen, *Homology stability for linear groups.* — Invent. Math. **60** (1980), 269–295.
352. W. van der Kallen, *Stability for* K_2 *of Dedekind rings of arithmetic type.* — Lecture Notes Math. **854** (1981), 217–248.
353. W. van der Kallen, $\mathrm{SL}_3(\mathbb{C}[x])$ *does not have bounded word length.* — Springer Lecture Notes Math. **966** (1982), 357–361.
354. W. van der Kallen, *A group structure on certain orbit sets of unimodular rows.* — J. Algebra **82** (1983), 363–397.
355. W. van der Kallen, *Vaserstein's prestabilization theorem over commutative rings.* — Comm. Algebra **15**, No. 3 (1987), 657–663.
356. W. van der Kallen, *A module structure on certain orbit sets of unimodular rows.* — J. Pure Appl. Algebra **57**, No. 3 (1989), 281–316.
357. W. van der Kallen, *Presenting* K_2 *with generic symbols.* — In: Algebraic K-theory: Connections with Geometry and Topology (1989), 509–516.
358. W. van der Kallen, *From Mennicke symbol to Euler class groups.* — Algebra, Arithmetic and Geometry (Mumbai, 2000), Tata Institute of Fundamental Research, Mumbai **16** (2002), 341–354.
359. W. van der Kallen, H. Maazen, and J. Stienstra, *A presentation of some* $\mathrm{K}_2(n,R)$. — Bull. Amer. Math. Soc. **81** (1975), 934–936.
360. W. van der Kallen, B. Magurn, and L. N. Vaserstein, *Absolute stable rank and Witt cancellation for non-commutative rings.* — Invent. Math. **91** (1988), 543–557.
361. W. van der Kallen, M. R. Stein, *On the Schur multiplier of Steinberg and Chevalley groups over commutative rings.* — Math. Z. **155** (1977), 83–94.

362. W. van der Kallen, J. Stienstra, *The relative* K_2 *of truncated polynomial rings.* — J. Pure Appl. Algebra **34** (1984), 277–289.
363. I. Kaplansky, *Elementary divisors and modules.* — Trans. Amer. Math. Soc. **66** (1949), 464–491.
364. M. Kassabov, *Kazhdan constants for* $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$. — Int. J. Alg. Comput. **15**, No. 5–6 (2005) 971–995.
365. M. Kassabov, N. Nikolov, *Universal lattices and property tau.* — Invent. Math. **165** (2006), 209–224.
366. M. Kassabov, M. Sapir, *Nonlinearity of matrix groups.* — J. Topol. Anal. **1**, No. 3 (2009), 251–260.
367. S. A. Katre, R. A. Rao, and D. N. Sheth, *Solving linear systems via Pfaffians.* — Linear Algebra Applic. **430** (2009), 968–975.
368. K. Keller, *Nicht endlich erzeugbare arithmetische Gruppen über Funktionenkorper.* — Thesis Univ. Frankfurt (1980).
369. M. Kervaire, *Multiplicateurs de Schur et K-theory.* — Essays on Topology and Related Topics, Mém. dédiés à G. de Rham. Springer-Verlag, Berlin et al. (1970), 212–225.
370. F. Keune, *(t^2-t)-reciprocities of the affine line and Matsumoto's theorem.* — Invent. Math. **28** (1975), 185–192.
371. F. Keune, *The relativisation of* K_2. — J. Algebra **54**, No. 1 (1978), 159–177.
372. F. Keune, *Another presentation for the* K_2 *of a local domain.* — J. Pure Appl. Algebra **22** (1981), 131–141.
373. F. Keune, *The* K_2 *of a* 1*-fold stable ring.* — Lecture Notes Math. **1046** (1984), 193–228.
374. G. Kiralis, S. Krstić, and J. McCool, *Finite presentability of* $\Phi_n(G)$, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}G)$ *and their elementary subgroups and Steinberg groups.* — Proc. London Math. Soc. **73**, No. 3 (1996), 575–622.
375. F. Kirchheimer, *Die Normalteiler der symplektischen Gruppen über beliebigen lokalen Ringen.* — J. Algebra **50** (1978), 228–241.
376. F. Kirchheimer, *Über explizite Präsentation Hilbertscher Modulgruppen zu totalreellen Körpern der Klassenzahl eins.* — J. reine angew. Math. **321** (1981), 120–137.
377. F. Kirchheimer, J. Wolfart, *Explizite Präsentation gewisser Hilbertscher Modulgruppen durch Erzeugende und Relationen.* — J. reine angew. Math. **315** (1980), 139–173.
378. B. Kirkwood, B. McDonald, *The Witt ring of a full ring.* — J. Algebra **64**, No. 1 (1980), 148–166.
379. B. Kirkwood, B. McDonald, *The orthogonal and the special orthogonal groups over a full ring.* — J. Algebra **68**, No. 1 (1981), 121–143.
380. B. Kirkwood, B. McDonald, *The symlectic group over a ring with one in its stable range.* — Pacific J. Math. **92**, No. 1 (1981), 111–125.
381. S. Klasa, *On Steinberg groups.* — Lecture Notes Math. **353**, No. 1 (1973), 131–138.
382. W. Klingenberg, *Linear groups over local rings.* — Bull. Amer. Math. Soc. **66** (1960), 294–296.

