Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 394, 2011 г.

Н. А. Вавилов, Е. И. Ковач

SL_2-ФАКТОРИЗАЦИИ ГРУПП ШЕВАЛЛЕ

В настоящей заметке, представляющей собой курсовую работу второго автора, выполненную под руководством первого автора, мы доказываем несколько результатов о представлении групп Шевалле как произведений фундаментальных $\mathrm{SL}(2, R)$, обобщающих и усиливающих недавно опубликованные результаты.

1. Формулировка основных результатов

А именно, пусть Φ – приведенная неприводимая система корней, R – коммутативное кольцо, $G = G(\Phi, R)$ – односвязная группа Шевалле типа Φ над R. Тогда для любой подсистемы Δ системы Φ вложение $\Delta \subseteq \Phi$ индуцирует регулярное вложение $G(\Delta, R) \longrightarrow G(\Phi, R)$.

В случае, когда $R = K$ – поле, факторизации группы $G(\Phi, R)$ в терминах системных подгрупп $G(\Delta, R)$ и их сопряженных довольно интенсивно изучались, см., в частности, [14, 15, 17, 18]. Ясно, что из-за несюръективности отображения стабилизации на K_1, над кольцами группа $G(\Phi, R)$, вообще говоря, не порождается никакими системными подгруппами $G = G(\Delta, R)$ меньшего ранга.

Ключевые слова: группы Шевалле, фундаментальные SL_2, полупростые факторизации, кольца Безу, параболические подгруппы, ограниченное порождение.

Работа первого автора выполнялась в рамках проектов РФФИ 09-01-00784, “Эффективное порождение в группах типа Ли” (ПОМИ РАН), РФФИ 09-01-00878 “Надгруппы редуктивных групп в алгебраических группах над кольцами” (СПбГУ), РФФИ 10-01-90016 “Исследование структуры форм редуктивных групп и поведения малых унипотентных элементов в представлениях алгебраических групп” (СПбГУ), и РФФИ 10-01-92651 “Высшие законы композиции, алгебраическая K-теория и исключительные группы” (СПбГУ). Кроме того, первый автор, частично пользовался поддержкой грантов РФФИ 09-01-00762 (Сибирский Федеральный Университет), РФФИ 09-01-91333 (ПОМИ РАН) и РФФИ 11-01-00756 (РГПУ). Кроме того, работа обоих авторов поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского государственного Университета, “Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической K-теории”.

Это значит, что над кольцами естественно либо слегка модифицировать задачу, перейдя от групп Шевалле $G(\Phi, R)$ и $G(\Delta, R)$ к соответствующим элементарным подгруппам $E(\Phi, R)$ и $E(\Delta, R)$, либо накладывать на кольцо R какие-то достаточно сильные ограничения.

В настоящей работе нас будет интересовать исключительно случай, когда $\Delta = \{\pm\alpha\} \cong A_1$. В этом случае группа $G_\alpha = G(\Delta, R)$ изоморфна $\mathrm{SL}(2, R)$, а соответствующее вложение будет обозначаться через ϕ_a. На элементарной группе $E(2, R)$ вложение ϕ_a задается посредством

$$\begin{pmatrix} 1 & \xi \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto x_\alpha(\xi), \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \xi & 1 \end{pmatrix} \mapsto x_{-\alpha}(\xi).$$

Чтобы отличать такие вложения $\mathrm{SL}(2, R)$ от остальных, их обычно называет фундаментальными, при этом сама группа G_α называется *фундаментальной* $\mathrm{SL}(2, R)$. Стоит отметить, что если группа $G(\Phi, R)$ не предполагается односязной, то, вообще говоря, G_α могут быть изоморфны $\mathrm{PGL}(2, R)$.

В работе Мартина Либека, Николая Николова и Анера Шалева [15] отмечается, что из унитреугольной факторизации $G = UU^-UU^-U$ длины 5, полученной в [5], сразу вытекает, что группа Шевалле $G(\Phi, q)$ нормального типа над конечным полем представляется как произведение $5N$ копий фундаментальных $\mathrm{SL}(2, q)$, где $N = |\Phi^+|$.

Из полученной в работе первого автора, Андрея Смоленского и Сури [3] унитреугольной факторизации длины 4 сразу вытекает следующий более общий и более точный результат, [3, Следствие 2].

