Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 394, 2011 г.

**М. А. Антипов, А. О. Звонарёва**

# СТАБИЛЬНЫЕ АВТОЭКВИВАЛЕНТНОСТИ САМОИНЪЕКТИВНЫХ АЛГЕБР КОНЕЧНОГО ТИПА ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

## 1. Введение

В статье Ридтманн (см. [1]) приведена полная классификация классов стабильной эквивалентности самоинъективных алгебр конечного типа представления над алгебраически замкнутым полем $k$. Класс стабильной эквивалентности такой алгебры определяется ее стабильным колчаном Ауслендера–Райтен. Все возможные варианты стабильного колчана Ауслендера–Райтен – это колчаны вида $\mathbb{Z}T/G$, где $T$ – диаграмма Дынкина, а $G$ – допустимая группа автоморфизмов колчана $\mathbb{Z}T$, все допустимые группы описаны в работе Ридманн. В данной работе вычислена некоторая подгруппа группы автоэквивалентностей стабильной категории для всех стандартных самоинъективных алгебр конечного типа представления (которую мы называем группой мономиальных автоэквивалентностей), а также ее факторгруппа по модулю естественного изоморфизма. (При определенных ограничениях на колчан с соотношениями эта подгруппа совпадает со всей группой автоэквивалентностей). Кроме того, некоторые результаты удалось обобщить на mesh-категории колчанов $\mathbb{Z}T/G$, где $T$ – произвольное дерево, а группа $G$ порождена автоморфизмом переноса $\tau$.

Авторы выражают свою благодарность Юрию Волкову за ценные замечания.

## 2. Мономиальные автоэквивалентности

Пусть $Q$ – колчан, $kQ/I$ – $k$-линейная категория путей колчана с некоторыми соотношениями. Будем называть автоэквивалентность $F$ этой категории *мономиальной*, если для всякой стрелки $\bar{e}$ в колчане $Q$ имеем $F(\bar{e}) = c\bar{f}$, где $\bar{f}$ – стрелка, $c \in k$. В частности, если рассматривать стабильную категорию алгебры как mesh-категорию ее

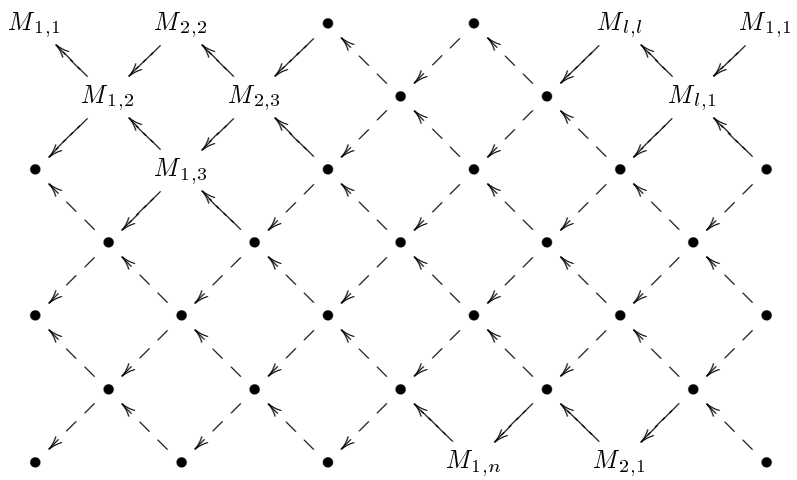
*Ключевые слова*: самоинъективные алгебры, стабильная категория, конечный тип представления.

Первый из авторов пользовался поддержкой гранта РФФИ 10-01-00635.

стабильного колчана Ауслендера–Райтен (см. [1], [2, пункт 2.4]), можно говорить о мономиальных эквивалентностях стабильной категории алгебры конечного типа представления. В некоторых случаях для любых неразложимых модулей $X, Y$ имеем $\dim\mathrm{Hom}(X,Y) \leq 1$, поэтому для таких алгебр всякая автоэквивалентность является мономиальной.

## 3. Алгебры Накаямы

На протяжении всей статьи будем обозначать $\mathrm{Stmod}(\Lambda)$ стабильную категорию алгебры $\Lambda$. Рассмотрим самоинъективную алгебру $A_n^l$ типа $A_n$, колчан категории $\mathrm{Stmod}(A_n^l)$ которой имеет вид $\mathbb{Z}A_n/\tau^l$, где $\tau$ – перенос Ауслендера–Райтен. Будем обозначать этот колчан $\Gamma_s(A_n^l)$, он приведен на рисунке:




Мы вычислим группу мономиальных автоэквивалентностей скелета категории $\mathrm{Stmod}(A_n^l)$ (далее будем обозначать эту группу $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l)$). Также нам понадобятся следующие обозначения: рассмотрим подгруппу $\mathrm{Triv}(A_n^l)$ в группе мономиальных автоэквивалентностей $\mathrm{Stmod}(A_n^l)$. Подгруппа $\mathrm{Triv}(A_n^l)$ – это подгруппа автоэквивалентностей, естественно изоморфных тождественной. Обозначим $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l)$ группу мономиальных стабильных автоэквивалентностей по модулю естественного изоморфизма, то есть $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) = \mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l)/\mathrm{Triv}(A_n^l)$. В дальнейшем нам понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.** *Пусть $E(\Gamma)$ – множество стрелок графа $\Gamma$. $G_0 = \{f : E(\Gamma) \to k^*\}$ – группа с поточечным умножением. Пусть $G$ – подгруппа в $G_0$ такая, что существует $r$ стрелок, значения на которых однозначно определяют любой элемент $G$. Тогда $G \simeq (k^*)^r$.*