383. W. Klingenberg, *Lineare Gruppen über lokalen Ringen.* — Amer. J. Math. **83**, No. 1 (1961), 137–153.
384. W. Klingenberg, *Lineare Gruppen über verallgemeinernen Bewertungsringen.* — Abh. Math. Semin. Univ. Hamburg **25**, No. 1–2 (1961), 23–35.
385. W. Klingenberg, *Projektive Geometrie und lineare Algebra über verallgemeinernen Bewertungsringen.* — Proc. Coll. Algebr. Topol. Found. Geom. London (1962), 99–107.
386. W. Klingenberg, *Die Struktur der linearen Gruppen über einem nichtkommutativen lokalen Ring.* — Arch. Math. **13** (1962), 73–81.
387. W. Klingenberg, *Symplectic groups over local rings.* — Amer. J. Math. **85**, No. 2 (1963), 232–240.
388. A. Klyachko, *Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras.* — J. Algebra **322** (2010), 2608–2619.
389. M. Kneser, *Normal subgroups of integral orthogonal groups.* — Lecture Notes Math. **108** (1969), 67–71.
390. M. Kneser, *Normalteiler ganzzahliger Spingruppen.* — J. reine angew. Math. **311/312** (1979), 191–214.
391. M. Kneser, *Erzeugung ganzzahliger orthogonaler Gruppen durch Spiegelungen.* — Math. Ann. **255**, No. 4 (1981), 453–462.
392. K. P. Knudson, *The homology of* $\mathrm{SL}_2(F[t,t^{-1}])$. — J. Algebra **180** (1996), 87–101.
393. K. P. Knudson, *The homology of special linear groups over polynomial rings.* — Ann. Sci. École Norm. Sup. 4-eme ser. **30**, No. 3 (1997), 385–415.
394. K. P. Knudson, *Unstable homotopy invariance and the homology of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[t])$. — J. Pure Appl. Algebra **148** (2000), 255–266.
395. K. P. Knudson, *Homology and finiteness properties of* $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z}[t,t^{-1}])$. — Algebr. Geom. Topol. **8** (2008), 2253–2261.
396. K. P. Knudson, *Congruence subgroups and twisted cohomology of* $\mathrm{SL}_n(F[t])$. I, II. — J. Algebra **207**, No. 2 (1998), 695–721; Comm. Algebra **29**, No. 12 (2001), 5465–5475.
397. M.-A. Knus, *Quadratic and hermitian forms over rings.* Springer Verlag, Berlin et al. (1991).
398. M. Kolster, *On injective stability for* K_2. — Lecture Notes Math. **966** (1982), 128–168.
399. M. Kolster, *Improvement of* K_2*-stability under transitive actions of elementary groups.* — J. Pure Appl. Algebra **24** (1982), 277–282.
400. M. Kolster, *General symbols and presentations of elementary linear groups.* — J. reine angew. Math. **353** (1984), 132–164.
401. M. Kolster, K_2 *of non-commutative local rings.* — J. Algebra **95**, No. 1 (1985), 173–200.
402. S. Krstić, J. McCool, *The non-finite presentability of* $\mathrm{IA}(F_3)$ *and* $\mathrm{GL}_n(\mathrm{Int}[t,t^{-1}]$. — Invent. Math. **129** (1997), 595–606.
403. S. Krstić, J. McCool, *Presenting* $\mathrm{GL}_n(k\langle T\rangle)$. — J. Pure Appl. Algebra **141** (1999), 175–183.
404. M. Krusemeyer, *Fundamental groups, algebraic K-theory, and a problem of Abjyankar.* — Invent. Math. **19** (1973), 15–47.

405. M. Krusemeyer, *Skewly completable rows and a theorem of Swan and Towber.* — Comm. Algebra **4**, No. 4 (1975), 657–663.
406. S. Krutelevich, *Jordan algebras, exceptional groups and quadratic composition.* — J. Algebra **314** (2007), 924–977.
407. N. H. J. Lacroix, *Two-dimensional linear groups over local rings.* — Canad. J. Math. **21** (1969), 106–135.
408. N. H. J. Lacroix, C. Levesque, *Sur les sous-groupes normaux de* SL_2 *sur un anneau local.* — Canad. Math. Bull. **26** (1983), 209–219.
409. T. J. Laffey, *Expressing unipotent matrices over rings as products of involutions.* — Irish Math. Soc. Bull. No. 40 (1998), 24–30.
410. J. Landin, I. Reiner, *Automorphisms of the general linear group over a principal ideal domain.* — Ann. Math. **65** (1957), 519–526.
411. J. Landin, I. Reiner, *Automorphisms of the two-dimensional general linear group over a Euclidean ring.* — Proc. Amer. Math. Soc. **9** (1958), 209–216.
412. W. G. Leavitt, *Modules without invariant basis number.* — Proc. Amer. Math. Soc. **8** (1957), 322–328.
413. W. G. Leavitt, *The module type of a ring.* — Trans. Amer. Math. Soc. **103** (1962), 113–130.
414. R. Lee, R. Szczarba, *On the homology and cohomology of congruence subgroups.* — Invent. Math. **33** (1976), 15–53.
415. H. W. Lenstra, K_2 *of a global field consists of symbols.* — Lecture Notes in Mathematics. **551**, Springer-Verlag, (1976), 69–73.
416. H. W. Lenstra, *Grothendieck groups of Abelian group rings.* — J. Pure Appl. Algebra **20** (1981), 173–193.
417. A. Leutbecher, *Euklidischer Algorithmus und die Gruppe* GL_2. — Math. Ann. **231** (1978), 269–285.
418. Fuan Li, *The structure of symplectic group over arbitrary commutative rings.* — Acta Math. Sinica (N. S.) **3**, No. 3 (1987), 247–255.
419. Fuan Li, *Local behaviour of systems* (ϕ, α, σ). — Kexue Tongbao **33** (1988), 1445–1447. (in Chinese)
420. Fuan Li, *The structure of orthogonal groups over arbitrary commutative rings.* — Chinese Ann. Math. Ser. B **10**, No. 3 (1989), 341–350.
421. Fuan Li, *Finite presentability of Steinberg groups over group rings.* — Acta Math. Sinica. New Series **5**, No. 4 (1989), 297–301.
422. Fuan Li, *Homological meaning of systems* (ϕ, α, σ). — Acta Math. Sinica **7**, No. 4 (1991), 348–353.
423. Fuan Li, Zunxian Li, *Automorphisms of* $\mathrm{SL}_3(R)$, $\mathrm{GL}_3(R)$. — Contemp. Math. **82** (1984), 47–52.
424. Fuan Li, Zunxian Li, *Isomorphisms of* GL_3 *over commutative rings.* — Scientia Sinica, ser. A **31** (1988), 7–14.
425. Fuan Li, Mulan Liu, *Generalized sandwich theorem.* — K-Theory **1** (1987), 171–184.
426. Fuan Li, Hongshuo Ren, *The automorphisms of two-dimensional linear groups over commutative rings.* — Chinese Ann. Math. **10B**, No. 1 (1989), 50–57.
427. B. Liehl, *On the group* SL_2 *over orders of arithmetic type.* — J. reine angew. Math. **323** (1981), 153–171.

