

А. В. Шанин

## АСИМПТОТИКИ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ ПРИ ДИФРАКЦИИ НА КОНУСЕ И ДИФРАКЦИОННЫЙ РЯД НА СФЕРЕ

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается задача дифракции плоской гармонической волны на конусе с идеальными граничными условиями (Дирихле или Неймана). В качестве примеров конических рассеивателей в статье рассматривается плоский конус с углом  $\Phi$  при вершине, а также круговой конус, у которого угол между осью и образующей равен  $\Psi$ . Отметим, что методы, развитые в статье, могут быть применены и к другим типам конусов (например, к конусам полигонального или гладкого сечения).

Обычно при исследовании дифракции на конусе основной задачей является отыскание *дифракционного коэффициента*, т.е. диаграммы направленности сферической волны, рассеянной вершиной конуса. Дифракционный коэффициент является функцией направления падения и направления рассеяния, каждое из которых может быть представлено как точка на единичной сфере. Задача отыскания дифракционного коэффициента решена в работах Смышляева и соавторов, например в [1]. Основным результатом является так называемая “формула Смышляева”, выражающая дифракционный коэффициент в виде интеграла от функции Грина на единичной сфере с вырезом.

Помимо сферической волны, при рассеянии на конусе могут возникать и другие типы волн. Например, при дифракции на конусе полигонального сечения возникают волны, отраженные от граней, волны, рассеянные на ребрах и волны, многократно рассеянные на ребрах (т.е. волны, рассеянные одним ребром и перерассеянные другими ребрами). Волны каждого из этих типов могут быть легко найдены в рамках лучевого приближения, однако на границах областей видимости этих волн имеются полутеневые зоны, вычисление волнового поля в которых представляет собой непростую задачу.

---

*Ключевые слова:* дифракция на конусе, дифракционный ряд, равномерная асимптотика.

Известно, что дифракционный коэффициент (точнее, его аналитическое продолжение) содержит информацию, достаточную для восстановления всего рассеянного поля (т.е. знание диаграммы направленности сферической волны достаточно для отыскания всех остальных компонент). В случае плоского конуса это легко показать, построив связь дифракционного коэффициента и Фурье-образа поля на поверхности конуса. Однако анализ особенностей дифракционного коэффициента, выраженного в виде интеграла, представляет собой достаточно трудоемкую задачу.

Интересно, что верно и обратное: знание всех компонент поля, кроме сферической волны, достаточно для восстановления диаграммы направленности сферической волны [2].

В литературе подробно рассмотрено поле в области “конической” полутени, т.е. в области, где происходит касание фронта сферической рассеянной волны с фронтом волны, отраженной от поверхности гладкого конуса. Показано, что волновое поле в данной области выражается через функции параболического цилиндра (или через обобщенные интегралы Френеля) [2–4].

В данной статье автор ставит перед собой весьма скромную цель: построить главные члены всех волновых компонент дифракционного поля, кроме сферической волны. Сложность при этом заключается в необходимости построить асимптотики, равномерные при переходах между областями видимости каждой из волн.

В статье используется подход, развитый В. П. Смышляевым и заключающийся в том, что поле выражается через функцию Грина на единичной сфере. Для сферической задачи строится асимптотика в форме дифракционного ряда, т.е. волновой процесс представляется как последовательность актов дифракции, происходящих локально. Каждый член дифракционного ряда соответствует некоторой компоненте рассеянного волнового поля в пространстве. Отметим, что все члены вычисляются в старшем приближении.

## §2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ВОЛНОВОГО ПОЛЯ

Пусть в дополнении пространства  $(x, y, z)$  до конического тела  $\Omega$  (рассеивателя) выполняется уравнение Гельмгольца

$$\Delta u + k^2 u = 0. \quad (1)$$

Предполагается, что вершина конуса совпадает с началом координат. Зависимость всех величин от времени имеет вид  $e^{-2\pi ft}$  и далее не выписывается. Направление падения плоской волны (т.е. направление на источник) обозначается как  $\omega_0$ , а направление рассеяния обозначается как  $\omega$ . Далее мы считаем, что  $\omega_0$  и  $\omega$  представляют собой точки на единичной сфере. Падающая волна имеет вид

$$u^{\text{in}} = \exp\{-ikr \cos(\theta(\omega, \omega_0))\}, \quad (2)$$

где  $\theta(\omega, \omega_0)$  представляет собой угловое расстояние между направлениями  $\omega$  и  $\omega_0$ . Величина  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  есть радиальная координата. Волновое поле представляется как сумма падающего и рассеянного полей:

$$u = u^{\text{in}} + u^{\text{sc}}. \quad (3)$$

Полное поле удовлетворяет граничному условию Дирихле или Неймана на границе  $\partial\Omega$ . Кроме того, поле удовлетворяет условию Мейкснера в вершине

$$u = o(r^{-3/2}). \quad (4)$$

Рассеянное поле должно удовлетворять условию излучения. Полное поле должно удовлетворять условию Мейкснера на ребрах конуса, если конус не гладкий.

Рассматриваются случаи, когда  $\Omega$  представляет собой плоский конус (Рис. 1):

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z = 0, x > 0, 0 < y < x \operatorname{tg} \Phi\}. \quad (5)$$

или круговой конус (Рис. 2)

$$\Omega = \{(x, y, z) \mid z < -\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ctg} \Psi\}. \quad (6)$$

Мы полагаем, что  $\Phi < \pi/2$  и  $\Psi < \pi/2$ .

Плоский конус имеет два ребра, на которых выполняются условия Мейкснера

$$u = O(\rho^{1/2}), \quad (7)$$

где  $\rho$  есть расстояние между точкой наблюдения и ребром.