**Предложение 1.** *Группа мономиальных автоэквивалентностей категории $\mathrm{Stmod}(A_n^l)$ имеет вид: $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq C_{2l} \ltimes (k^*)^{nl}$, если $n$ четно, либо $n$ и $l$ нечетно, и $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq (C_2 \times C_l) \ltimes (k^*)^{nl}$, если $n$ нечетно, а $l$ четно.*

**Доказательство.** Группа $G = \mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l)$ действует на множестве классов изоморфизма неразложимых $A_n^l$-модулей (т.е., на множестве вершин соответствующего AR-колчана). Мы покажем,что $G$ содержит регулярную относительно этого действия подгруппу, изоморфную группе $G_1 = \mathrm{Aut}\Gamma_s(A_n^l)$ автоморфизмов ориентированного графа $\Gamma_s(A_n^l)$, что стабилизатор $G_2$ произвольного элемента является нормальной подгруппой в $G$ (что влечет $G \simeq G_1 \ltimes G_2$) и вычислим эти подгруппы.

Как известно, каждому ромбику из $\Gamma_s(A_n^l)$ вида

$$\begin{tikzcd}
 & M_{i+1,j} \arrow[dl, "\beta_i"'] & \\
M_{i,j} & & M_{i+1,j+1} \arrow[ul, "\alpha_i"'] \arrow[dl, "\gamma_i"] \\
 & Mi,j+1 \arrow[ul, "\delta_i"] &
\end{tikzcd}$$

соответствует почти расщепляющаяся точная последовательность

$$M_{i+1,j+1} \longrightarrow M_{i+1,j} \bigoplus M_{i,j+1} \longrightarrow M_{i,j}\ .$$

То есть в колчане $\Gamma_s(A_n^l)$ есть соотношения вида $\alpha_i\beta_i + \gamma_i\delta_i = 0$, и других соотношений нет (например, см. [3, пункт 4.6]). Зафиксируем представителей классов изоморфизма неразложимых модулей и выделим по одному неприводимому морфизму между каждыми двумя соседними модулями в колчане (так, чтобы они удовлетворяли указанным выше соотношениям). Из вида этих соотношений (а именно, из их $G_1$-инвариантности) следует, что каждый автоморфизм колчана однозначно поднимается до автоэквивалентности категории, при

которой выделенные морфизмы переходят в выделенные. Ясно, что такие морфизмы образуют подгруппу в $G$, изоморфную $G_1$.

Вычислим группу $G_1$. Понятно, что множество крайних вершин (крайняя вершина – это вершина степени два) инвариантно относительно любого автоморфизма. Также понятно, что автоморфизм этого графа однозначно определяется образом одной крайней вершины. Таким образом, группа $G_1$ имеет порядок $2l$.

Эта группа порождается элементами $\tau$ (морфизм, индуцированный переносом) и $\rho$, таким, что $\rho(M_{1,1}) = M_{1,n}$, эти элементы коммутируют, причем $\rho^2 = \tau^{n-1}$. Выясним, когда $G_1$ циклична: $G_1 =< \varphi >$, где $\varphi = \rho\tau^k$. Это выполнено, если при некотором целом $p$ верно равенство: $(\rho\tau^p)^2 = \tau$, то есть сравнение $n-1+2p \equiv 1 (\mathrm{mod}\ l)$ разрешимо, что имеет место тогда и только тогда, когда $n$ четно, либо $n$ и $l$ одновременно нечетны. В этих случаях группа $G_1$ изоморфна $C_{2l}$.

Теперь рассмотрим случай, когда $n$ нечетно, а $l$ четно. Понятно, что эта группа не циклична. Рассмотрим морфизм $\varphi$ такой, что $\varphi(M_{1,1}) = M_{q,q-1}$, где $q \equiv (n-1)/2 (\mathrm{mod}\ l)$. следовательно $\varphi(M_{q,q-1}) = M_{l,l}$ и $\varphi^2 = 1$. Порядок морфизма, индуцированного $\tau$, равен $l$. Понятно, что $\tau$ и $\varphi$ коммутируют и других соотношений между ними нет. Они порождают всю группу $G_1$, так как ее порядок равен $2l$, таким образом эта группа изоморфна группе $C_2 \times C_l$.

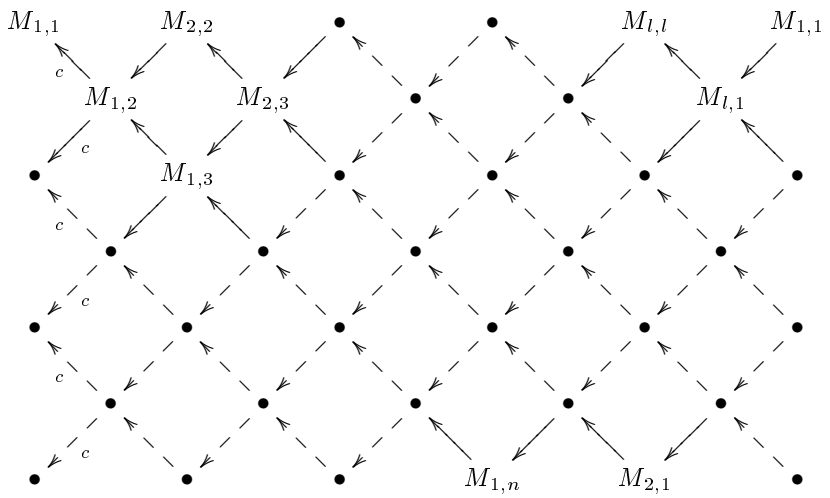
Вычислим стабилизатор $S$ объектов категории $\mathrm{Stmod}(A_n^l)$ в рассматриваемой группе, то есть группу мономиальных автоэквивалентностей, действие которых на объектах тождественно. Заметим, что элемент $F \in S$ однозначно определяется набором ненулевых констант $\{k_f\}$ таких, что $F(f) = k_f f$ (где $f$ пробегает множество неприводимых морфизмов). Поэтому $S \subseteq (k^*)^N$, где $N$ – число стрелок в $\Gamma_s(A_n^l)$.