428. B. Liehl, *Beschränkte Wortlänge in* SL_2. — Math. Z. **186** (1984), 509–524.
429. L. Lifschitz, A. Rapinchuk, *On abstract homomorphisms of Chevalley groups with non-reductive image.* I. — J. Algebra **242**, No. 1 (2001), 374–399.
430. Zongzhu Lin, *The isomorphism of linear groups over local rings.* — Acta Math. Sinica. New Series **27**, No. 4 (1984), 528–531.
431. Shaowu Liu, Luqun Wang, *Homomorphisms between symplectic groups.* — Chinese Ann. Math. ser. B **14**, No. 3 (1993), 287–296.
432. J. L. Loday, *Cohomologie et groupe de Steinberg relatifs.* — J. Algebra **54**, No. 1 (1978), 178–202.
433. D. Loukanidis, V. K. Murty, *Bounded generation for* SL_n $(n \geq 2)$ *and* Sp_n $(n \geq 1)$. — Preprint, 1995.
434. A. W. Lubotzky, *Free quotients and the congruence kernel of* SL_2. — J. Algebra **77** (1982), 411–418.
435. A. Yu. Luzgarev, A. V. Stepanov, N. A. Vavilov, *Calculations in exceptional groups over rings.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **373** (2009), 48–72.
436. H. Maazen, *Homology stability for the general linear group.* Ph. D. Thesis, Utrecht (1979).
437. H. Maazen, J. Stienstra, *A presentation for* K_2 *of split radical pairs.* — J. Pure Appl. Algebra **10** (1977), 271–294.
438. B. A. Magurn, SK_1 *of dihedral groups.* — J. Algebra **51**, No. 2 (1978), 399–415.
439. B. A. Magurn, *Explicit* K_1 *of some modular group rings.* — J. Pure Appl. Algebra **206** (2006), 3–20.
440. B. A. Magurn, van der W. Kallen, L. N. Vaserstein, *Absolute stable rank and Witt cancellation for noncommutative rings.* — Invent. Math. **91** (1988), 525–542.
441. K. E. Martin, *Orthogonal groups over* $\Re((\pi))$. — Amer. J. Math. **95** (1973), 59–79.
442. A. W. Mason, *A note on subgroups of* $\mathrm{GL}(n,A)$ *which are generated by commutators.* — J. London Math. Soc. **11** (1974), 509–512.
443. A. W. Mason, *On subgroups of* $\mathrm{GL}(n,A)$ *which are generated by commutators.* II. — J. reine angew. Math. **322** (1981), 118–135.
444. A. W. Mason, *A further note on subgroups of* $\mathrm{GL}(n,A)$ *which are generated by commutators.* — Arch. Math. **37**, No. 5 (1981), 401–405.
445. A. W. Mason, *On non-normal subgroups of* $\mathrm{GL}_n(A)$ *which are normalized by elementary matrices.* — Ill. J. Math. **28** (1984), 125–138.
446. A. W. Mason, *Anomalous normal subgroups of* $\mathrm{SL}_2(K[x])$. — Quart. J. Math. **36** (1985), 345–358.
447. A. W. Mason, *Standard subgroups of* $\mathrm{GL}_2(A)$. — Proc. Edin. Math. Soc. **30** (1987), 341–349.
448. A. W. Mason, *On* $\mathrm{GL}_2(A)$ *of a local ring in which 2 is not a unit.* — Canad. Math. Bull. **30** (1987), 165–176.
449. A. W. Mason, *Free quotients of congruence subgroups of* SL_2 *over a Dedekind ring of arithmetic type contained in a function field.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **101** (1987), 421–429.
450. A. W. Mason, *Free quotients of congruence subgroups of* SL_2 *over a coordinate ring.* — Math. Z. **198** (1988), 39–51.

451. A. W. Mason, *On* $\mathrm{GL}_2(A)$ *of a local ring in which 2 is not a unit.* II. — Comm. Algebra **17** (1989), 511–551.
452. A. W. Mason, *Non-standard, normal subgroups and non-normal, standard subgroups of the modular group.* — Canad. Math. Bull. **32**, No. 1 (1989), 109–113.
453. A. W. Mason, *Subnormal subgroups of* $E_n(R)$ *have no free nonabelian quotients, when* $n \geq 3$. — Proc. Edinburgh Math. Soc. **119**, No. 1 (1991), 113–119.
454. A. W. Mason, *The order and level of a subgroup of* GL_2 *over a Dedekind ring of arithmetic type.* — Proc. Royal Soc. Edinburgh, Sect. A **119**, No. 3–4 (1991), 191–212.
455. A. W. Mason, *Normal subgroups of* $\mathrm{SL}_2(k[t])$ *with or without free quotients.* — J. Algebra **150**, No. 2 (1992), 281–295.
456. A. W. Mason, *Congruence hulls in* SL_n. — J. Pure Appl. Algebra **89**, No. 3 (1993), 255–257.
457. A. W. Mason, *Quotients of the congruence kernels of* SL_2 *over arithmetic Dedekind domains.* — Israel J. Math. **91** (1995), 77–91.
458. A. W. Mason, *Unipotent matrices, modulo elementary matrices, in* SL_2 *over a coordinate ring.* — J. Algebra **203** (1998), 134–155.
459. A. W. Mason, *The generalization of Nagao's theorem to other subrings of the rational function field.* — Comm. Algebra **31**, No. 11 (2003), 5199–5242.
460. A. W. Mason, *Stabilziers of edges in general linear groups acting on trees.* — J. Group Theory **4** (2001), 97–108.
461. A. W. Mason, A. Schweizer, *Non-standard automorphisms and non-congruence subgroups of* SL_2 *over Dedekind domains contained in function fields.* — J. Pure Appl. Algebra **205** (2006), 189–209.
462. A. W. Mason, W. W. Stothers, *On subgroups of* $\mathrm{GL}(n, A)$ *which are generated by commutators.* — Invent. Math. **23** (1974), 327–346.
463. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* — Ann. Sci. École Norm. Sup. **2**, No. 4 (1969), 1–62.
464. B. R. McDonald, *Geometric algebra over local rings.* Marcel Dekker, N.Y. (1976).
465. B. R. McDonald, *Automorphisms of* $\mathrm{GL}_n(R)$. — Trans. Amer. Math. Soc. **215** (1976), 145–159.
466. B. R. McDonald, *Automorphisms of* $\mathrm{GL}_n(R)$. — Trans. Amer. Math. Soc. **246** (1978), 155–171.
467. B. R. McDonald, GL_2 *of a ring with many units.* — Comm. Algebra **8** (1980), 869–888.
468. B. R. McDonald, *Projectivities for rings with many units.* — Comm. Algebra **9**, №. 2 (1981), 195–204.
469. B. R. McDonald, $\mathrm{Aut}(\mathrm{GL}_2)$ *for rings with many units.* — Comm. Algebra **9**, No. 2 (1981), 205–220.
470. B. R. McDonald, *Linear algebra over commutative rings.* Marcel Dekker, N.Y. (1984).
471. B. R. McDonald, *Metric geometry over local global commutative rings.* — Rings and geometry. (1985), 391–415.
472. B. R. McDonald, B. Hershberger, *The orthogonal group over a full ring.* — J. Algebra **51** (1978), 536–549.