Теорема 1. *Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней, а R – коммутативное кольцо такое, что $\mathrm{sr}(R) = 1$. Тогда односвязная элементарная группа Шевалле $E(\Phi, R)$ представляется в виде произведения $4N$ копий фундаментальных $\mathrm{SL}(2, R)$.*

В настоящей заметке мы докажем, что из разложения Брюа сразу вытекает, что для случая поля этот результат можно усилить.

Теорема 2. *Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней, а K – поле. Тогда группа Шевалле $G(\Phi, K)$ есть произведение не более чем $3N$ копий фундаментальных $\mathrm{SL}(2, K)$.*

На самом деле, и этот результат также легко далее усилить и обобщить. Для простоты мы ограничимся здесь случаем $\Phi = \mathrm{A}_l$.

Теорема 3. *Пусть R – кольцо Безу. Тогда специальная линейная группа* $\mathrm{SL}(n, R)$ *есть произведение не более чем* $2N = n^2 - n$ *копий фундаментальных* $\mathrm{SL}(2, K)$.

В действительности мы располагаем доказательством аналогичного результата для групп Шевалле других нормальных типов. Оно основано на тех же идеях, но требует несколько более детальных вычислений с использованием минимальных представлений и будет проведено в следующей работе авторов.

Аналогичные результаты для скрученных групп Шевалле, с более точными чем в [15] оценками, также справедливы над произвольными полями и некоторыми классами колец. Однако, в то время как случай групп нормальных типов в принципе мало отличается от рассмотренного здесь случая $\mathrm{SL}(n, R)$, для скрученных групп доказательство *заметно* сложнее с технической точки зрения, и мы планируем посвятить ему отдельную статью.

2. Основные обозначения

Все наши обозначения, относящиеся к группам Шевалле, совершенно стандартны и совпадают с теми, которые использовались в [23–25], где можно найти также много дальнейших ссылок.

Пусть Φ – приведенная неприводимая система корней ранга l, а $\mathcal{P}$ – решетка, лежащая между решеткой корней $\mathcal{Q}(\Phi)$ и решеткой весов $\mathcal{P}(\Phi)$. Мы фиксируем на Φ некоторый порядок и обозначаем через $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$, Φ^+ и Φ^- множества простых, положительных и отрицательных корней, отвечающие этому порядку. Далее, пусть $W = W(\Phi)$ – группа Вейля системы корней Φ. Для корня $a \in \Phi$ обозначим через $w_\alpha \in W$ соответствующее корневое отражение. Пусть, кроме того, R – коммутативное кольцо с единицей и мультипликативной группой R^*.

По этим данным можно построить группу Шевалле $G = G_{\mathcal{P}}(\Phi, R)$, являющуюся группой R-точек некоторой аффинной групповой схемы $G_{\mathcal{P}}(\Phi, -)$, называемой схемой Шевалле–Демазюра. В дальнейшем мы обычно будем считать, что $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\Phi)$ и опускать указание на $\mathcal{P}$ в обозначениях. Таким образом, $G(\Phi, R)$ будет обозначать *односвязную* группу Шевалле типа Φ над R.

В дальнейшем мы фиксируем некоторый расщепимый максимальный тор $T(\Phi, -)$ схемы $G(\Phi, -)$, и полагаем $T = T(\Phi, R)$. Как обычно,

X_α, $\alpha \in \Phi$, обозначает унипотентную корневую подгруппу в G, элементарную относительно T. Мы фиксируем изоморфизмы $x_\alpha : R \mapsto X_\alpha$, так что $X_\alpha = \{x_\alpha(\xi) \mid \xi \in R\}$ связаны между собой коммутационной формулой Шевалле, см. [4, 7, 25]. Через $E(\Phi, R)$ обозначается элементарная подгруппа в $G(\Phi, R)$, порожденная всеми корневыми подгруппами X_α, $\alpha \in \Phi$.

Над полем – или любым другим коммутативным кольцом, для которого $\mathrm{SK}_1(2, R) = 1$ – фундаментальная группа $G_\alpha \cong \mathrm{SL}(2, K)$ порождается двумя противоположными корневыми подгруппами X_α и $X_{-\alpha}$. Однако, вообще говоря, группа G_α строго больше, чем $\langle X_\alpha, X_{-\alpha}\rangle$.