Для того, чтобы вычислить стабилизатор $S$, необходимо и достаточно вычислить число $r$ из леммы 1. Расстановку констант на $\Gamma_s(A_n^l)$ можно выбрать следующим образом: расставим константы на верхнем зигзаге произвольно (мы можем это сделать, так как не существует соотношений, содержащих только эти стрелки); на следующем зигзаге каждая пара стрелок входит в один ромбик (у которого на двух верхних стрелках константы уже расставлены), следовательно, можно отметить стрелки через одну. В итоге получаем, что первый зигзаг вносит вклад $2l$, каждый следующий – $l$, всего зигзагов $n-1$. Пусть $\mathrm{St}(M), \mathrm{St}(N)$ – стабилизаторы произвольных неразложимых объектов $M, N$, тогда $\mathrm{St}(M) = \mathrm{St}(N)$. Тогда, поскольку $g\mathrm{St}(M)g^{-1} = \mathrm{St}(g(M))$

для всякого $g \in G$, $S$ нормальна в $G$. По лемме 1 для любого $M$ имеем: $\mathrm{St}(M) \simeq (k^*)^{nl}$. Тогда (в силу замечаний, сделанных в начале доказательства) искомая группа автоэквивалентностей $G$ изоморфна $G_1 \ltimes G_2 \simeq C_{2l} \ltimes (k^*)^{nl}$, если $n$ четно, либо $n$ и $l$ нечетны, и изоморфна $(C_2 \times C_l) \ltimes (k^*)^{nl}$, если $n$ нечетно, а $l$ четно. $\square$

**Предложение 2.** $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq C_{2l} \ltimes k^*$. *если $n$ четно, либо $n$ и $l$ нечетно, и* $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq (C_2 \times C_l) \ltimes k^*$, *если $n$ нечетно, а $l$ четно.*

**Доказательство.** Пусть $F$ – произвольный функтор из $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l)$, тождественный на объектах (вершинах $\Gamma_s(A_n^l)$). Для $F$ установим существование и единственность естественного изоморфизма с функтором $F'$, который домножает $n-1$ стрелку на элемент $c \in k^*$, а все остальные стрелки домножает на 1 следующим образом:




а именно, установим существование и единственность элемента $c \in k^*$. $F$ домножает стрелки $\Gamma_s(A_n^l)$ на произвольные элементы $k^*$ в соответствии с соотношениями в $\Gamma_s(A_n^l)$. Рассмотрим верхний зигзаг

где $a_{1,j} \in k^*$ – константы, на которые происходит умножение при действии $F$. Посмотрим, как естественное преобразование действует на объектах, входящих в верхний зигзаг.

$$\begin{tikzcd}
M_{1,1} \arrow[d, "b_1"] & M_{1,2} \arrow[l, "a_{1,2l}"'] \arrow[d, "b_{2l}"] & M_{2,2} \arrow[l, "a_{1,2l-1}"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & M_{l,1} \arrow[l] \arrow[d, "b_2"] & M_{1,1} \arrow[l, "a_{1,1}"'] \arrow[d, "b_1"] \\
M_{1,1} & M_{1,2} \arrow[l, "c"'] & M_{2,2} \arrow[l, "1"'] & \cdots \arrow[l] & M_{l,1} \arrow[l] & M_{1,1} \arrow[l, "1"']
\end{tikzcd}$$

То есть, должны выполняться соотношения:

$$b_1 = a_{1,1}b_2,\ b_2 = a_{1,2}b_3,\ \ldots,\ b_{2l-1} = a_{1,2l-1}b_{2l},\ b_{2l}c = a_{1,2l}b_1.$$

Отсюда получаем, что

$$c = \prod_{i=1}^{2l} a_{1,i}, \quad b_i = \frac{b_1}{a_{1,1} \cdot \ldots \cdot a_{1,i-1}}, \quad i = 2, 3, \ldots, 2l,$$

причем $b_1 \in k^*$ можно выбрать произвольно. Вычислим, как действовует естественное преобразование на элементах из следующего зигзага. $-1$ расставлены в соответствии с соотношениями в $\Gamma_s(A_n^l)$.

$$\begin{tikzcd}
M_{l,2} \arrow[d, "d_1"] & M_{1,2} \arrow[l, "a_{2,2l}"'] \arrow[d, "d_{2l}"] & M_{1,3} \arrow[l, "a_{2,2l-1}"'] \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & M_{l,1} \arrow[l] \arrow[d, "d_2"] & M_{l,2} \arrow[l, "a_{2,1}"'] \arrow[d, "d_1"] \\
M_{l,2} & M_{1,2} \arrow[l, "c"'] & M_{1,3} \arrow[l, "-1"'] & \cdots \arrow[l] & M_{l,1} \arrow[l, "1"'] & M_{2,1} \arrow[l, "-1"']
\end{tikzcd}$$