473. G. McHardy, *Endliche und fast-endliche Präsentierbarkeit einiger arithmetischer Gruppen.* — Thesis Univ. Frankfurt (1982).
474. L. McQueen, D. R. McDonald, *Automorphisms of the symplectic group over a local ring.* — J. Algebra **30** (1974), 485–495.
475. P. Menal, J. Moncasi, *On regular rings with stable range* 2. — J. Pure Appl. Algebra **24** (1982), 25–40.
476. P. Menal, J. Moncasi, K_1 *of von Neumann regular rings.* — J. Pure Appl. Algebra **33**, No. 3 (1984), 295–312.
477. P. Menal, L. N. Vaserstein, *On subgroups of* GL_2 *over non-commutative local rings which are normalized by elementary matrices.* — Math. Ann. **285** (1989), 221–231.
478. P. Menal, L. N. Vaserstein, *On subgroups of* GL_2 *over Banach algebras and von Neumann regular rings which are normalized by elementary matrices.* — J. Pure Appl. Algebra **64**, No. 2 (1990), 149–162.
479. P. Menal, L. N. Vaserstein, *On the structure of* GL_2 *over stable range one rings.* — J. Algebra **136**, No. 1 (1991), 99–120.
480. J. Mennicke, *A remark on the congruence subgroup problem.* — Math. Scand. **86** (2000), 206–222.
481. J. S. Milne, *Algebraic groups and arithmetic groups.* `http://www.jmilne.org/math/`, (2006), 1–219.
482. B. Mirzaii, *Homology of classical groups and K-theory.* — Ph. D. Thesis Utrecht Univ. (2005), 1–83.
483. B. Mirzaii, *Homology stability for unitary groups.* II. — K-Theory **36**, No. 3–4 (2005), 305–326.
484. B. Mirzaii, *Homology of* GL_n *over algebraically closed fields.* — J. London Math. Soc. **76** (2007), 605–621.
485. B. Mirzaii, *Homology of* GL_n*: injectivity conjecture for* GL_4. — Math. Ann. **304**, No. 1 (2008), 159–184.
486. B. Mirzaii, *Third homology of general linear groups.* — J. Algebra **320**, No. 5 (2008), 1851–1877.
487. B. Mirzaii, *Bloch–Wigner theorem over rings with many units.* — arXiv:0807.2039v2 [math.KT] (2009), 1–18.
488. B. Mirzaii, *A note on the third cohomology of* GL_2. — arXiv:0907.0876v1 [math.KT] (2009), 1–9.
489. B. Mirzaii, W. van der Kallen, *Homology stability for symplectic groups.* — arXiv:math/ 0110163v1 [math.KT] (2001), 1–21.
490. B. Mirzaii, W. van der Kallen, *Homology stability for unitary groups.* — Documenta Math. **7** (2002), 143–166.
491. J. Morita, *On the group structure of rank one K_2 of some $\mathbb{Z}_S$.* — Bull. Soc. Math. Belg. **42** (1990), 561–575.
492. D. W. Morris, *Bounded generation of* $\mathrm{SL}(n, A)$. — D. Carter, G. Keller, E. Paige, New York J. Math. **13** (2007), 383–421.
493. K. N. Moss, *Homology of* $\mathrm{SL}\left(n, \mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]\right)$. — Duke Math. J. **47**, No. 4 (1980), 803–818.

494. T. Mulders, *Generating the tame and wild kernels by Dennis–Stein symbols.* — K-Theory **5** (1992), 449–470.
495. V. K. Murty, *Bounded and finite generation of arithmetic groups.* — Number Theory (Halifax, 1994), Amer. Math. Soc., Providence, RI **15** (1995) 249–261.
496. H. Nagao, *On* $\mathrm{GL}_2(R[x])$. — J. Inst. Polytechn. Osaka City Univ. ser. A **10** (1959), 117–121.
497. K. R. Nagarajan, M. P. Devaasahayam, and T. Soundararajan, *Products of three triangular matrices over commutative rings.* — Linear Algebra Applic. **348** (2002), 1–6.
498. M. Newman, *Integral matrices.* Academic Press. N. Y. (1972), 1–224.
499. M. Newman, *Matrix completion theorems.* — Proc. Amer. Math. Soc. **94**, (1985), 39–45.
500. M. Newman, *Unimodular commutators.* — Proc. Amer. Math. Soc. **101** (1987), 605–609.
501. O. T. O'Meara, *Finiteness on* $\mathrm{SL}_n\,/\,\mathrm{TL}_n$ *over Hasse domains for* $n \geq 4$. — Math. Z. **86**, No. 4 (1964), 273–284.
502. O. T. O'Meara, *On the finite generation of linear groups over Hasse domains.* — J. reine angew. Math. **217** (1965), 79–108.
503. O. T. O'Meara, *The automorphisms of the linear groups over any integral domain.* — J. reine angew. Math. **223** (1966), 56–100.
504. O. T. O'Meara, *The automorphisms of the standard symplectic group over any integral domain.* — J. reine angew. Math. **230** (1968), 104–138.
505. O. T. O'Meara, *The automorphisms of the orthogonal groups and their congruence subgroups over arithmetic domains.* — J. reine angew. Math. **238** (1969), 169–206.
506. O. T. O'Meara, *Group-theoretic characterization of transvections using CDC.* — Math. Z. **110** (1969), 385–394.
507. O. T. O'Meara, *The integral classical groups and their automorphisms.* — Proc. Symp. Pure Math. **20** (1971), 76–85.
508. O. T. O'Meara, *A general isomorphism theory for linear groups.* — J. Algebra **44** (1977), 93–142.
509. O. T. O'Meara, *A survey of the isomorphism theory of the classical groups.* — Ring theory and algebra. III. Dekker N. Y. (1980), 225–242.
510. O. T. O'Meara, H. Zassenhaus, *The automorphisms of the linear congruence groups over Dedekind domains.* — J. Number. Theory **1** (1969), 211–221.
511. A. A. Panin, *Intermediate semigroups are groups.* — Semigroup Forum (2011).
512. H. Park, *A realization algorithm for* $\mathrm{SL}_2(R[x_1,\ldots,x_m])$ *over the Euclidean domain.* — SIAM J. Matrix Anal. Appl. **21**, No. 1 (1999), 178–184.
513. H. Park, C. Woodburn, *An algorithmic proof of Suslin's stability theorem for polynomial rings.* — J. Algebra **178**, No. 1 (1995), 277–298.
514. V. M. Petechuk, *Isomorphisms between linear groups over division rings.* — Canad. J. Math. **45**, No. 5 (1993), 997–1008.
515. V. M. Petechuk, *Stability structure of linear group over rings.* — Mat. Studii **16**, No. 1 (2001), 13–24.
516. A. Pilkington, *The* $E_2(R)$*-normalized subgroups of* $\mathrm{GL}_2(R)$. I, II. — J. Algebra **172**, No. 2 (1995), 584–611; **177**, No. 3, 619–626.