В дальнейшем элементы $x_\alpha(\xi)$ называются корневыми унипотентами. Пусть теперь $\alpha \in \Phi$ и $\varepsilon \in K^*$. Как обычно, мы полагаем $h_\alpha(\varepsilon) = w_\alpha(\varepsilon)w_\alpha(1)^{-1}$, где $w_\alpha(\varepsilon) = x_\alpha(\varepsilon)x_{-\alpha}(-\varepsilon^{-1})x_\alpha(\varepsilon)$. Элементы $h_\alpha(\varepsilon)$ называются полупростыми корневыми элементами. Для односвязной группы

$$T = T(\Phi, R) = \langle h_\alpha(\varepsilon),\ \alpha \in \Phi,\ \varepsilon \in R^*\rangle.$$

Пусть теперь $N = N(\Phi, K)$ – нормализатор тора $T = T(\Phi, K)$ *в смысле теории алгебраических групп*, т.е. подгруппа, порожденная $T = T(\Phi, K)$ и всеми элементами $w_\alpha(1)$, $\alpha \in \Phi$. Фактор-группа N/T канонически изоморфна группе Вейля W, и мы зафиксируем для каждого $w \in W$ *какой-то* его прообраз n_w в N. Обычно в качестве прообраза элемента $w = w_{\beta_1} \dots w_{\beta_m} \in W$, $\beta_1, \dots, \beta_m \in \Phi$, мы будем выбирать элемент вида $n_w = w_{\beta_1}(\pm 1) \dots w_{\beta_m}(\pm 1)$. Знаки здесь тоже можно уточнить, но нам это не понадобится.

Пусть, далее, $B = B(\Phi, R)$ и $B^- = B^-(\Phi, R)$ – пара противоположных борелевских подгрупп, содержащих $T = T(\Phi, R)$, стандартная относительно фиксированного порядка. Напомним, что B и B^- являются полупрямыми произведениями $B = T \leftthreetimes U$, а $B^- = T \leftthreetimes U^-$, тора T и своих унипотентных радикалов

$$U = U(\Phi, R) = \big\langle x_\alpha(\xi),\ \alpha \in \Phi^+,\ \xi \in R\big\rangle,$$

$$U^- = U^-(\Phi, R) = \big\langle x_\alpha(\xi),\ \alpha \in \Phi^-,\ \xi \in R\big\rangle.$$

Здесь, как обычно, для подмножества X группы G через $\langle X\rangle$ обозначается порожденная X подгруппа в G. Иными словами, утверждается, что $B = TU = UT$, причем $U \trianglelefteq B$ и $T \cap U = 1$. Аналогичные утверждения верны с заменой B и U на B^- и U^-.

Имея дело с линейным случаем $G = \mathrm{SL}(n, R)$, т.е. односвязной группой Шевалле типа $\Phi = \mathrm{A}_{n-1}$, мы обычно будем переключаться со стандартных обозначений теории алгебраических групп на обычные матричные обозначения. В частности, e обозначает единичную матрицу, e_{ij}, $1 \le i,\ j \le n$, – стандартную матричную единицу, т. е. матрицу, у которой в позиции (i, j) стоит 1, и нули во всех остальных позициях. Матричный элемент матрицы g в позиции (i, j) обозначается через g_{ij}, а матричный элемент обратной матрицы g^{-1} – через g'_{ij}. Через g_{i*} обозначается i-я строка матрицы g, а через g_{*j} – ее j-й столбец.

Корни системы Φ интерпретируются в этом случае как позиции $n \times n$ матриц вне главной диагонали, т.е. как пары (i, j), $1 \le i \ne j \le n$. Корневые элементы $x_\alpha(\xi) = x_{(i,j)}(\xi)$ группы $\mathrm{SL}(n, R)$ – это обычные линейные трансвекции $t_{ij}(\xi) = e + \xi e_{ij}$, $1 \le i \ne j \le n$, $\xi \in R$. В том же стиле модифицируются и все остальные обозначения. Так, например, корневая подгруппа и фундаментальная SL_2, отвечающие корню $\alpha = (i, j)$, будут теперь обозначаться не X_α и G_α, как раньше, а X_{ij} и G_{ij} и т. д. Элементарная подгруппа группы $\mathrm{SL}(n, R)$ обозначается через $E(n, R)$, она порождена всеми корневыми подгруппами X_{ij}, $i \ne j$.