Полное поле, удовлетворяющее всем сформулированным условиям, дается формулой [1]:

$$u(r, \omega; \omega_0) = 2e^{3\pi i/4} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} \int_{\gamma} J_{\nu}(kr) e^{-i\pi\nu/2} g(\omega, \omega_0, \nu) \nu d\nu. \quad (8)$$

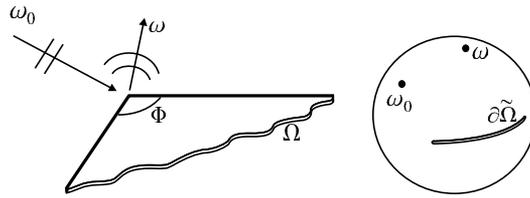


Рис. 1. Дифракция на плоском конусе

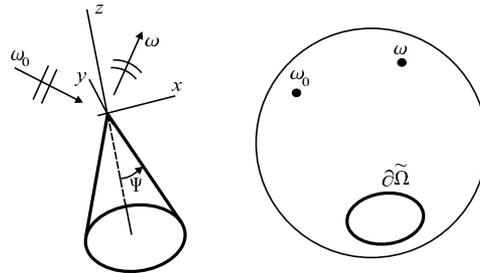


Рис. 2. Дифракция на круговом конусе

Точка наблюдения задается координатами  $(r, \omega)$ ,  $J_\nu$  – функция Бесселя. Контур  $\gamma$  показан на Рис. 3. Функция  $g(\omega, \omega_0, \nu)$  – функция Грина для уравнения Лапласа–Бельтрами на сфере (точнее, на части сферы, являющейся дополнением к сечению конуса  $\tilde{\Omega}$ )

$$\left(\tilde{\Delta} + \nu^2 - \frac{1}{4}\right)g = \delta(\omega - \omega_0). \tag{9}$$

Здесь  $\tilde{\Delta}$  дифференциальный оператор Лапласа–Бельтрами, действующий на переменную  $\omega$ . Функция  $g$  удовлетворяет граничным условиям Дирихле или Неймана (в зависимости от граничных условий исходной задачи) на контуре  $\partial\tilde{\Omega}$ , который является границей сечения конуса  $\Omega$  единичной сферой.

Формулу (8) можно трактовать как результат применения разделения переменных. Контур  $\gamma$  обходит особенности функции  $g$ , лежащие

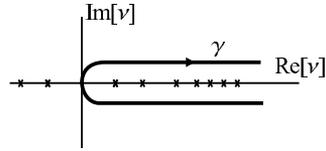


Рис. 3. Контур интегрирования в выражении (8)

на положительной действительной оси. Эти особенности соответствуют спектру оператора  $\tilde{\Delta} - 1/4$ , действующего в дополнении к  $\tilde{\Omega}$  с соответствующими граничными условиями.

План дальнейших действий следующий. Во-первых, будет построена асимптотика функции  $g$ , входящей в (8). Функция  $g$  будет представлена в виде дифракционного ряда, для членов которого будут выписаны явные формулы (разумеется, лишь в главном приближении). Во-вторых, будет преобразована формула (8). При этом членам дифракционного ряда на сфере будут поставлены в соответствие вклады в волновое поле. Ключом к преобразованию формулы (8) будет интеграл Солина для функции Бесселя и ряд Тейлора для косинуса, входящего в этот интеграл.

### §3. ПЕРВЫЕ ЧЛЕНЫ ДИФРАКЦИОННОГО РЯДА ДЛЯ ФУНКЦИИ ГРИНА НА СФЕРЕ

Рассмотрим плоский конус, показанный на Рис. 1.

Исследуем функцию  $g$  (ее зависимость от переменной  $\nu$ ) с “физической” точки зрения. А именно, рассмотрим процесс распространения волны на сфере. Пусть волна описывается уравнением

$$\left( \tilde{\Delta} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) w = \delta(\omega - \omega_0) \delta(t) \quad (10)$$

с некоторым фиктивным временем  $t$ . Поле создается точечным монопольным источником, локализованным в точке  $\omega_0$ . Волновой фронт распространяется по сфере с единичной скоростью. Сначала импульс распространяется от источника по прямой (геодезической), затем встречает рассеиватель (контур  $\delta\tilde{\Omega}$ ). Импульс отражается от рассеивателя, а кроме того дифрагирует на его концах. Рассеянное на одном из концов волновое поле добегаёт до другого конца и рассеивается повторно, и т.д. Пусть  $w(t)$  – волновое поле, записанное в точке

наблюдения  $\omega$ . Функция  $g(\omega, \omega_0, \nu)$  представляет собой преобразование Фурье функции  $w(t)$ , взятое при значении частотной переменной  $\sqrt{\nu^2 - 1/4}$ .

В соответствии с представлением о последовательных актах дифракции, функция  $g$  может быть представлена как

$$g(\omega, \omega_0, \nu) \sim \sum_m g_m(\omega, \omega_0, \nu) = \sum_m e^{i\kappa(\nu)\theta_m} G_m(\nu). \quad (11)$$

Суммирование производится по всем траекториям дифракционных лучей, идущих от точки  $\omega_0$  в точку  $\omega$ . Здесь  $\theta_m$  – длина луча с индексом  $m$ ,

$$\kappa(\nu) = \begin{cases} \nu, & \text{Im}[\nu] > 0, \\ -\nu, & \text{Im}[\nu] < 0, \end{cases} \quad (12)$$

Предполагается, что  $G_m(\nu)$  – медленно меняющиеся функции переменной  $\nu$  (по сравнению с экспонентами, входящими в (11)). Члены ряда отсортированы по правилу  $\theta_{m+1} \geq \theta_m$ . Первый член (с индексом  $m = 0$ ) соответствует волне, приходящей из  $\omega_0$  в  $\omega$  без отражения и рассеяния. Ниже будет показано, что члены, удовлетворяющие неравенству  $\theta_m < \pi$ , соответствуют различным дифракционным волнам исходной конической задачи.

Заметим, что мы не делаем различия между величинами  $\kappa = \pm\nu$  и  $\pm\sqrt{\nu^2 - 1/4}$ , поскольку при больших  $|\nu|$  амплитудные и фазовые искажения, вносимые заменой  $\pm\sqrt{\nu^2 - 1/4}$  на  $\pm\nu$ , малы по сравнению с главным членом разложения. Можно следовать более строгому подходу, описывая волновой процесс уравнением

$$\left( \tilde{\Delta} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{4} \right) w = 0 \quad (13)$$

вместо (10) и изучая преобразование Фурье решения по переменной  $t$  в точке  $\nu$ . Известно, что уравнение (13) обладает свойством конечной скорости распространения фронтов (см. соответствующую ремарку в [1]). Однако представляется, что подходы, основанные на уравнении (10) и на уравнении (13), для наших нужд дают один и тот же результат.