517. E. Plotkin, *Stability theorems for* K*-functors for Chevalley groups.* — Proc. Conf. Non-Associative Algebras and Related Topics (Hiroshima – 1990) World Sci., London et al. (1991), 203–217.
518. E. Plotkin, *On the stability of* K_1*-functor for Chevalley groups of type* E_7. — J. Algebra **210** (1998), 67–85.
519. E. Plotkin, M. R. Stein, and N. Vavilov, *Stability of* K*-functors modeled on Chevalley groups, revisited.* — (2011) to appear.
520. B. Pollak, *On the structure of local orthogonal groups.* — Amer. J. Math. **88** (1966), 763–780.
521. B. Pollak, *Orthogonal groups over* $\mathbb{R}((\pi))$. — Amer. J. Math. **89** (1968), 214–230.
522. J. Pomfret, B. R. McDonald, *Automorphisms of* $\mathrm{GL}_n(R)$*, R a local ring.* — Trans. Amer. Math. Soc. **173** (1972), 379–388.
523. R. A. Rankin, *The modular group and its subgroups.* — Lectures at Ramanujan Institute, Madras (1968).
524. R. A. Rao, *An elementary transformation of a special unimodular vector to its top coefficient vector.* — Proc. Amer. Math. Soc. **93**, No. 1 (1985), 21–24.
525. R. A. Rao, *The Bass–Quillen conjecture in dimension three but characteristic* $\neq 2, 3$ *via a question of A. Suslin.* — Invent. Math. **93** (1988), 609–618.
526. R. A. Rao, *On some actions of stably elementary matrices on alternating matrices.* — Preprint TIFR (1989), 1–40.
527. R. A. Rao, *On completing unimodular polynomial vectors of length three.* — Trans. Amer. Math. Soc. **325**, No. 1 (1991), 231–239.
528. R. A. Rao, *An abelian group structure on orbits of "unimodular squares" in dimension* 3. — J. Algebra **210** (1998), 216–224.
529. R. A. Rao, W. der Kallen, *Improved stability for* SK_1 *and* WNS_d *of non-singular affine algebra.* — Astérisque **85** (1994), 411–420.
530. A. Rapinchuk, *Congruence subgroup problem for algebraic groups: old and new.* — Journées Arithmétiques, 1991 Astérisque No. 209 (1992), 73–84.
531. I. A. Rapinchuk, *On linear representations of Chevalley groups over commutative rings.* — arXiv: 1005.0422v1 [math.GR] (2010), 1–31.
532. N. S. Rege, *On certain classical groups over Hasse domains.* — Math. Z. **102** (1967), 120–157.
533. U. Rehmann, *Präsentationen von Chevalleygruppen über* $k[t]$. — Preprint Univ. Bielefeld (1975), 1–30.
534. U. Rehmann, *Zentrale Erweiterungen der speziellen linearen Gruppe eines Schiefkörpers.* — J. reine angew. Math. **301** (1978), 77–104.
535. U. Rehmann, *Kommutatoren in* $\mathrm{GL}_n(D)$. — Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag **778** (1980), 117–123.
536. U. Rehmann, *Central extensions of* SL_2 *over division rings and metaplectic problem.* — Contemp. Math. **55**, No. 2 (1986), 561–607.
537. U. Rehmann, C. Soulé, *Finitely presented groups of matrices.* — Lecture Notes Math., Springer-Verlag **551** (1976), 164–169.
538. U. Rehmann, U. Stuhler, *On* K_2 *of finite dimensional division algebras over arithmetical fields.* — Invent. Math. **50** (1978), 75–90.
539. I. Reiner, *A new type of automorphism of the general linear group over a ring.* — Ann. Math. **66** (1957), 461–466.

540. C. Riehm, *The structure of symplectic group over a valuation ring.* — Amer. J. Math. **88** (1966), 106–128.
541. C. R. Riehm, *Orthogonal groups over the integers of a local field.* I, II. — Amer. J. Math. **88** (1966), 763–780; **89** (1967), 549–577.
542. M. Roitman, *Completing unimodular rows to invertible matrices.* — J. Algebra **49** (1977), 206–211.
543. M. Roitman, *On unimodular rows.* – Proc. Amer. Math. Soc. **95** (1985), 184–188.
544. L. Rowen, *Ring theory.* (2011).
545. A. Sasane, *Stable ranks of Banach algebras of operator-valued analytic functions.* — Compl. Anal. Operator Theory **3** (2009), 323–330.
546. J.-P. Serre, *Amalgames et points fixes.* — Lecture Notes Math. **372** (1974), 633–640.
547. J. -P. Serre, *Trees.* Springer-Verlag, Berlin et al. (1980).
548. Y. Shalom, *Bounded generation and Kazhdan property* (T). — Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **90** (1999), 145–168.
549. Y. Shalom, *Explicit Kazhdan constants for representations of semisimple and arithmetic groups.* — Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **50**, No. 3 (2000), 833–863.
550. Y. Shalom, *The algebraisation of Kazhdan property* (T). — Intern. Congress Mathematicians **11** (2006), 1283–1310.
551. R. W. Sharpe, *On the structure of the unitary Steinberg group.* — Ann. Math. **96**, No. 3 (1972), 444–479.
552. R. W. Sharpe, *On the structure of the Steinberg group* $\mathrm{St}(\Lambda)$. — J. Algebra **68** (1981), 453–467.
553. J. R. Silvester, *On the* K_2 *of the free associative algebra.* — J. Algebra **26** (1973), 35–56.
554. J. R. Silvester, *A presentation of the* GL_n *of a semi-local ring.* — Lecture Notes Math. **966** (1982), 244–260.
555. A. Sivatsky, A. Stepanov, *On the word length of commutators in* $\mathrm{GL}_n(R)$. — K-theory **17** (1999), 295–302.
556. Th. Skolem, *Diophantische Gleichungen.* Springer, Berlin (1938).
557. R. E. Solazzi, *The automorphisms of certain subgroups of* $\mathrm{PGL}_n(V)$. — Ill. J. Math. **16** (1972), 330–348.
558. C. Soulé, *The cohomology of* $\mathrm{SL}_3(\mathbb{Z})$. — Topology **17** (1978), 1–22.
559. C. Soulé, *Presentation finie des groupes de Chevalley a coefficients dans un anneau.* — Publ. Math. Univ. Paris. VII (1978), 147–155.
560. C. Soulé, *Chevalley groups over polynomial rings.* — Homological group theory (Durham, 1977), London Math. Soc. Lect. Notes, Cambridge Univ. Press **36** (1979), 359–367.
561. C. Soulé, *An introduction to arithmetic groups.* — Frontiers in Number Theory, Physics, and Geometry. II, Springer, Berlin et al. (2007), 247–276.
562. S. Splitthoff, *Finite presentability of Steinberg groups and related Chevalley groups.* — Contemp. Math. **55**, II (1986), 635–687.
563. J. T. Stafford, *Stable structure of non-commutative Noetherian rings.* — J. Algebra **47** (1977), 244–267.
564. J. T. Stafford, *On the stable range of right Noetherian rings.* — Bull. London Math. Soc. **13** (1981), 39–41.