3. Доказательство теоремы 2

Следующее утверждение настолько просто, красиво и естественно, что мы не сомневаемся в том, что оно хорошо известно в теории групп Кокстера.

Лемма 1. *Пусть $T = \{t_1, \dots, t_N\}$ – множество корневых отражений группы Вейля $W = W(\Phi)$, в произвольном порядке. Тогда каждый элемент $w \in W$ представляется подсловом слова $t_1 \dots t_N$.*

Поскольку мы не знаем никакой очевидной ссылки на это утверждение, приведем его доказательство. Наше первоначальное доказательство относилось к случаю некоторого определенного порядка на T – этого достаточно для доказательства теоремы 2 – и было основано на следующей идее, которую мы проиллюстрируем на примере группы $W(A_{n-1}) = S_n$.

Ведем доказательство индукцией по n. Корневыми отражениями группы S_n являются транспозиции $T = \{(ij), 1 \le i < j \le n\}$. Расположим транспозиции в следующем порядке: вначале все транспозиции (ij), $1 \le i < j \le n-1$, в некотором порядке, который будет уточнен на следующем шаге, а потом все транспозиции (in), $1 \le i \le n-1$.

Пусть теперь $\pi \in S_n$. Если $\pi(n) = n$, то $\pi \in S_{n-1}$ и мы можем применить индукционное предположение. Если $\pi(n) = i \neq n$, то умножая π на транспозицию вида (in), мы получим элемент S_{n-1} и снова можем применить индукционное предположение.

Это рассуждение легко переносится на все группы Вейля, кроме $W(\mathrm{E}_8)$, этот последний случай требует чуть более детального анализа. Однако Алексей Ананьевский сразу предложил следующее гораздо более простое доказательство этой леммы.

Доказательство. Свяжем с фиксированным линейным порядком на T следующий порядок на множестве слов в алфавите T. Пусть $w_1 = t_{i_1} \dots t_{i_m}$ и $w_2 = t_{j_1} \dots t_{j_n}$. Будем считать, что $w_1 < w_2$, если $m < n$ или если $m = n$, но $i_1 < j_1$ или $m = n$, $i_1 = j_1$, но $i_2 < j_2$ и так далее.

Каждый элемент группы Вейля $w \in W$ допускает представление как произведение корневых отражений. Среди всех таких представлений выберем наименьшее, относительно описанного выше порядка. Утверждается, что это представление имеет вид $w = t_{i_1} \dots t_{i_m}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_m$. В самом деле, допустим, вопреки ожиданиям, что $i_k \geq i_{k+1}$ для какого-то $1 \leq k \leq m-1$.

- Если $i_k = i_{k+1}$, то

$$w = t_{i_1} \dots t_{i_m} = t_{i_1} \dots t_{i_{k-1}} t_{i_{k+2}} \dots t_{i_m},$$

так что исходное представление не являлось приведенным.

- С другой стороны, если $i_k > i_{k+1}$, то

$$w = t_{i_1} \dots t_{i_k} t_{i_{k+1}} \dots t_{i_m} = t_{i_1} \dots t_{i_{k-1}} t_{i_{k+1}} (t_{i_{k+1}} t_{i_k} t_{i_{k+1}}) t_{i_{k+2}} \dots t_{i_m},$$

так что исходное представление не являлось минимальным относительно описанного выше порядка. □

Доказательство теоремы 2. Покажем, что теорема 2 сразу вытекает из разложения Брюа. Напомним, что разложение Брюа утверждает, что каждый элемент g группы Шевалле $G = G(\Phi, K)$ представляется в виде udn_wv, где $u, v \in U(\Phi, K)$, $d \in T(\Phi, K)$, $w \in W$.

- Как хорошо известно,

$$u = \prod_{\alpha \in \Phi^+} x_\alpha(u_\alpha) \in \prod_{\alpha \in \Phi^+} X_\alpha \leq \prod_{\alpha \in \Phi^+} G_\alpha,$$

для любого фиксированного линейного порядка на множестве положительных корней. То же, конечно, относится к v.

• С другой стороны,

$$d = h_{\alpha_1}(\varepsilon_1)\dots h_{\alpha_l}(\varepsilon_l)$$

для некоторых $\varepsilon_i \in K^*$ и, так как полупростой корневой элемент $h_\beta(\varepsilon)$ нормализует все подгруппы G_α, то множители $h_{\alpha_i}(\varepsilon_i)$ можно распихать по соответствующим G_{α_i}, не увеличивая длину разложения.