$d_i$ удовлетворяют почти таким же соотношениям:

$$-d_1 = a_{2,1}d_2,\ d_2 = a_{2,2}d_3,\ \ldots,\ -d_{2l-1} = a_{2,2l-1}d_{2l},\ d_{2l}c = a_{2,2l}d_1.$$

Следовательно

$$c = (-1)^l \prod_{i=1}^{2l} a_{2,i}, \quad d_i = (-1)^{l+i} \frac{d_1}{a_{2,1} \cdot \ldots \cdot a_{2,i-1}},$$
$$i = 2, \ldots, 2l, \quad d_1 \in k^*.$$

Поскольку $a_{2,2i} = -\dfrac{a_{1,2i}a_{1,2i+1}}{a_{2,2i+1}}$, то

$$(-1)^l \prod_{i=1}^{2l} a_{2,i} \;=\; (-1)^{2l} \prod_{i=1}^{2l} a_{1,i} \;=\; \prod_{i=1}^{2l} a_{1,i}.$$

Понятно, что за $n-1$ шаг мы найдем естественное преобразование, которое задает нужный изоморфизм функторов. (Заметим, что произвольная коммутативная диаграмма, выполнение которой требуется для проверки того, что искомый изоморфизм функторов – это естественное преобразование, получается из приведенных диаграмм склейкой). Таким образом, меняя базис в одном модуле, мы можем сделать константу на одной стрелке равной 1 или $-1$, но только если модуль не является концом уже зафиксированного морфизма. Так же понятно, что $F'$ не изоморфен тождественному функтору при $c \neq 1$, так как $c$ определяется однозначно. В итоге получаем, что группа $\mathrm{Triv}(A_n^l)$ имеет вид $(k^*)^{nl-1}$, а в силу леммы 1 имеем: $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq C_{2l} \ltimes k^*$, если $n$ четно, либо $n$ и $l$ нечетно, и $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq (C_2 \times C_l) \ltimes k^*$, если $n$ нечетно, а $l$ четно. $\square$

Обобщим этот результат на более широкий класс mesh-категорий.

## 4. Mesh-категории

Рассмотрим аддитивную категорию, заданную колчаном со сдвигом вида $\mathbb{Z}T/\tau^l$, где $T$ – произвольное дерево, на ребрах которого выбрана ориентация, $\tau$ – перенос (см. [1]). Будем обозначать $\mathrm{Aut}_0^{\mathrm{mon}}(\mathbb{Z}T/\tau^l)$ группу мономиальных автоэквивалентностей категории $\mathbb{Z}T/\tau^l$, оставляющих на месте ее объекты. Обозначим через $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(\mathbb{Z}T/\tau^l)$ группу мономиальных автоэквивалентностей категории $\mathbb{Z}T/\tau^l$, тождественных на объектах, по модулю естественного изоморфизма. Если же в качестве дерева $T$ взять диаграмму Дынкина, а через $T^l$ обозначить класс самоинъективных алгебр со стабильным колчаном $\mathbb{Z}T/\tau^l$, то, вычислив группы $\mathrm{Aut}_0^{\mathrm{mon}}(\mathbb{Z}T/\tau^l)$ и $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(\mathbb{Z}T/\tau^l)$, мы сможем для соответствующих самоинъективных алгебр конечного типа представления вычислить группы мономиальных стабильных автоэквивалентностей и группы мономиальных стабильных автоэквивалентностей по модулю естественного изоморфизма. Будем обозначать эти группы $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(T^l)$ и $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(T^l)$ соответственно.

**Предложение 3.** $\mathrm{Aut}_0^{\mathrm{mon}}(\mathbb{Z}T/\tau^l) \simeq (k^*)^{l(m+m_1-2)}$, *где* $m$ *– количество вершин графа* $T$, $m_1$ *– количество вершин графа* $T$ *степени* 1.

**Доказательство.** Рассмотрим граф $T$ подробнее. Хорошо известно, что mesh-категория и, соответственно, группа ее автоэквивалентностей не зависят от ориентации дерева $T$. Таким образом, можно считать, что в дереве выбран корень и все стрелки ориентированы от корня.

Вычислим степень $d$, в которой $k^*$ входит в $\mathrm{Aut}_0^{\mathrm{mon}}(\mathbb{Z}T/\tau^l)$.

Рассмотрим 2 случая: обозначим $n_0$ степень корня $v$. Либо $n_0 = 1$, либо $n_0 > 1$.

Если степень корня равна единице, то ячейка, соответствующая корню, вырождается, и в нее входят только две стрелки, функтор может домножать эти стрелки на любые обратимые константы. В таком случае корень вносит вклад $2l$.

Если степень корня больше 1, то ячейка, порождающая соотношения, не вырождается, в нее входит $2n_0$ стрелок. Мы можем домножить на произвольные обратимые константы все стрелки, кроме одной: она отвечает за выполнение соотношений. Таким образом корень вносит вклад $l(2n_0 - 1)$.