#### а. Нулевой член и отраженная волна

Волна, распространяющаяся без отражения и рассеяния, имеет вид

$$g_0(\omega, \omega_0, \nu) = g_0(\theta, \nu) = -\frac{\exp\{i\kappa\theta + i\pi/4\}}{2\sqrt{2\pi\kappa \sin \theta}}, \quad (14)$$

где  $\theta$  – угловое расстояние между  $\omega_0$  и  $\omega$ . Это выражение может быть получено с помощью стандартного лучевого приближения. А именно, в окрестности источника структура поля повторяет функцию Грина плоскости:

$$g \approx -\frac{i}{4} H_0^{(1)}(\kappa\theta). \quad (15)$$

“Внешнюю” асимптотику этого выражения необходимо срastить с лучевым выражением для поля, справедливым вне малой окрестности источника:

$$g \approx \frac{A(\nu) \exp\{i\kappa\theta\}}{\sqrt{\sin\theta}}. \quad (16)$$

Данное разложение может быть получено с учетом осевой симметрии из уравнений эйконала и переноса на сфере. Внешняя асимптотика функции Ханкеля  $H_0^{(1)}$  из (15) срastивается с (16) путем подбора коэффициента  $A(\nu)$ . Результат представляет собой (14).

Далее рассмотрим волну, отраженную от прямолинейной границы на сфере. Прямой в данном случае называется геодезическая, т.е. дуга большой окружности. В соответствии с принципом отражения, лучевая асимптотика отраженной волны дается выражением, сходным с (14):

$$g(\omega, \omega_0, \nu) = -R \frac{\exp\{i\kappa\theta_1 + i\pi/4\}}{2\sqrt{2\pi\kappa \sin\theta_1}}. \quad (17)$$

Здесь  $R$  – коэффициент отражения границы ( $R = 1$  для граничного условия Неймана и  $R = -1$  для граничного условия Дирихле),  $\theta_1$  – полная длина луча, испытывающего отражение, т.е. длина пути от источника до точки наблюдения через точку, в которой происходит отражение.

Асимптотики (14) и (17) перестают действовать, когда  $\theta \approx \pi$  или  $\theta_1 \approx \pi$ . Этот случай будет рассмотрен позже.

С помощью формулы (14) можно построить функцию Грина на сфере без рассеивателей. Пусть кратчайшее угловое расстояние между источником и точкой наблюдения равно  $\theta$ . Пусть величина  $\theta$  не близка к 0 или к  $\pi$ . Рассмотрим все возможные пути, выходящие из источника и достигающие точки наблюдения. Заметим, что луч может обходить сферу несколько раз. Имеется два семейства лучей: лучи одного семейства имеют длины  $\theta + 2\pi n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , а другого  $2\pi - \theta + 2\pi n$ . Лучи

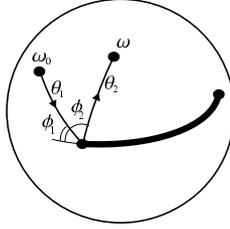


Рис. 4. Дифракция на крае разреза

этих семейств идут в противоположных направлениях. Лучи, имеющие длину, превышающую  $\pi$ , проходят одну или несколько точек фокусировки. Известно, что прохождение каждой из точек фокусировки приводит к умножению сигнала на фазовый множитель  $e^{-i\pi/2}$ . С учетом этого, поле в точке наблюдения записывается в виде суммы

$$g \approx -\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi\kappa \sin \theta}} \left( e^{i\kappa\theta} + e^{i\kappa(2\pi-\theta)-i\pi/2} \right) \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\pi n(2\kappa-1)}.$$

Выполняя суммирование, получаем

$$g \approx -\frac{\cos(\kappa(\theta - \pi) + \pi/4)}{2\sqrt{2\pi\kappa \sin \theta} \cos(\pi\kappa)}. \quad (18)$$

Последнее выражение представляет собой старший член асимптотики точной формулы для функции Грина на сфере

$$g = -\frac{P_{\kappa-1/2}(-\cos \theta)}{4 \cos(\pi\kappa)}. \quad (19)$$

### в. Дифрагированная краевая волна

Рассмотрим луч на сфере, рассеянный краем разреза, представляющего собой сечение плоского конуса (см. Рис. 4). Введем угол падения  $\phi_1$  и угол рассеяния  $\phi_2$ , как показано на рисунке. Пусть расстояния от края до источника и точки наблюдения равны  $\theta_1$  и  $\theta_2$  соответственно. Напомним, что разрез есть часть большой дуги с граничными условиями Дирихле или Неймана.

Для того чтобы вычислить асимптотику краевой волны, воспользуемся принципом локальности, а именно будем искать волновое поле

в виде

$$g = g_0(\theta_1, \nu)g_0(\theta_2, \nu)T_{N,D}(\phi_1, \phi_2). \quad (20)$$

Здесь  $g_0$  – поле монопольного источника, определяемое формулой (14), а  $T_{N,D}$  — диаграмма направленности, которую необходимо найти.

Для вычисления диаграммы направленности необходимо сратить классическое решение плоской задачи о дифракции на полупрямой (решение Зоммерфельда) с лучевым представлением (20). Рассмотрим задачу на плоскости. Пусть падающее поле представляет собой плоскую волну единичной амплитуды. Пусть расстояние от края разреза до точки наблюдения равно  $\theta_2$ , волновое число равно  $\kappa$ , углы падения и рассеяния равны  $\phi_1$  и  $\phi_2$ . Хорошо известно, что рассеянное поле для такой задачи имеет асимптотику

$$g = -\frac{\exp\{i\kappa\theta_2 + i\pi/4\}}{2\sqrt{2\pi\kappa\theta_2}}T_{N,D}(\phi_1, \phi_2), \quad (21)$$

где

$$T_{N,D}(\phi_1, \phi_2) = T(\phi_1, \phi_2) \pm T(2\pi - \phi_1, \phi_2) \quad (22)$$

$$T(\phi_1, \phi_2) = S(\phi_1, \phi_2 + \pi) - S(\phi_1, \phi_2 - \pi), \quad (23)$$

$$S(\phi_1, \phi_2) = \frac{i}{\exp\{i(\phi_2 - \phi_1)/2\} - 1} \quad (24)$$

Индекс  $N$  соответствует граничным условиям Неймана, а индекс  $D$  – условиям Дирихле. Условиям Неймана соответствует верхний знак в (22).