565. J. T. Stafford, *Absolute stable rank and quadratic forms over noncommutative rings.* — K-Theory **4** (1990), 121–130.
566. A. Stavrova, *Normal structure of maximal parabolic subgroups in Chevalley groups over commutative rings.* — Algebra Coll. **16**, No. 4 (2009), 631–648.
567. M. R. Stein, *Relativising functors on rings and algebraic* K*-theory.* — J. Algebra **19**, No. 1 (1971), 140–152.
568. M. R. Stein, *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **93**, No. 4 (1971), 965–1004.
569. M. R. Stein, *Stability theorems for* K_1*,* K_2 *and related functors modeled on Chevalley groups.* — Japan J. Math. **4**, No. 1 (1978), 77–108.
570. M. R. Stein, R. K. Dennis, K_2 *of radical ideals and semi-local rings revisited.* — Lecture Notes Math. **342** (1972), 281–303.
571. R. Steinberg, *Générateurs, relations et revêtements des groupes algébriques.* — Colloque sur la théorie des groupes algébriques (Bruxelles, 1962). — Guthier-Villar, Paris (1962), 113–127.
572. R. Steinberg, *Some consequences of elementary relations of* SL_n. — Contemp. Math. **45** (1985), 335–350.
573. A. Stepanov, *Universal localisation in algebraic groups.* — `http://alexei.stepanov.spb.ru/~publicat.html` (2010), to appear.
574. A. Stepanov, N. Vavilov, *Decomposition of transvections: a theme with variations.* — K-Theory **19** (2000), 109–153.
575. A. Stepanov, N. Vavilov, *On the length of commutators in Chevalley groups.* — Israel Math. J. (2011), 1–20.
576. U. Stuhler, *Zur Frage der endlichen Präsentierbarkeit gewisser arithmetischer Gruppen im Funktionenkörperfall.* — Math. Ann. **224** (1976), 217–232.
577. U. Stuhler, *Homological properties of certain arithmetic groups in the function field case.* — Invent. Math. **57** (1980), 263–281.
578. A. A. Suslin, *Stability in algebraic* K*-theory.* — Lecture Notes Math. **966** (1982), 304–333.
579. A. A. Suslin, *Mennicke symbols and their applications in the* K*-theory of fields.* — Lecture Notes Math. **966** (1982), 334–356.
580. A. A. Suslin, *Homology of* GL_n*, characteristic classes and Milnor's* K*-theory.* — Lecture Notes Math. **1046** (1984), 357–384.
581. K. Suzuki, *On the automorphisms of Chevalley groups over* p*-adic integer rings.* — Kumamoto J. Sci., Math. **16**, No. 1 (1984), 39–47.
582. R. G. Swan, *Generators and relations for certain special linear groups.* — Bull. Amer. Math. Soc. **74** (1968), 576–581.
583. R. G. Swan, *Generators and relations for certain special linear groups.* — Adv. Math. **6** (1971), 1–77.
584. R. G. Swan and L. N. Vaserstein, *On the absolute stable range of rings of continuous functions.* — Contemp. Math. **55**, No. II (1986), 689–692.
585. G. Taddei, *Invariance du sous-groupe symplectique élémentaire dans le groupe symplectique sur un anneau.* — C. R. Acad. Sci Paris, Sér I **295**, No. 2 (1982), 47–50.
586. G. Taddei, *Normalité des groupes élémentaire dans les groupes de Chevalley sur un anneau.* — Contemp. Math. **55** Part II (1986), 693–710.

587. Tang Guoping, *Hermitian groups and* K*-theory.* — K-Theory **13**, No. 3 (1998), 209–267.
588. Tang Xiangpu, *An Jianbei. The structure of symplectic groups over semi-local rings.* — Acta Math. Sinica. New Series **1** (1985), 1–15.
589. O. I. Tavgen', *Bounded generation of normal and twisted Chevalley groups over the rings of S-integers.* — Contemp. Math. **131**, No. 1 (1992), 409–421.
590. J. Tits, *Homomorphismes et automorphismes "abstraits" de groupes algébriques et arithmétiques.* — Congr. Intern. Math. (Nice, 1970) Gauthier-Villars, Paris (1971), 349–355.
591. J. Tits, *Homomorphisms "abstraits" de groupes de Lie.* — Convegno di Gruppi e Loro Rappresentazioni INDAM (Roma, 1972), Academic Press, London (1974), 479–499.
592. J. Tits, *Systèmes générateurs de groupes de congruences.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **283** (1976), 693–695.
593. M. F. Trittler, *Die Normalteiler symplektischer Gruppen über Bewertungsringen mit einer Restklassenkörper-Charakteristik* $\neq 2$. — Manuscripta Math. **103** (2000), 117–134.
594. R. Tuler, *Subgroups of* $\mathrm{SL}_2(\mathrm{Int})$ *generated by elementary matrices.* — Proc. Roy. Soc. Edinburgh, ser. A **88**, No. 1–2 (1981), 43–47.
595. L. N. Vaserstein, *On the normal subgroups of the* GL_n *of a ring.* — Springer Lecture Notes Math. **854** (1981), 454–465.
596. L. N. Vaserstein, *Bass's first stable range condition.* — J. Pure Appl. Algebra **34**, No. 2–3 (1984), 319–330.
597. L. N. Vaserstein, *Classical groups over rings.* — Canad. Math. Soc. Conf. Proc. **4** (1984), 131–140.
598. L. N. Vaserstein, *Normal subgroups of the general linear groups over von Neumann rings.* — Proc. Amer. Math. Soc. **96**, No. 2 (1986), 209–214.
599. L. N. Vaserstein, *Normal subgroups of the general linear groups over Banach algebras.* — J. Pure Appl. Algebra **41** (1986), 99–112.
600. L. N. Vaserstein, *An answer to the question of M. Newman on matrix completion.* — Proc. Amer. Math. Soc. **97**, No. 2 (1986), 189–196.
601. L. N. Vaserstein, *The subnormal structure of general linear groups.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **99** (1986), 425–431.
602. L. N. Vaserstein, *Operations on orbits of unimodular vectors.* — J. Algebra **100** (1986), 456–461.
603. L. N. Vaserstein, *On normal subgroups of Chevalley groups over commutative rings.* — Tôhoku Math. J. **36**, No. 5 (1986), 219–230.
604. L. N. Vaserstein, *Computation of* K_1 *via Mennicke symbols.* — Comm. Algebra **15** (1987), 611–656.
605. L. N. Vaserstein, *Subnormal subgroups of the general linear groups over Banach algebras.* — J. Pure Appl. Algebra **52** (1988), 187–195.
606. L. N. Vaserstein, *Normal subgroups of orthogonal groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **110**, No. 5 (1988), 955–973.
607. L. N. Vaserstein, *Reduction of a matrix depending on parameters to a diagonal form by addition operators.* — Proc. Amer. Math. Soc. **103**, No. 3 (1988), 741–746.