Рассмотрим вершины $v_1, \ldots, v_{n_0}$ первого уровня (соседи $v$): обозначим через $n_{1,1}, n_{1,2}, \ldots, n_{1,n_0'}$ количество детей вершин первого уровня, где $n_0'$ – количество вершин первого уровня, степень которых больше 1 (то есть количество вершин, у которых есть дети). Каждая вершина порождает соотношения, причем константы, на которые домножается часть стрелок, уже зафиксированы на предыдущем шаге. Остается $2n_{1,i}$ стрелки на каждую вершину, одна стрелка должна гарантировать выполнение соотношений. В итоге, вершины первого уровня вносят вклад $l\sum\limits_{i=1}^{n_0'}(2n_{1,i} - 1) = l\Big(\sum\limits_{i=1}^{n_0'} 2n_{1,i} - n_0'\Big)$.

Понятно, что спускаясь вниз на один уровень на каждом шаге, мы обойдем все вершины графа за $t$ шагов, где $t$ – количество уровней. Обозначим через $n_i$, $i = 0, \ldots, t-1$, количество вершин $i+1$ уровня, через $n_i'$ количество вершин $i+1$ уровня, степень которых $> 1$. $n_1 = \sum\limits_{i=1}^{n_0'} n_{1,i}$ количество вершин второго уровня. Следовательно,

$$d = l(2n_0 + 2n_1 - n_0' + 2n_2 - n_1' + \ldots + 2n_{t-1} - n_{t-2}'), \text{ при } n_0 = 1,$$

$$d = l(2n_0 - 1 + 2n_1 - n_0' + 2n_2 - n_1' + \ldots + 2n_{t-1} - n_{t-2}'), \text{ при } n_0 > 1.$$

Обозначим через $m_1$ количество вершин степени 1, через $m$ – количество всех вершин дерева. В итоге, в обоих случаях $d = l(m + m_1 - 2)$. Пользуясь леммой 1, получаем, что $\mathrm{Aut}_0^{\mathrm{mon}}(\mathbb{Z}T/\tau^l) \simeq (k^*)^{l(m+m_1-2)}$. □

**Предложение 4.** $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(\mathbb{Z}T/\tau^l) \simeq (k^*)^{l(m_1-2)+1}$.

**Доказательство.** Приведем произвольный функтор к виду, аналогичному $F'$ (из доказательства предложения 2). Делая замену переменных в объектах, соответствующих вершинам нулевого и первого уровня $\mathbb{Z}T/\tau^l$, можно добиться того, чтобы на первом зигзаге осталась произвольная константа в случае $n_0 = 1$, и $l(n_0 - 2) + 1$ произвольных констант при $n_0 > 1$. Заменой базисов объектов второго уровня, можно добиться того, что в обоих случаях останется $l(n_1 - n_0')$ констант. Обозначим $d'$ степень, в которой $k^*$ входит в группу $\mathrm{Out}_0(\mathbb{Z}T/\tau^l)$. Тогда

$$d' = 1 + l(n_1 - n_0') + \ldots + l(n_{t-1} - n_{t-2}') = 1 + l(m_1 - 2), \text{ при } n_0 = 1,$$

$$d' = 1 + l(n_0 - 2) + l(n_1 - n_0') + \cdots + l(n_{t-1} - n_{t-2}') = 1 + l(m_1 - 2), \text{ при } n_0 > 1.$$

□

**Следствие 1.** $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(D_n^l) \simeq (S_2^l \times C_l) \ltimes (k^*)^{l+1}$, *при* $n \geq 5$.

**Доказательство.** Вычислим группу мономиальных автоэквивалентностей по модулю естественного изоморфизма категории $\mathrm{Stmod}(D_n^l)$ с колчаном Ауслендера-Райтен $\Gamma_s(D_n^l) \simeq \mathbb{Z}D_n/\tau^l$. Пользуясь предложением 4, получаем, что $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(D_n^l) \simeq (k^*)^{l+1}$.

Вычислим группу $\mathrm{Aut}\Gamma_s(D_n^l)$ автоморфизмов графа $\mathbb{Z}D_n/\tau^l$. В данном случае крайние вершины (вершины степени 2) делятся на два типа: вершины, соседние с вершиной степени 2, вершины соседние с вершиной степени 3 в $D_n$. Рассмотрим автоморфизм $\varphi$, переставляющий вершины первого типа по циклу: $< \varphi > \simeq C_l$. Пусть зафиксирован некоторый поворот $\varphi^k$. Для каждой вершины $x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_l, y_l$ второго типа ($x_i, y_i$ принадлежат одному экземпляру $D_n$) существует два варианта:

$$\psi_i(x_i) = x_{i+k}, \quad \psi_i(y_i) = y_{i+k},$$
$$\psi_i(x_i) = y_{i+k}, \quad \psi_i(y_i) = x_{i+k},$$

где $i \in \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$. В итоге получаем $\mathrm{Aut}\Gamma_s(D_n^l) \simeq S_2^l \times C_l$. □

**Следствие 2.** $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(D_n^l) \simeq (S_2^l \times C_l) \ltimes (k^*)^{l(n+1)}$, *при* $n \geq 5$.

**Следствие 3.** $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(D_4^l) \simeq (S_3^l \times C_l) \ltimes (k^*)^{l+1}$.

**Доказательство.** Данный случай полностью аналогичен предыдущему за исключением того, что все три крайние вершины можно переставлять между собой (вершина степени 3 должна переходить в вершину степени 3). □

**Следствие 4.** $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(D_4^l) \simeq (S_3^l \times C_l) \ltimes (k^*)^{5l}$.