• Наконец, как мы только что доказали, для любого фиксированного линейного порядка на Φ^+ каждый элемент группы Вейля представляется как произведение корневых отражений $w_{\beta_1}\dots w_{\beta_m}$, где $\beta_1 \prec \beta_2 \prec \dots \prec \beta_m$. Это значит, что

$$n_w = w_{\beta_1}(\pm 1)\dots w_{\beta_m}(\pm 1) \in \prod_{\alpha\in\Phi^+} G_\alpha,$$

где подгруппы G_α перемножаются в предписанном порядке.

Таким образом, каждый из элементов ud, n_w, v лежит в произведении N фундаментальных $\mathrm{SL}(2,K)$ в предписанном порядке, что и дает нам оценку $3N$. □

4. Доказательство теоремы 3

Напомним, что кольцо R называется кольцом Безу, если каждый конечно порожденный идеал в нем главный. Одно из основных свойств колец Безу состоит в том, что взаимная простота в них совпадает с унимодулярностью. Иными словами, для любых элементов $a_1,\dots,a_n \in R$ имеет место эквивалентность

$$a_1R + \dots + a_nR = R \qquad \Longleftrightarrow \qquad \gcd(a_1,\dots,a_n) = 1.$$

В частности, если $(a_1,\dots,a_n) \in {}^nR$ *произвольная* ненулевая строка длины n, а $d = \gcd(a_1,\dots,a_n)$, то строка $(a_1/d,\dots,a_n/d)$ унимодулярна.

Следующее утверждение очевидно и общеизвестно.

Лемма 2. *Пусть R – произвольное коммутативное кольцо. Тогда каждая унимодулярная строка $(a,b) \in {}^2R$ длины 2 дополняется до матрицы из $\mathrm{SL}(2,R)$.*

В самом деле, если $ax+by=1$, для некоторых $x,y\in R$, то в качестве такой матрицы можно взять $\begin{pmatrix} y & -x \\ a & b \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,R)$.

Предостережение. Вообще говоря, даже для колец главных идеалов $\mathrm{SL}(2,R)$ здесь нельзя заменить на $E(2,R)$. Первые примеры колец

главных идеалов, для которых $\mathrm{SK}_1(R) \neq 1$, были построены Фридрихом Ишенбеком [11] и Дэниэлом Грэйсоном [9].

С учетом того, что, как мы только что заметили, для колец Безу

$$a_1R + \ldots + a_nR = R \qquad \Longleftrightarrow \qquad a_1R + \gcd(a_2, \ldots, a_n)R = R,$$

отсюда по индукции сразу вытекает следующий результат, являющийся ключевым шагом в доказательстве теоремы 3.

Лемма 3. *Пусть R – кольцо Безу. Тогда для любой унимодулярной строки $u = (u_1, \ldots, u_n) \in {}^nR$ существует матрица $g \in G_{1n}G_{2n} \ldots G_{n-1,n}$, последняя строка которой g_{n*} совпадает с u.*

Как именно нужно строить матрицу g, должно быть совершенно ясно из следующего вычисления, которое мы для наглядности проведем при $n = 5$ – общий случай ничем не отличается! – состоящего в том, что последняя строка произведения

$$\begin{pmatrix} * & 0 & 0 & 0 & * \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ r & 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & u & 0 & 0 & v \end{pmatrix}$$

$$\cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & w & 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & * \\ 0 & 0 & 0 & y & z \end{pmatrix}$$

равна $(r, su, svw, svxy, svxz)$.

Однако, для приложений к другим группам нам понадобится следующий чуть более точный результат.

Лемма 4. *Пусть R – кольцо Безу. Тогда для любой ненулевой строки $u = (u_1, \ldots, u_n) \in {}^nR$ существует матрица $g \in G_{1n}G_{2n} \ldots G_{n-1,n}$, такая, что*

$$(u_1, \ldots, u_n)g = (0, \ldots, 0, d),$$

где $d = \gcd(u_1, \ldots, u_n)$.

Доказательство. Будем вести доказательство индукцией по n.