608. L. N. Vaserstein, *Normal subgroups of classical groups over rings and gauge groups.* — Contemp. Math. **83** (1989), 451–459.
609. L. N. Vaserstein, *Normal subgroups of symplectic groups over rings.* — K-Theory **2**, No. 5 (1989), 647–673.
610. L. N. Vaserstein, *Linear algebra and algebraic K-theory.* — Contemp. Math. **82** (1989), 191–197.
611. L. N. Vaserstein, *The subnormal structure of general linear groups over rings.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **108**, No. 2 (1990), 219–229.
612. L. N. Vaserstein, *On normal subgroups of* GL_2 *over rings with many units.* — Compositio Math. **74**, No. 2 (1990), 157–164.
613. L. N. Vaserstein, *On the Whitehead determinant for semi-local rings.* — J. Algebra **283** (2005), 690–699.
614. L. N. Vaserstein, *Polynomial parametrization for the solution of Diophantine equations and arithmetic groups.* — Ann. Math. **171**, No. 2 (2010), 979–1009.
615. L. N. Vaserstein, B. A. Magurn, *Prestabilization for* K_1 *of Banach algebras.* — Linear Algebra Appl. **95** (1987), 69–96.
616. L. N. Vaserstein, E. Wheland, *Factorization of invertible matrices over rings of stable rank one.* — J. Austral Math. Soc. ser. A **48**, No. 3 (1990), 455–460.
617. L. N. Vaserstein, E. Wheland, *Commutators and companion matrices over rings of stable rank* 1. — Linear Algebra Appl. **142** (1990), 263–277.
618. L. N. Vaserstein, You Hong, *Normal subgroups of classical groups over rings.* — J. Pure Appl. Algebra **105**, No. 1 (1995), 93–106.
619. N. Vavilov, *A note on the subnormal structure of general linear groups.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **107**, No. 2 (1990), 193–196.
620. N. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — Proc. Conf. Non-Associative Algebras and Related Topics (Hiroshima — 1990) World Sci., London et al. (1991), 219–335.
621. N. Vavilov, *Intermediate subgroups in Chevalley groups.* — Proc Conf. Groups of Lie Type and their Geometries (Como – 1993), Cambridge Univ. Press (1995), 233–280.
622. N. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rendiconti del Sem. Mat. Univ. Padova **204**, No. 1 (2000), 201–250.
623. N. Vavilov, *An* A_3*-proof of structure theorems for Chevalley groups of types* E_6 *and* E_7. — Intern. J. Algebra Comput. **17**, No. 5–6 (2007), 1–16.
624. N. Vavilov, E. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings.* I. *Elementary calculations.* — Acta Applicandae Math. **45**, No. 1 (1996), 73–113.
625. F. D. Veldkamp, *Projective planes over rings of stable rank* 2. — Geom. dedic. **11** (1981), 285–308.
626. F. D. Veldkamp, *Projective geometry over finite rings.* — Quaderni del Semin. di Geom. Combinat. Univ. Roma I "La Sapienza" No. 92 (1989), 1–39.
627. K. Vogtmann, *Spherical posets and homology stability for* $O_{n,n}$. — Topology **20**, No. 2 (1981), 119–132.
628. T. Vorst, *The general linear group of polynomial rings over regular rings.* — Comm. Algebra **9** (1981), 499–509.
629. J. B. Wagoner, *On* K_2 *of the Laurent polynomial ring.* — Amer. J. Math. **93** (1971), 123–138.