Функции  $T_{N,D}$ , вычисляемые по формулам (23), (22), (24) подставляются в (20) и дают оценку краевой волны.

Как известно, асимптотики (20) перестают работать в зоне полутени, т.е. когда  $\phi_2$  близко к  $\pm(\pi - \phi_1)$ . Будем называть эту зону *сферической полутенью*, т.е. множеством точек, в которых теряет справедливость лучевая асимптотика на сфере. Кроме сферической полутени есть еще *коническая полутень*, в которой полная длина луча  $\theta_1 + \theta_2$  близка  $\pi$ . Вычисление поля в этой области вызывает некоторые сложности в момент, когда применяется формула (8). Как известно, полутеневые зоны возникают в тех местах, где касаются друг друга волновые фронты различной природы. Сферическая полутень возникает там, где фронт краевой волны касается фронта падающей или отраженной волны. Коническая полутень возникает из-за касания фронтов краевой волны и сферической волны.

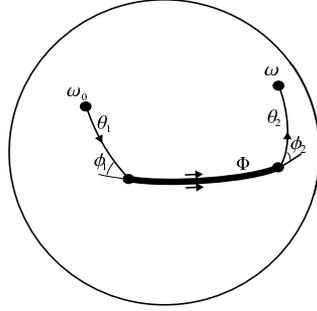


Рис. 5. Вторичная дифракция на ребре

### с. Вторичная дифракция на ребре

Рассмотрим луч, идущий вдоль траектории, показанной на Рис. 5, т.е. от источника  $\omega_0$  до первого края рассеивателя, затем вдоль рассеивателя до второго края и от второго края до точки наблюдения. На самом деле, под это описание попадают две траектории, поскольку луч может идти вдоль верхней или нижней стороны рассеивателя.

Для описания вторичной дифракции на ребре рассмотрим задачу на разветвленной поверхности над сферой. Используя принцип отражения, задача с рассеивателем типа Дирихле или Неймана, проведенным вдоль геодезической, сводится к задаче распространения волн на двухлистной поверхности с двумя точками ветвления, показанной на Рис. 6. Поверхность имеет два листа: физический лист и отраженный лист. Берега разрезов, помеченные на рисунке одинаковыми римскими цифрами, склеиваются друг с другом. На отраженном листе имеется отраженный источник в точке  $\omega'_0$ . В случае граничных условий Дирихле он имеет амплитуду  $-1$ , а в случае условий Неймана амплитуду  $1$ .

Дифракционный процесс в окрестности точки ветвления описывается формулой (20), но вместо диаграммы направленности  $T_{N,D}$  следует использовать диаграмму  $T$ , определяемую формулой (23).

Необходимо исследовать волны, идущие по разветвленной поверхности вдоль четырех различных траекторий. Две из них идут из точки  $\omega_0$  в точку  $\omega$  (одна вдоль линии I, а другая вдоль линии II). Две других идут из точки  $\omega'_0$  в точку  $\omega$ .

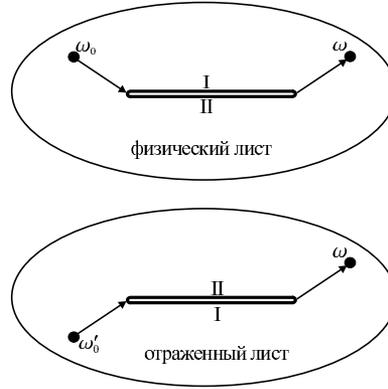


Рис. 6. Разветвленная поверхность

Поведение волн в случае Дирихле и Неймана сильно различается. Сперва рассмотрим более простой случай граничных условий Неймана. Каждая из четырех рассматриваемых волн имеет вид

$$g_0(\theta_1, \nu)g_0(\Phi, \nu)g_0(\theta_2, \nu)D(\phi_1, \phi_2),$$

где множитель  $g_0$  описывает лучевое распространение вдоль прямой (геодезической) части пути, а  $D$  – угловой множитель.

С учетом сказанного, вторично дифрагированное поле для граничных условий Неймана имеет вид

$$g = g_0(\theta_1, \nu)g_0(\Phi, \nu)g_0(\theta_2, \nu) [2T(\phi_1, \pi)T(\pi, \phi_2) + 2T(\phi_1, -\pi)T(-\pi, \phi_2)]. \quad (25)$$

При выводе этой формулы использовалось соотношение симметрии

$$T(\phi_1, \pi) = T(2\pi - \phi_1, \pi).$$

Случай граничных условий Дирихле более сложен, поскольку амплитуды лучей, идущих вдоль линий I и II равны нулю. Модифицируем лучевой метод. Выше мы полагали, что на вторую точку ветвления падает волна, локально имеющая структуру плоской волны, т.е.

$$g_{\text{in},1} = \exp\{-ik\theta \cos(\phi - \phi')\},$$

где  $\theta$  – расстояние от точки ветвления до точки наблюдения,  $\phi'$  – угол падения,  $\phi$  – угол рассеяния. Вместо этого рассмотрим падающее поле

в виде

$$g_{\text{in},2} = \theta \sin(\phi - \phi') \exp\{-i\kappa \theta \cos(\phi - \phi')\}.$$

Заметим, что

$$g_{\text{in},2} = \frac{i}{\kappa} \frac{\partial g_{\text{in},1}}{\partial \phi'}.$$

Таким образом, дифракционное поле, порожденное падающей волной  $g_{\text{in},2}$ , может быть найдено по формуле

$$g_{\text{sc}}(\theta, \phi) = \frac{i g_0(\theta, \nu)}{\kappa} \frac{\partial T(\phi', \phi)}{\partial \phi'}. \quad (26)$$

Теперь мы можем оценить поле вторичной дифракции в случае граничных условий Дирихле. Рассеяние на первой точке ветвления описывается так же, как в случае граничных условий Неймана, а рассеяние на второй точке ветвления требует применения формулы (26). Результат имеет вид

$$g = g_0(\theta_1, \nu) g_0(\Phi, \nu) g_0(\theta_2, \nu) \times \frac{2i}{\kappa \sin \Phi} [\partial_2 T(\phi_1, \pi) \partial_1 T(\pi, \phi_2) + \partial_2 T(\phi_1, -\pi) \partial_1 T(-\pi, \phi_2)], \quad (27)$$

где символы  $\partial_1$  и  $\partial_2$  обозначают дифференцирование по первому и второму аргументу, соответственно.