• База индукции $n = 2$ классически известна из теории Капланского элементарных делителей. Тем не менее, воспроизведем для полноты доказательство, так как это почти в точности лемма 2. В самом

деле, пусть $(a,b) \in {}^2R$, $d = \gcd(a,b)$. Так как $\gcd(a/d, b/d) = 1$, то строка $(a/d, b/d)$ унимодулярна и, значит, дополняется до матрицы $g = \begin{pmatrix} y & -x \\ a/d & b/d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2,R)$, где $ax + by = d$. Тогда

$$(a,b)g^{-1} = (a,b)\begin{pmatrix} b/d & x \\ -a/d & y \end{pmatrix} = (0,d),$$

как и утверждалось.

• Пусть теперь $n \geq 3$. Как мы только что доказали, найдется такая матрица $h \in G_{1n}$, что

$$(a_1, \dots, a_n)h = (0, a_2, \dots, a_{n-1}, c),$$

где $c = \gcd(a_1, a_n)$. Ясно, что наибольший общий делитель элементов строки $(a_2, \dots, a_{n-1}, c)$ равен

$$\gcd(a_2, \dots, a_{n-1}, \gcd(a_1, a_n)) = \gcd(a_1, \dots, a_n) = d,$$

причем эта строка имеет длину $n-1$. Таким образом, мы можем применить к ней индукционное предположение и заключить, что существует $g \in G_{2n}G_{3n}\dots G_{n-1,n}$ такая, что

$$(a_1, \dots, a_n)hg = (0, a_2, \dots, a_{n-1}, c)g = (0, \dots, 0, d),$$

причем $hg \in G_{1n}G_{2n}\dots G_{n-1,n}$, как и утверждалось. □

С использованием техники весовых диаграмм [23, 24] это рассуждение легко переносится на все группы Шевалле нормальных типов, это будет проделано в следующей работе авторов.

Теперь у нас все готово, чтобы завершить доказательство теоремы 3.

Доказательство теоремы 3. Будем вести доказательство индукцией по n. При $n = 2$ доказывать нечего, так как $G = \mathrm{SL}(2,R)$ совпадает с $G_{12} = \mathrm{SL}(2,R)$.

Пусть поэтому $n \geq 3$ и $g \in \mathrm{SL}(n,R)$. Последняя строка g_{n*} матрицы g унимодулярна. Поэтому по предыдущей лемме найдется такая матрица $h \in G_{1n}G_{2n}\dots G_{n-1,n}$, что

$$(gh)_{n*} = g_{n*}h = (0, \dots, 0, 1).$$

Умножая теперь матрицу gh слева на матрицу

$$u = t_{1n}(-(gh)_{1n})\dots t_{n-1,n}(-(gh)_{n-1,n}) \in G_{1n}G_{2n}\dots G_{n-1,n},$$

мы получим матрицу $ugh \in \mathrm{SL}(n-1, R)$, к которой можно применить индукционное предположение и заключить, что ugh лежит в произведении не более $n^2 - 3n + 2$ фундаментальных $\mathrm{SL}(2, R)$. Осталось вспомнить, что u и h лежат в произведении $n-1$ фундаментальных $\mathrm{SL}(2, R)$ каждая и просуммировать количество сомножителей. □

5. Заключительные замечания

В заключение статьи отметим несколько возможных приложений, обобщений и близких вопросов. Первоначально задача построения коротких SL_2 факторизаций возникла в работе [15] в связи с построением однородных семейств экспандеров, связанных с конечными простыми группами. Дело в том, что рост групп $\mathrm{SL}(2, q)$ по отношению к произвольным системам образующих детально изучен, см., в частности, [6, 10]. А работа Мартина Кассабова, Алекса Любоцкого и Николая Николова [13] в основном сводит рассмотрение произвольных конечных групп типа Ли в этом контексте к случаю $\mathrm{SL}(2, q)$.

Вычисление длины *факторизаций* $G(\Phi, R)$ в терминах фундаментальных $\mathrm{SL}(2, R)$, которым мы занимались до сих пор, не следует путать с вычислением *ширины* $G(\Phi, R)$ по отношению к фундаментальным $\mathrm{SL}(2, R)$.

• В первом случае предлагается найти наименьшее L такое, что

$$G = G_{\beta_1} \dots G_{\beta_L},$$

корни $\beta_1, \dots, \beta_L$ одни и те же для всех $g \in G$.

• Во втором предлагается найти наименьшее M такое, что любое $g \in G$ принадлежит *какому-то* произведению вида

$$g \in G_{\beta_1} \dots G_{\beta_M},$$

где корни $\beta_1, \dots, \beta_M$ и их порядок могут зависеть от g.