630. J. B. Wagoner, *Stability for homology of the general linear group of a local ring.* — Topology **15** (1976), 417–423.
631. Zhexian Wan, *On the automorphisms of linear groups over a non-commutative Euclidean ring of characteristic* $\neq 2$. — Sci. Record **1**, No. 1 (1957), 5–8.
632. Zhexian Wan, *On the automorphisms of linear groups over a non-commutative principal ideal domain of characteristic* $\neq 2$. — Sci. Sinica **7** (1958), 885–933.
633. Zhexian Wan, *Some recent progress on classical groups in China.* — Contemp. Math. **82** (1989), 221–230.
634. Zhexian Wan, Hongshuo Ren, *Automorphisms of two-dimensional linear groups over local rings of characteristic* 2. — Chinese Ann. Math. **4**, No. 4 (1983), 419–434.
635. Zhexian Wan, Xiaolong Wu, *On the second commutator subgroup of* $\mathrm{PGL}_2(\mathrm{Int})$. — Math. Rep. Acad. Sci. Canada **11**, No. 6 (1980), 303–308.
636. Chunsen Wang, *Automorphisms of linear groups over a class of rings.* — Chinese Ann. Math. **4**, No. 2 (1983), 263–269.
637. Luqun Wang, *On the standard form of normal subgroups of linear groups over rings.* — Chinese Ann. Math. **5**, No. 2 (1984), 229–238.
638. Luqun Wang, Yongzheng Zhang, GL_2 *over full rings.* — Chinese Ann. Math. **8**, No. 4 (1987), 434–439.
639. Renfa Wang, Hong You, *The structure of symplectic groups over semi-local rings.* — Chinese Ann. Math. ser. A **5** (1984), 33–40. (in Chinese)
640. W. P. Wardlaw, *Defining relations for certain integrally parametrized Chevalley groups.* — Pacif. J. Math. **40** (1972), 235–250.
641. W. C. Waterhouse, *Introduction to affine group schemes.* Springer-Verlag, N.Y. et al. (1979).
642. W. C. Waterhouse, *Automorphisms of* $\mathrm{GL}_n(R)$. — Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 347–351.
643. W. C. Waterhouse, *Automorphisms of quotients of* $\prod \mathrm{GL}(n_i)$. — Pacif. J. Math. **102** (1982), 221–233.
644. W. C. Waterhouse, *Automorphisms of* $\det(X_{ij})$*: the group scheme approach.* — Adv. Math. **65**, No. 2 (1987), 171–203.
645. C. Weibel, *Mennicke-type symbols for relative* K_2. — Lecture Notes Math. **1046** (1984), 451–464.
646. B. Weisfeiler, *On abstract homorphisms of anisotropic algebraic groups over real closed fields.* — J. Algebra **60** (1979), 485–519.
647. B. Weisfeiler, *Monomorphisms between subgroups of groups of type* G_2. — J. Algebra **68** (1981), 306–334.
648. B. Weisfeiler, *Abstract isomorphisms of simple algebraic groups split by quadratic extension.* — J. Algebra **68** (1981), 335–368.
649. B. Weisfeiler, *Abstract homomorphisms of big subgroups of algebraic groups.* Topics in the theory of algebraic groups, Notre Dame Math. Lectures. No. 10 (1982), 135–181.
650. M. Wendt, *On fibre sequence in motivic homotopy theory.* — Thesis Univ. Leipzig (2007), 1–165.
651. M. Wendt, $\mathbb{A}^1$*-homotopy of Chevalley groups.* — J. K-Theory **5**, No. 2 (2010), 245–287.

652. K. Weston, *On nilpotent class 2 groups and the Steinberg groups* $\mathrm{St}(3, R)$. — Arch. Math. **45** (1985), 207–210.
653. J. S. Wilson, *The normal and subnormal structure of general linear groups.* — Proc. Cambridge Philos. Soc. **71** (1972), 163–177.
654. D. Witte, *Products of similar matrices.* — Proc. Amer. Math. Soc. **126**, No. 4 (1998), 1005–1015.
655. D. Wright, *The amalgamated free product structure of* $\mathrm{GL}_2(K[x_1, \dots, x_n])$. — Bull. Amer. Math. Soc. **82**, No. 5 (1976), 724–726.
656. D. Wright, *The amalgamated free product structure of* $\mathrm{GL}_2(k[X_1, \dots, X_n])$ *and the weak Jacobian theorem for two variables.* — J. Pure Appl. Algebra **12**, No. 3 (1978), 235–251.
657. S. Yagunov, *On the homology of* GL_n *and the higher pre-Bloch groups.* — Canad. J. Math. **52**, No. 6 (2000), 1310–1338.
658. C. R. Yohe, *Triangular and diagonal forms for matrices over commutative noetherian rings.* — J. Algebra **6** (1967), 335–368.
659. Hong You, *Prestabilization for* $\mathrm{K}_1\mathrm{U}^{\varepsilon}$ *of* Λ*-2-fold rings.* — Chinese Sci. Bull. **37**, No. 5 (1992), 357–361.
660. Hong You, *Stabilization of unitary groups over polynomial rings.* — Chinese Ann. Math., Ser. B **16**, No. 2 (1995), 177–190.
661. Hong You, *Subgroups of classical groups normalised by relative elementary groups.* — J. Pure Appl. Algebra (2011), 1–16 (to appear).
662. Hong You, Sheng Chen, *Subrings in quadratic fields which are not universal for* GE_2. — Quart. J. Math. **54** (2003), 233–241.
663. Hong You, Shengkui Ye, *Prestability for quadratic* K_1 *of* Λ*-1-fold stable rings.* — J. Algebra **319** (2008), 2072–2081.
664. D. C. Youla, P. F. Pickel, *The Quillen–Suslin theorem and the structure of* n*-dimensional elementary polynomial matrices.* — IEEE Trans. Circuits Systems **31** (1984), 513–517.
665. Jiangguo Zha, *An embedding theorem between special linear groups over any fields.* — Chinese Ann. Math., Ser. B **16**, No. 4 (1995), 477–486.
666. Jiangguo Zha, *Homomorphisms between the Chevalley groups over any field of characeristic zero.* — Comm. Algebra **24**, No. 2 (1996), 659–703.
667. Jiangguo Zha, *Determination of homomorphisms between linear groups of the same degree over division rings.* — J. London Math. Soc. **53**, No. 3 (1996), 479–488.
668. Haiquan Zhang, Luqun Wang, *Normal subgroups of symplectic groups over* Φ*-surjective rings.* — Acta Math. Sinica **25** (1985), 270–278. (in Chinese)
669. Yongzheng Zhang, *The structure of two-dimensional linear groups over semilocal rings.* — Kexue Tongbao **26**, No. 23 (1981), 1469 (in Chinese).
670. Zuhong Zhang, *Lower* K*-theory of unitary groups.* Doktorarbeit Univ. Belfast (2007), 1–67.
671. Zuhong Zhang, *Stable sandwich classification theorem for classical-like groups.* — Math. Proc. Cambridge Phil. Soc. **143**, No. 3 (2007), 607–619.
672. Zuhong Zhang, *Subnormal structure of non-stable unitary groups over rings.* — J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 622–628.

673. Fang Zhou, Li Li, *A theorem on the generators of the general linear group over a local ring R.* — Dongbei Shida Xuebao No. 2 (1983), 123–127. (in Chinese).
674. R. Zimmert, *Zur* SL_2 *der ganzen Zahlen eines imaginärquadratischen Zahlkörpers.* — Inv. Math. **19** (1973), 73–81.

Vavilov N. A., Stepanov A. V. Linear groups over general rings. I. Generalities.

This paper is the first part of a systematic survey on the structure of classical groups over general rings. We intend to cover various proofs of the main structure theorems, commutator formulae, finiteness and stability conditions, stability and pre-stability theorems, nilpotency of K_1, centrality of K_2, automorphism and homomorphisms, etc. This first part covers background material such as one-sided inverses, elementary transformations, definitions of obvious subgroups, Bruhat and Gauss decompositions, relative subgroups, finitary phenomens, and transvections.

Поступило 17 августа 2011 г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nikolai-vavilov@yandex.ru

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия; Abdus Salam School
of Mathematical Sciences,
Lahore, Pakistan
E-mail: stepanov239@gmail.com