Имея в виду дальнейшее использование формул (25) и (27), опишем зависимость волновых полей от  $\kappa$ . В случае граничных условий Неймана поле имеет порядок  $\kappa^{-3/2}$ , в то время как в случае граничных условий Дирихле поле имеет порядок  $\kappa^{-5/3}$ .

#### d. Зона полутени

Асимптотика (21) справедлива только в ситуации, когда луч, соединяющий точки  $\omega_0$  и  $\omega$  (прямой или отраженный), проходит достаточно далеко от краев разреза. Рассмотрим случай, когда прямой луч проходит близко к краю разреза (см. Рис. 7). В этом случае возникает сферическое полутеневое поле. Используя технику фазового интеграла, получим следующее представление для полутеневого поля:

$$g_{\text{pen}}(\omega, \omega_0, \nu) = -\frac{e^{i\kappa\theta + i\pi/4}}{4\sqrt{2\pi\kappa \sin(\theta)}} I(\pm\sqrt{\kappa \delta\theta}). \quad (28)$$

Здесь  $\kappa = \kappa(\nu)$ ,

$$I(z) = \frac{2e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{i\tau^2} d\tau, \quad (29)$$

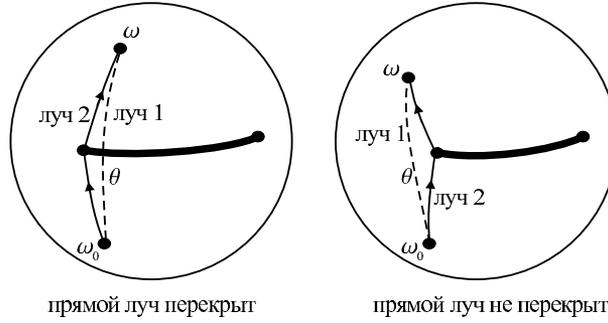


Рис. 7. К вычислению поля в полутеневой зоне

$\delta\theta$  — разность длин путей, идущих из  $\omega_0$  в  $\omega$  через край разреза, и напрямую, т.е. разность длин луча 2 и луча 1, изображенных на рисунке.  $\theta$  — длина луча, идущего напрямую. знак  $+$  выбирается, если прямой луч перекрывается рассеивателем, а знак  $-$  выбирается, если прямой луч не перекрывается.

Асимптотика (29) справедлива, если точка  $\omega$  находится достаточно далеко от точки, противоположной точке  $\omega_0$ , т.е. если величина  $\theta$  не близка к  $\pi$ .

#### е. Окрестность фокальной точки

Пусть точка наблюдения  $\omega$  расположена близко к точке  $\omega'_0$ , противоположной точке  $\omega_0$ . Это означает, что угловое расстояние между точками  $\omega$  и  $\omega_0$  близко к  $\pi$ . Введем локальные сферические координаты с “северным полюсом” в точке  $\omega'_0$ . Пусть точка наблюдения  $\omega$  имеет координаты  $(\theta', \phi)$  в этой системе. Рассмотрим семейство лучей, идущих из точки  $\omega_0$  в точку  $\omega'_0$ . Часть из этих лучей перекрыто рассеивателем, а другая часть доходит без препятствий. Пусть лучи, которые доходят без препятствий, занимают интервал  $(\phi_1, \phi_2)$  по переменной  $\phi$  (см. Рис. 8).

Поле в точке наблюдения находится по формуле

$$g_{\text{foc}}(\omega, \omega_0, \nu) = -\frac{e^{i\pi\kappa}}{4\pi} \int_{\phi_1}^{\phi_2} \exp\{-i\kappa\theta' \cos(\tau - \phi)\} d\tau, \quad (30)$$

следующей из соотношений тригонометрии на сфере.

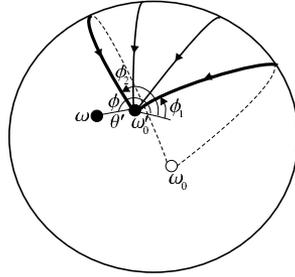


Рис. 8. Точка наблюдения в окрестности фокальной точки

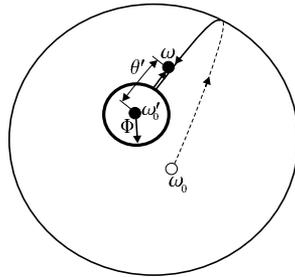


Рис. 9. Рассеяние на круге малого радиуса

**f. Отражение от окружности малого радиуса. Осесимметричный случай**

Пусть исходная пространственная задача представляет собой задачу рассеяния на узком круговом конусе с осесимметричным падением. Введем сферические координаты  $(\theta, \phi)$  с “северным полюсом” в точке  $\omega_0$ . Рассеиватель на сфере представляет собой малый круг с центром в “южном полюсе”  $\omega'_0$  (точке с  $\theta = \pi$ ). Пусть угловой радиус круга есть  $\Phi$  ( $\Phi \ll \pi$ ), т.е. граница круга соответствует точкам с  $\theta = \pi - \Phi$ . Наша цель – найти поле на сфере вблизи границы круга (см. Рис. 9).

Поскольку круг имеет малый радиус, его окрестность можно приближенно рассматривать как часть плоскости. Таким образом, поле имеет вид

$$g = A(H_0^{(2)}(\kappa \theta') + RH_0^{(1)}(\kappa \theta')), \tag{31}$$

где  $A$  и  $R$  коэффициенты, которые необходимо найти,  $\theta' = \pi - \theta$ . Первый член в (31) соответствует волне, распространяющейся от источника к кругу, а второй член соответствует отраженной волне.