Иными словами, в этом случае G не обязана сама быть произведением фундаментальных $\mathrm{SL}(2, R)$ в количестве M штук, утверждается лишь, что она содержится в *объединении* таких произведений.

Ясно, что $M \le L$. Ясно также, что в случае поля для M естественно ожидать значения порядка N. То, что это так для $\mathrm{SL}(3, K)$, классически известно. Морально элементы фундаментальных $\mathrm{SL}(2, K)$ в этом случае играют роль *углов Эйлера*.

В этом направлении легко доказать следующий частичный результат. Пусть K – поле. Тогда ширина специальной линейной группы

$\mathrm{SL}(n,R)$ относительно фундаментальных $\mathrm{SL}(2,K)$ не превосходит $N = (n^2-n)/2$. Мы собираемся вернуться к общему случаю в одной из следующих работ.

В действительности, для колец рассматривавшаяся в настоящей работе задача теснейшим образом связана с вопросами ограниченного порождения, по отношению к различным естественным системам образующих, которым посвящено *огромное* количество работ. Мы не будем здесь пытаться давать обзор этой темы, а отошлем читателя к [3, 16, 20, 21], где можно найти много дальнейших ссылок и формулировку нескольких нерешенных задач.

В частности, из нашей теоремы 3 вытекает, что для колец Безу группа $\mathrm{SL}(n,R)$ имеет ограниченную (небольшую!) ширину относительно $\mathrm{SL}(2,R)$. Поучительно сравнить этот результат с классическим результатом Вильеберда ван дер Каллена [12], утверждающим, что даже для колец главных идеалов группа $\mathrm{SL}(n,R)$ не обязана иметь конечной ширины по отношению к элементарным образующим. Простейшим таким примером служит группа $\mathrm{SL}(3,\mathbb{C}[t])$. См. также [8] по поводу чуть более простого доказательства чуть более общего факта.

Упомянем в этой связи следующий чрезвычайно интересный конкретный вопрос, предложеный Сури.

Проблема. *Доказать, что группа* $\mathrm{SL}(n,\mathbb{Q}[t])$ *не имеет ограниченной ширины по отношению к элементарным образующим.*

В качестве еще одного наблюдения на эту тему отметим, что из недавней работы Леонида Васерштейна [22] видно, что для $\mathrm{SL}(2,R)$ естественно говорить об ограниченном порождении не в терминах элементарных образующих, а в терминах образующих ядра предстабилизации $\widetilde{E}(2,R)$, т.е. матриц вида $(e+xy)(e+yx)^{-1}$.

Отметим, что для колец размерности >1 нельзя ожидать, что отображение $\mathrm{SK}_1(2,R) \longrightarrow \mathrm{K}_1(\Phi,R)$ сюръективно, поэтому сама группа Шевалле $G(\Phi,R)$ не допускает, вообще говоря, никаких факторизаций в терминах SL_2 – or, for that matter, в терминах каких-либо групп меньших рангов. Поэтому, для начала, нужно заменить здесь группы Шевалле на их элементарные подгруппы.

Даже для этой ситуации естественно ставить вопрос о факторизации группы $G(\Phi,R)$ в терминах системных подгрупп $G(\Delta,R)$, какого-то не слишком маленького ранга, а вовсе не в терминах SL_2.

При выполнении подходящих условий стабильности короткие факторизации такого рода получаются из параболических факторизаций

типа Денниса–Васерштейна, построенных в недавних работах первого автора и Сергея Синчука [1, 2, 19]. При этом даже для конечного поля получаются значительно более точные оценки, чем в работах [17, 18].

Наконец, было бы чрезвычайно интересно разобраться с факторизациями $G(\Phi, R)$ в терминах не обязательно фундаментальных SL_2, но это, по-видимому, совсем непростая задача.

Авторы искренне благодарны Алексею Ананьевскому, который предложил приведенное выше простое доказательство леммы 1, и Сури за чрезвычайно вдохновляющие и продуктивные обсуждения вопросов конечного и ограниченного порождения.