**Следствие 5.** $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(E_6^l) \simeq (S_2 \times C_l) \ltimes (k^*)^{l+1}$.

**Доказательство.** Вычислим группу $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(E_6^l)$ категории $\mathrm{Stmod}(E_6^l)$ с колчаном Ауслендера-Райтен $\Gamma_s(E_6^l) \simeq \mathbb{Z}E_6/\tau^l$. Пользуясь предложением 4, получаем, что $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(E_6^l) \simeq (k^*)^{l+1}$.

Элемент из группы $\mathrm{Aut}\Gamma_s(E_6^l)$ автоморфизмов графа $\mathbb{Z}E_6/\tau^l$ однозначно определяется поворотом вершины, смежной с вершиной степени 3, и перестановкой двух других вершин, смежных с вершиной степени 3. Следовательно, $\mathrm{Aut}\Gamma_s(E_6^l) \simeq S_2 \times C_l$. □

**Следствие 6.** $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(E_6^l) \simeq (S_2 \times C_l) \ltimes (k^*)^{7l}$.

**Следствие 7.** $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(E_7^l) \simeq C_l \ltimes (k^*)^{l+1}$.

**Доказательство.** Вычислим группу $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(E_7^l)$. Пользуясь предложением 4, получаем: $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(E_7^l) \simeq (k^*)^{l+1}$.

Рассмотрим группу $\mathrm{Aut}\Gamma_s(E_7^l)$ автоморфизмов графа $\mathbb{Z}E_7/\tau^l$. В данном случае автоморфизм однозначно определяется образом одной крайней вершины, так как у $E_7$ нет нетривиальных автоморфизмов. Таким образом, $\mathrm{Aut}\Gamma_s(E_7^l) \simeq C_l$. □

**Следствие 8.** $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(E_7^l) \simeq C_l \ltimes (k^*)^{8l}$.

**Следствие 9.** $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(E_8^l) \simeq C_l \ltimes (k^*)^{l+1}$.

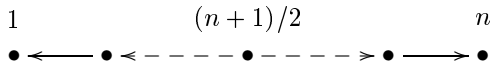
**Доказательство.** Этот случай полностью аналогичен предыдущему. □

**Следствие 10.** $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(E_8^l) \simeq C_l \ltimes (k^*)^{9l}$.

## 5. Алгебры Мёбиуса

Сначала разберем случай алгебр типа $A_n$, где $n$ – нечетно. Обозначим $A_n^l$ класс самоинъективных алгебр со стабильным AR-колчаном $\Gamma_s(A_n^l) \simeq \mathbb{Z}A_n/\tau^l\varphi$, где $\varphi$ – автоморфизм колчана $\mathbb{Z}A_n$ такой, что

$\varphi(i) = n+1-i$, где $i$ – номер вершины в $A_n$. В этом случае $A_n$ удобнее ориентировать от центра:




**Предложение 5.** *Группа мономиальных автоэквивалентностей категории* $\mathrm{Stmod}(A_n^l)$ *имеет вид* $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq C_{2l} \ltimes (k^*)^{nl}$*; группа мономиальных автоэквивалентностей по модулю естественного изоморфизма имеет вид* $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq C_{2l} \ltimes k^*$.

**Доказательство.** Легко видеть, что $\Gamma_s(A_n^l)$ имеет форму ленты Мёбиуса, у которой $2l$ крайних вершин. Вычислим группу $\mathrm{Aut}\Gamma_s(A_n^l)$ автоморфизмов графа. Как и прежде, образ крайней вершины при автоморфизме – крайняя вершина и этот образ полностью определяет автоморфизм графа, следовательно $|\mathrm{Aut}\Gamma_s(A_n^l)| \leqslant 2l$. Рассмотрим автоморфизмы $\bar{\varphi}$, $\bar{\tau}$, индуцированные $\varphi$ и $\tau$ соответственно. Заметим, что $\bar{\tau}^l = \bar{\varphi}$, откуда $\mathrm{ord}(\bar{\tau}) = 2l$. Получаем: $\mathrm{Aut}\Gamma_s(A_n^l) \simeq C_{2l}$.

Вычислим $\mathrm{Aut}_0^{\mathrm{mon}}(A_n^l)$ – группу мономиальных автоэквивалентностей, тождественных на объектах. Для этого нужно найти число $r$ из леммы 1. Расстановку констант на $\Gamma_s(A_n^l)$ можно выбрать следующим образом: расставим константы на стрелках, входящих в ряд из центральных ромбиков (то есть на стрелках между вершинами с номерами $(n+1)/2$, $(n+1)/2 \pm 1$) так, чтобы они удовлетворяли соответствующим соотношениям, это вносит вклад $3l$. Следующий зигзаг содержит вершины с номерами $(n+1)/2 \pm 1$, $(n+1)/2 \pm 2$ и опоясывает центральный ряд с обеих сторон. Он вносит вклад $2l$. Всего таких зигзагов $(n-3)/2$. Получаем, что $r = 3l + 2l(n-3)/2 = nl$, $\mathrm{Aut}_0^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq (k^*)^{nl}$, $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq C_{2l} \ltimes (k^*)^{nl}$.