Для вычисления коэффициента  $A$  сравним лучевое представление (14) с падающей волной  $A H_0^{(2)}(\kappa\theta)$ . Внешняя асимптотика  $A H_0^{(2)}(\kappa\theta)$  должна переходить в (14). В результате получаем

$$A = -\frac{e^{i\pi\kappa}}{4}. \quad (32)$$

Вычислим коэффициент отражения  $R$ . Граничные условия Дирихле выполняются при

$$R = -\frac{H_0^{(2)}(\kappa\Phi)}{H_0^{(1)}(\kappa\Phi)}, \quad (33)$$

а граничные условия Неймана выполняются, если

$$R = -\frac{\dot{H}_0^{(2)}(\kappa\Phi)}{\dot{H}_0^{(1)}(\kappa\Phi)}. \quad (34)$$

Точка обозначает производную от функции Ханкеля по ее аргументу. Окончательно получаем, что для граничных условий Неймана поле имеет вид

$$g = -\frac{e^{i\kappa\pi}}{4} \left( H_0^{(2)}(\kappa\theta') - \frac{\dot{H}_0^{(2)}(\kappa\Phi)}{\dot{H}_0^{(1)}(\kappa\Phi)} H_0^{(1)}(\kappa\theta') \right), \quad (35)$$

а для граничных условий Дирихле поле имеет вид

$$g = -\frac{e^{i\kappa\pi}}{4} \left( H_0^{(2)}(\kappa\theta') - \frac{H_0^{(2)}(\kappa\Phi)}{H_0^{(1)}(\kappa\Phi)} H_0^{(1)}(\kappa\theta') \right). \quad (36)$$

### г. Волна соскальзывания при дифракции на круге

Рассмотрим практически важный случай сферической задачи: задачу дифракции на круге не малого радиуса. Пусть круг имеет радиус  $\Phi < \pi/2$ . Пусть на границе круга задано граничное условие Неймана. Геометрия задачи показана на Рис. 10. Волна проходит расстояние  $\theta_1$  от источника до рассеивателя, затем идет вдоль границы рассеивателя, а затем проходит расстояние  $\theta_2$  от рассеивателя до точки наблюдения. Пусть азимутальное расстояние, которое волна проходит вдоль границы рассеивателя, равно  $\Psi$ . Это соответствует угловому расстоянию  $\Psi \sin \Phi$ .

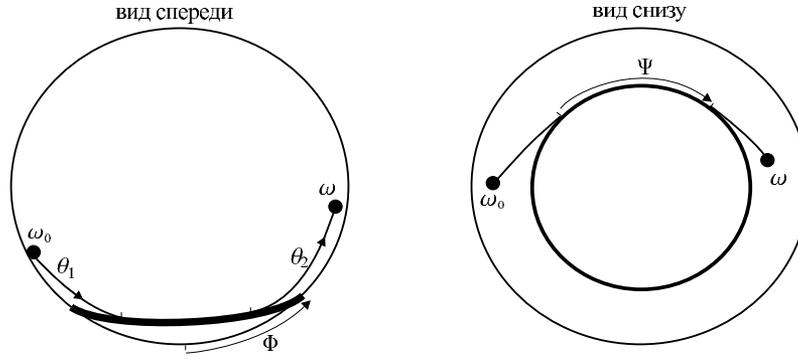


Рис. 10. Дифракция на круге с образованием волны соскальзывания

Оценка волнового поля в данном случае представляет собой достаточно трудоемкую задачу. Приведем конечный результат:

$$g = g_0(\theta_1, \nu)g_0(\theta_2, \nu)e^{i\kappa\Psi \sin \Phi} \frac{8\pi i}{\cos^2 \Phi} \left( \frac{2}{\kappa \sin \Phi \cos^2 \Phi} \right)^{1/3} \times \sum_n \frac{\text{Ai}'(\beta_n)}{\beta_n \text{Ci}(\beta_n)} \exp \left\{ i\beta_n \Psi \left( \frac{\kappa \sin \Phi \cos^2 \Phi}{2} \right)^{1/3} \right\} \quad (37)$$

где Ai, Vi – функции Эйри,

$$\text{Ci}(z) = \text{Vi}(z) + i\text{Ai}(z). \quad (38)$$

$$\text{Ai}'(z) = \frac{d}{dz} \text{Ai}(z).$$

Величины  $\beta_n$  есть корни уравнения

$$\text{Ci}'(\beta_n) = 0 \quad (39)$$

обладающие свойством  $\text{Im}[\beta_n] > 0$ . Мы полагаем, что величины  $\beta_n$  отсортированы таким образом, что меньшим  $n$  соответствуют меньшие  $\text{Im}[\beta_n]$ .

Члены с разными  $n$  соответствуют различным модам ползущих волн.

Оценим зависимость членов (39) от  $\kappa$ :

$$g_n \sim \frac{e^{i\kappa\theta}}{\kappa^{4/3}} \exp\{i\alpha_n \Psi \kappa^{1/3}\}. \quad (40)$$

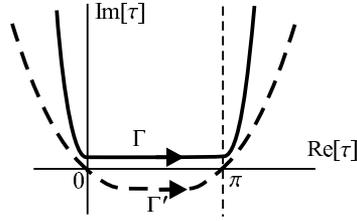


Рис. 11. Контур интегрирования для вычисления функции Бесселя

#### §4. АНАЛИЗ ИНТЕГРАЛА (8)

Для упрощения интеграла (8) представим функцию Бесселя в виде интеграла Сонина:

$$u(r, \omega) = e^{3\pi i/4} \sqrt{\frac{2}{\pi k r}} \int_{\Gamma} e^{i k r \cos \tau} \int_{\gamma_1 + \gamma_2} e^{i \nu \tau - i \nu \pi} g(\omega, \omega_0, \nu) \nu d\nu d\tau. \quad (41)$$

Контур  $\Gamma$  показан на Рис. 11.

Разобьем контур  $\gamma$ , изображенный на Рис. 3, на две части: пусть  $\gamma_1$  – часть контура, идущая из бесконечности до нуля *под* действительной положительной полуосью, а  $\gamma_2$  – часть контура, идущая из нуля в бесконечность *над* действительной положительной полуосью.