Литература

1. Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *Разложения типа Денниса–Васерштейна.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 48–60.
2. Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *Параболические факторизации расщепимых классических групп.* — Алгебра и Анализ **23** (2011), No. 4, 1–30.
3. Н. А. Вавилов, А. В. Смоленский, Б. Сури, *Унитреугольные факторизации групп Шевалле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 17–47.
4. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* Мир, М., 1975.
5. L. Babai, N. Nikolov, L. Pyber, *Product growth and mixing in finite groups.* — In: 19th Annual ACM–SIAM Symposium on Discrete Algorithms, ACM–SIAM (2008), pp. 248–257.
6. J. Bourgain, A. Gamburd, *Uniform expansion bounds for Cayley graphs of* $SL_2(\mathbb{F}_p)$. — Ann. Math. **167** (2008), 625–642.
7. R. W. Carter, *Simple groups of Lie type.* Wiley, London et al., 1972.
8. I. V. Erovenko, $SL_n(F[x])$ *is not boundedly generated by elementary matrices: explicit proof.* — Electronic J. Linear Algebra **11** (2004), 162–167.
9. D. R. Grayson, SK_1 *of an interesting principal ideal domain.* — J. Pure Appl. Algebra **20** (1981), 157–163.
10. H. A. Helfgott, *Growth and generation in* $SL_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. — Ann. Math. **167** (2008), 601–623.
11. F. Ischebeck, *Hauptidealringe mit nichttrivialer* SK_1*-Gruppe.* — Arch. Math. **35** (1980), 138–139.
12. W. van der Kallen, $SL_3(\mathbb{C}[x])$ *does not have bounded word length.* — Springer Lect. Notes Math. **966** (1982), 357–361.
13. M. Kassabov, A. Lubotzky, N. Nikolov, *Finite simple groups as expanders.* — Proc. Nat. Acad. Sci. USA **103** (2006), 6116–6119.
14. M. Liebeck, N. Nikolov, A. Shalev, *A conjecture on product decompositions in simple groups.* — Groups Geom. Dynamics **4** (2010), 799–812.
15. M. Liebeck, N. Nikolov, A. Shalev, *Groups of Lie type as products of* SL_2 *subgroups.* — J. Algebra **326** (2011), 201–207.

16. D. W. Morris, *Bounded generation of* $\mathrm{SL}(n, A)$ (*after D. Carter, G. Keller, and E. Paige*). — New York J. Math. **13** (2007), 383–421.
17. N. Nikolov, *A product decomposition for the classical quasisimple groups.* — J. Group Theory **10** (2007), 43–53.
18. N. Nikolov, L. Pyber *Product decomposition of quasirandom groups and a Jordan type theorem* (2007). — `arXiv:math/0703343`.
19. S. Sinchuk, N. Vavilov, *Parabolic factorisations of exceptional Chevalley groups* (to appear).
20. A. Stepanov, N. Vavilov, *On the length of commutators in Chevalley groups.* — Israel Math. J. (2011), 1–20.
21. O. I. Tavgen, *Bounded generation of normal and twisted Chevalley groups over the rings of S-integers.* — Contemp. Math. **131** (1992), No. 1, 409–421.
22. L. N. Vaserstein, *Polynomial parametrization for the solution of Diophantine equations and arithmetic groups.* — Ann. Math. **171** (2010), No. 2, 979–1009.
23. N. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* — In: Proc. Conf. Non-associative Algebras and Related Topics (Hiroshima – 1990), World Sci. Publ. London et al. (1991), pp. 219–335.
24. N. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rendiconti Sem. Mat. Univ. Padova **204** (2000), No. 1, 201–250.
25. N. Vavilov, E. Plotkin, *Chevalley groups over commutative rings.* I. *Elementary calculations.* — Acta Applicandae Math. **45** (1996), 73–115.

Vavilov N. A., Kovach E. I. SL_2-factorisations of Chevalley groups.

Recently Liebeck, Nikolov, and Shalev noticed that finite Chevalley groups admit fundamental SL_2-factorizations of length 5N, where N is the number of positive roots. From a recent paper by Smolensky, Sury, and Vavilov it follows that elementary Chevalley groups over rings of stable rank 1 admit such factorizations of length $4N$. In the present paper, we establish two further improvements of these results. Over any field the bound here can be improved to $3N$. On the other hand, for $\mathrm{SL}(n, R)$, over a Bezout ring R, we further improve the bound to $2N = n^2 - n$.

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `nikolai-vavilov@yandex.ru`
`evdokim.kovach@gmail.com`

Поступило 30 июня 2011 г.