Перейдем к вычислению $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l)$. Заметим, что достаточно вычислить $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(A_n^l)$. Мы докажем, что $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq k^*$. Покажем, как привести произвольный функтор $F$ из $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(A_n^l)$ к виду, аналогичному $F'$ из доказательства предложения 2. Делая замену базиса в объектах, принадлежащих ряду из центральных ромбиков, можно добиться того, что на стрелках, входящих в этот ряд, останется только одна произвольная константа $c$. Поочередно меняя базисы в объектах из опоясывающих зигзагов, за $(n-3)/2$ шагов найдем нужный естественный изоморфизм функторов. Точно так же, как и в доказательстве предложения 2, устанавливаем, что функтор, полученный

таким способом, не изоморфен тождественному при $c \neq 1$. Получаем, что $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq C_{2l} \ltimes (k^*)$. $\square$

Теперь перейдем к случаю четного $n$. Обозначим через $A_n^l$ класс самоинъективных алгебр со стабильным AR-колчаном вида $\Gamma_s(A_n^l) \simeq \mathbb{Z}A_n/\rho^l$, где допустимая группа автоморфизмов $\mathbb{Z}A_n$ порождена нечетной степенью $\rho$ и имеет вид $< \rho^l >$, где $\rho(i) = n+1-i$, $\rho^2 = \tau$, а $i$ – номер вершины в $A_n$, $l > 1$. $A_n$ ориентировано от 1 к $n$.

**Предложение 6.** *Группа мономиальных автоэквивалентностей категории* $\mathrm{Stmod}(A_n^l)$ *имеет вид* $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq C_l \ltimes (k^*)^{nl/2}$*; группа мономиальных автоэквивалентностей по модулю естественного изоморфизма имеет вид* $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq C_l \ltimes k^*$.

**Доказательство.** $\Gamma_s(A_n^l)$ имеет форму ленты Мёбиуса, у которой $l$ крайних вершин. Вычисление групп $\mathrm{Aut}\Gamma_s(A_n^l)$ и $\mathrm{Aut}_0^{\mathrm{mon}}(A_n^l)$ проводится аналогично случаю $\mathbb{Z}A_f/\tau^g\varphi$ (где $f$ нечетно):

$$\mathrm{Aut}\Gamma_s(A_n^l) \simeq C_l,$$

$$\mathrm{Aut}_0^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq (k^*)^{nl/2},$$

откуда получаем, что

$$\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq C_l \ltimes (k^*)^{nl/2}.$$

Проверка того, что $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(A_n^l) \simeq k^*$, также производится аналогично случаю $\mathbb{Z}A_f/\tau^g\varphi$ (где $f$ нечетно). Поэтому имеем

$$\mathrm{Out}_s(A_n^l)^{\mathrm{mon}} \simeq C_l \ltimes k^*.$$

$\square$

## 6. Оставшиеся случаи

Обозначим $E_6^l$ класс самоинъективных алгебр со стабильным AR-колчаном вида $\Gamma_s(E_6^l) \simeq \mathbb{Z}E_6/\tau^l\varphi$, где допустимая группа автоморфизмов $\mathbb{Z}E_6$ порождена композицией степени сдвига $\tau$ и автоморфизмом $\varphi$, $\varphi = (16)(25)$. В этом случае $E_6$ удобнее ориентировать следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
1 & 2 \arrow[l] & 3 \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & 5 \arrow[r] & 6 \\
 & & 4 & &
\end{tikzcd}$$

**Предложение 7.** *Группа мономиальных автоэквивалентностей категории* $\mathrm{Stmod}(E_6^l)$ *имеет вид* $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(E_6^l) \simeq C_{2l} \ltimes (k^*)^{7l}$*; группа мономиальных автоэквивалентностей стабильной категории по модулю естественного изоморфизма имеет вид* $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(E_6^l) \simeq C_{2l} \ltimes (k^*)^{l+1}$.

**Доказательство.** Легко видеть, что $\Gamma_s(E_6^l)$ имеет форму ленты Мёбиуса, у которой $2l$ крайних вершин. Вычислим группу $\mathrm{Aut}\Gamma_s(E_6^l)$ автоморфизмов графа $\Gamma_s(E_6^l)$. Как и прежде, крайняя вершина графа может переходить только в крайнюю, а образ крайней вершины полностью определяет автоморфизм, следовательно $|\mathrm{Aut}\Gamma_s(E_6^l)| \leqslant 2l$. Рассмотрим автоморфизмы $\bar{\varphi}$, $\bar{\tau} \in \mathrm{Aut}\Gamma_s(E_6^l)$ индуцированные $\varphi$ и $\tau$ соответственно. Заметим, что $\bar{\tau}^l = \bar{\varphi}$, откуда $\mathrm{ord}(\bar{\tau}) = 2l$. Получаем: $\mathrm{Aut}\Gamma_s(E_6^l) \simeq C_{2l}$.