Соответственно, разобьем внутренний интеграл на два интеграла  $I_1$  и  $I_2$ , соответствующие интегрированию вдоль контуров  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ :

$$I_{1,2}(\tau) = \int_{\gamma_{1,2}} e^{i \nu \tau - i \nu \pi} g(\omega, \omega_0, \nu) \nu d\nu.$$

Согласно асимптотикам, приведенным выше, можно ожидать, что функция  $I_1$  имеет особенности в точках

$$\tau_m = \pi + \theta_m, \quad (42)$$

где  $\theta_m$  – длины лучей из (11). Соответственно, функция  $I_2$  должна иметь особенности в точках

$$\tau_m = \pi - \theta_m. \quad (43)$$

Рассмотрим интеграл вида (41), содержащий только вклад  $I_1$ , т.е. только интегрирование по части контура  $\gamma_1$ . Поскольку на отрезке  $(0, \pi)$  особых точек нет, можно деформировать контур  $\Gamma$  в контур  $\Gamma'$ , лежащий в областях экспоненциального убывания функции

$\exp\{ikr \cos \tau\}$  (см. Рис. 11). Данный интеграл описывает сумму волн, ведущих себя как  $e^{ikr}$  и  $e^{-ikr}$  при больших  $r$ . Хорошо известно, что функция, ведущая себя как  $e^{-ikr}$ , обращается в нуль, когда берутся в расчет обе компоненты ( $I_1$  и  $I_2$ ), то есть эта часть поля может не рассматриваться. Компонента, ведущая себя как  $e^{ikr}$  (также вычисленная по сумме  $I_1 + I_2$ ) представляет собой сферическую волну, рассеянную вершиной конуса. Эта компонента поля подробно исследована в работах В.П. Смышляева и соавторов. В настоящей статье эта компонента поля не исследуется. Таким образом, интеграл, содержащий только  $I_1$  не описывает ни одной из интересующих нас компонент.

Далее, рассмотрим интеграл, содержащий  $I_2$ . Поскольку некоторые из величин  $\theta_m$  могут располагаться между 0 и  $\pi$ , в общем случае контур  $\Gamma$  нельзя деформировать в  $\Gamma'$ . Вместо этого проведем прямолинейный участок контура  $\Gamma$  непосредственно над отрезком  $(0, \pi)$  действительной оси  $\tau$ .

Дальнейшее рассуждение основывается на предположении о том, что при больших  $r$  значение интеграла (41) может быть оценено как сумма вкладов от особых точек, принадлежащих отрезку  $(0, \pi)$ , и каждый вклад дается малой окрестностью особой точки, т.е.

$$u(r, \omega) = \sum_m u_m(r, \omega). \quad (44)$$

Каждый из членов  $u_m$  соответствует члену  $g_m$  разложения сферической функции Грина в дифракционный ряд, причем берутся только члены с дистанцией распространения  $\theta_m$ , удовлетворяющей неравенству  $0 < \theta_m < \pi$ . Заметим, что в сумму (44) входит конечное число членов.

Рассмотрим окрестность особой точки  $\tau_m = \pi - \theta_m$ , принадлежащей отрезку  $(0, \pi)$ . В окрестности этой точки представим косинус тремя первыми членами его разложением в ряд Тейлора:

$$\exp\{ikr \cos \tau\} \approx \exp\left\{ikr \left(-\cos \theta_m - \xi \sin \theta_m + \frac{\xi^2}{2} \cos \theta_m\right)\right\}, \quad (45)$$

$\xi = \tau - \tau_m$ . Подставляя это приближение в интеграл (41) и меняя порядок интегрирования, получим представление для членов ряда (44):

$$u_m(r, \omega) = 2e^{3\pi i/4} \sqrt{\frac{2\pi}{kr}} e^{-ikr \cos \theta_m}$$

$$\times \int_0^{\infty} K(kr, \nu, \theta_m) e^{-i\nu\theta_m} g_m^+(\omega, \omega_0, \nu) \nu d\nu \quad (46)$$

где

$$K(z, \nu, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i(\nu - z \sin \theta) \xi + \frac{i}{2} z \xi^2 \cos \theta_m \right\} d\xi. \quad (47)$$

Здесь  $g_m^+$  – значения асимптотик  $g_m$ , взятые в верхней полуплоскости (т.е. при  $\kappa(\nu) = \nu$ ).

Выполняя интегрирование, получаем

$$K(z, \nu, \theta) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{-2\pi z \cos \theta}} \exp \left\{ -i \frac{(\nu - z \sin \theta)^2}{2z \cos \theta} \right\}. \quad (48)$$

Формула (46) с ядром (48) представляет собой основной результат статьи. Утверждается, что данная формула вместе с выписанными выше асимптотиками  $g_m^+$  дает равномерное описание компонент волнового поля для задачи дифракции на конусе.

### §5. СВОЙСТВА ФОРМУЛ (46), (48)

#### Лучевые асимптотики

Ядро  $K$ , определенное в (48) и рассматриваемое как функция  $\nu$ , представляет собой комплексную (осциллирующую) гауссиану с центром в точке  $z \sin \theta$  и с шириной  $\sim \sqrt{z \cos \theta}$ . Напомним, что в соответствии с (46)  $z = kr$ , следовательно, ширина гауссианы растет при  $k \rightarrow \infty$ , однако положение центральной точки растет быстрее. Если величина  $\sin \theta$  не близка к нулю и если  $g_m^+$  ведет себя как

$$\exp\{i\nu\theta_m\} \nu^{s_m} \quad \text{as } \nu \rightarrow \infty, \quad (49)$$

то при достаточно больших  $kr$  можно пренебречь изменением функции  $e^{-i\nu\theta_m} g_m^+(\nu) \nu$  под гауссианой и заменить эту функцию в интеграле (46) на ее значение при  $\nu = kr \sin \theta$ . В этом случае  $K$  представляет собой дельта-функцию  $\delta(\nu - z \sin \theta)$ , что дает представление

$$u_m(r, \omega) \approx 2e^{3\pi i/4} \sqrt{2\pi kr} e^{-ikr \cos \theta_m} G_m^+(\omega, \omega_0, kr \sin \theta_m) \sin \theta_m. \quad (50)$$

Напомним, что в соответствии с (11)

$$G_m^+(\omega, \omega_0, \nu) \equiv e^{-i\nu\theta_m} g_m^+(\omega, \omega_0, \nu).$$

Формула (50) весьма важна. Она переводит лучевую (или, в ряде случаев, полутеневую) асимптотику на сфере в асимптотику в трехмерном пространстве. Необходимое условие справедливости этой формулы есть

$$\sqrt{kr} \sin \theta_m \gg \sqrt{|\cos \theta_m|} \quad (51)$$

Помимо выполнения соотношения (51), необходимо в каждом конкретном случае убедиться, что  $G_m^+(\nu)$  медленно меняется на масштабе  $\sqrt{kr} \sin \theta_m$ .