Вычислим группу $\mathrm{Aut}_0^{\mathrm{mon}}(E_6^l)$ мономиальных автоэквивалентностей стабильной категории, тождественных на объектах. Для этого нужно найти число $r$ из леммы 1. Расстановку констант на $\Gamma_s(E_6^l)$ можно выбрать следующим образом: расставим константы на стрелках, входящих в центральный ряд, произвольно (то есть на стрелках между вершинами типа 3 и 4), мы можем это сделать, так как не существует соотношений, содержащих только эти стрелки. Это вносит вклад $2l$. Следующий зигзаг содержит вершины с номерами 3, 2 и 5 и опоясывает центральный ряд с обеих сторон. Он вносит вклад $3l$, так как вместе со стрелками центрального ряда он образует $l$ ячеек, каждой из которых принадлежит по 6 стрелок и в которых должны выполняться соответствующие соотношения. Последний зигзаг содержит стрелки, соединяющие вершины типа 1, 2 и 5, 6. Вместе со стрелками предыдущего зигзага он образует $2l$ ячеек, каждая из которых содержит 4 стрелки, на 2 стрелках константы уже расставлены, следовательно, в каждой ячейке мы можем выбрать произвольно только одну константу, это вносит вклад $2l$. Получаем, что $r = 2l + 3l + 2l = 7l$, и тогда

$$\mathrm{Aut}_0^{\mathrm{mon}}(E_6^l) \simeq (k^*)^{7l}, \quad \mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(E_6^l) \simeq C_{2l} \ltimes (k^*)^{7l}.$$

Перейдем к $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(E_6^l)$ : нам нужно вычислить только $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(E_6^l)$. Произвольный функтор $F$ из $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(E_6^l)$ приведем к виду, аналогичному $F'$ из доказательства предложения 2. Делая замену базиса в объектах, принадлежащих центральному ряду, можно добиться того,

что на стрелках, входящих в этот ряд, останется только одна произвольная костанта $c$. Заменой базисов обеъектов, входящих в следующий зигзаг, можно добиться того, что на этом зигзаге останется $l$ произвольных констант. Меняя базисы крайних объектов, можно добиться того, чтобы на стрелках последнего зигзага стояли либо константы, которые получаются из зафиксированных констант с помощью соотношений, либо $\pm 1$. Получаем: $\mathrm{Out}_0^{\mathrm{mon}}(E_6^l) \simeq (k^*)^{l+1}$, $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(E_6^l) \simeq C_{2l} \ltimes (k^*)^{l+1}$. $\square$

**Замечание 1.** $\mathbb{Z}D_n/\tau^l\varphi \simeq \mathbb{Z}D_n/\tau^l$, поэтому группы $\mathrm{Aut}_s^{\mathrm{mon}}(D_n^l)$ и $\mathrm{Out}_s^{\mathrm{mon}}(D_n^l)$ пересчитывать не надо.

**Замечание 2.** Как уже отмечалось ранее, группа мономиальных автоэквивалентностей категории $\mathrm{Stmod}(\Lambda)$ в некоторых случаях совпадает со всей группой стабильных автоэквивалентностей. В частности, для этого достаточно выполнения условия:

$$\dim\mathrm{Hom}(X,Y) \leq 1 \quad \text{для любых неразложимых модулей} \quad X, Y. \tag{1}$$

В статье [4] для всех диаграмм Дынкина $T$ вычислена величина $m_T$, то есть такое наименьшее число, что все пути длины $m_T$ равны нулю в $\mathbb{Z}T$. $m_{A_n} = n$, $m_{D_n} = 2n-3$, $m_{E_6} = 11$, $m_{E_7} = 17$, $m_{E_8} = 29$. Откуда получаем, что для алгебр Накаямы условие 1 выполнено в следующих случаях: для алгебры типа $A_n^l$, где $n$ четно, при $l \geq n/2$; для алгебры типа $A_n^l$, где $n$ нечетно, при $l \geq (n-1)/2$; для алгебры типа $D_n^l$, где $n$ четно, при $l \geq (2n-4)/2$; для алгебры типа $D_n^l$, где $n$ нечетно, при $l \geq (2n-3)/2$; для алгебры типа $E_6^l$, при $l \geq 5$; для алгебры типа $E_7^l$, при $l \geq 8$; для алгебры типа $E_8^l$, при $l \geq 14$. В случае алгебры Мёбиуса получаем, что условие 1 выполнено при $l \geq (n-1)/2$ для алгебры типа $A_n^l$, где $n$ нечетно и при $l \geq n-1$ для алгебры типа $A_n^l$, где $n$ четно. В оставшихся случаях имеем: для алгебры типа $E_6^l$, при $l \geq 5$; для алгебры типа $D_n^l$, где $n$ четно, при $l \geq (2n-4)/2$; для алгебры типа $D_n^l$, где $n$ нечетно, при $l \geq (2n-3)/2$.

## Литература

1. Chr. Riedtmann, *Algebren, Darstellungsköcher, Überlagerungen und zurück.* — Comment. Math. Helv. **55** (1980), 199–224.
2. D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Tubes and Concealed Algebras of Euclidean type.* London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2007.

3. I. Assem, D. Simson, A. Skowronski, *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras: Techniques of Representation Theory.* London Mathematical Society Student Texts. Cambridge University Press, 2005.
4. O. Bretscher, Chr. Läser, Chr. Riedtmann, *Selfinjective and simply connected algebras.* — Manuscripta Math. **36** (1981), 253–307.

Antipov M. A., Zvonareva A. O. Stable autoequivalences of selfinjective algebras of finite representation type.

In this work, we compute the subgroup of the group of autoequivalences of stable category for all standard selfinjective algebras of finite representation type (which we call the group of monomial autoequivalences), also we compute the quotient group of this group modulo natural isomorphisms. If we impose some restrictions on the type of the algebra this subgroup coincides with the whole group of autoequivalences. Furthermore, we generalize these results to the case of mesh-categories associated to the quiver of the form $\mathbb{Z}T/G$, where $T$ is an arbitrary tree and the group $G$ is generated by Auslander–Reiten translate.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
*E-mail*: hyperbor@list.ru,
zvozvo@list.ru

Поступило 26 сентября 2011 г.