### Связь с функциями параболического цилиндра

Если  $G_m^+$  является степенной функцией, то интеграл (46) связан с функциями параболического цилиндра. Пусть

$$G_m^+ = A(\omega, \omega_0) \nu^s. \quad (52)$$

Тогда

$$u_m = -A \frac{2i\pi^{i\pi s/4} (kr)^{s/2} (-\cos \theta_m)^{(s+1)/2}}{(s+2)\Gamma(-s-2) \sin(\pi s)} \times \\ \exp \left\{ -ikr \left( \cos \theta_m + \frac{\sin^2 \theta_m}{2 \cos \theta_m} \right) \right\} D_{-s-2} \left( e^{3\pi i/4} \sin \theta_m \sqrt{\frac{kr}{-\cos \theta_m}} \right). \quad (53)$$

Таким образом, построенная в настоящей статье асимптотика тесно связана с асимптотиками поля в конической полутени, построенными в работах [2–4].

## §6. НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕРЫ АСИМПТОТИК, ПОСТРОЕННЫХ С ПОМОЩЬЮ НОВОЙ ФОРМУЛЫ

### а. Лучевая асимптотика

Рассмотрим простейший случай, а именно, пусть точка наблюдения не принадлежит ни сферической, ни конической полутени. В соответствии с проведенными рассуждениями, в этом случае можно использовать формулу (50), подставляя в нее различные сферические асимптотики.

Рассмотрим асимптотику (14). В этом случае

$$G_m^+ = -\frac{e^{i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi\nu} \sin \theta}.$$

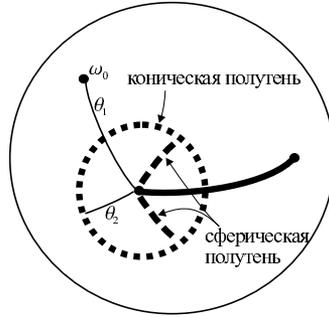


Рис. 12. Полутеневые зоны для однократно дифрагировавшей волны

Подставляя это выражение в (50), получим старший член представления поля в форме

$$g = \exp\{-ikr \cos \theta\}, \quad (54)$$

где  $\theta$  – угловое расстояние между точками  $\omega_0$  и  $\omega$ . Это выражение, очевидно, соответствует падающей плоской волне.

Далее, рассмотрим краевую волну, рассеянную одним из ребер плоского конуса. Как следует из (20),

$$G^+ = \frac{iT_{N,D}(\phi_1, \phi_2)}{8\pi\nu\sqrt{\sin \theta_1 \sin \theta_2}}.$$

Применяя (50), получим

$$u = -\frac{e^{-ikr \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi kr}} \frac{T_{N,D}(\phi_1, \phi_2)}{\sqrt{\sin \theta_1 \sin \theta_2}}. \quad (55)$$

Это выражение совпадает с решением задачи о дифракции на полуплоскости.

### в. Дифракция на ребре. Сферическая полутень

В работе рассматриваются два типа полутени: сферическая и коническая. Сферическая полутень характеризуется полутеневым поведением сферической функции Грина  $g$ , а коническая – близостью длины распространения луча на сфере к  $\pi$ . Для случая дифракции на ребре положение конической полутени определяется приближенным равенством  $\theta_1 + \theta_2 \approx \pi$ . Положение сферической и конической полутени показано на Рис. 12.

Рассмотрим сферическую полутень. Используя формулу (28) и применяя приближение (50), справедливое в данном случае, получаем

$$u_2 = \frac{1}{2} e^{-ikr \cos \theta} I(\pm \sqrt{\Delta \theta} kr \sin \theta), \quad (56)$$

где  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ , а  $\delta \theta$  определяется разностью длин лучей на Рис. 7. Принимая во внимание, что фаза цилиндрической волны в точке  $(r, \omega)$  равна  $-kr \cos \theta$ , приходим к выводу о том, что (56) описывает обычную полутеневую зону для дифракции на полуплоскости.

### с. Дифракция на ребре. Коническая полутень

Рассмотрим снова волну, однократно рассеянную ребром. Теперь будем искать поле в зоне конической полутени. Используя формулы (20) и (46) без каких-либо дополнительных упрощений, получим выражение для поля, содержащее интеграл Френеля:

$$u = -\frac{T_{D,N}(\phi_1, \phi_2) e^{ikr+i\pi/4}}{2\sqrt{2\pi kr} \sqrt{\sin \theta_{21} \sin \theta_{22}}} I\left(\pm \sqrt{\frac{kr}{2}} \sin \theta\right). \quad (57)$$

Здесь  $I$  определяется формулой (29).

### d. Поле в окрестности тени вершины конуса

Рассмотрим окрестность тени вершины конуса. Геометрия задачи соответствует Рис. 8. Подставим (30) в (46). Результат есть

$$u(r, \theta', \phi) = -\frac{e^{i\pi/2} e^{ikr}}{2\pi kr} \times \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_0^{\infty} \exp\left\{i \frac{\nu^2 + (kr\theta')^2}{2kr} - i\nu\theta' \cos(\tau - \phi)\right\} \nu d\nu d\tau. \quad (58)$$

Это выражение совпадает с приближением Кирхгофа для поля за непрозрачным экраном в виде угловой области.

### е. Дифракция на узком круговом конусе. Осесимметричный случай

Рассмотрим дифракцию на узком круговом конусе. Плоская волна падает вдоль оси вращения системы. Для описания поля будем использовать выражения (35) и (36), полученные выше.

Подставим выражение (35), соответствующее задаче Неймана в (46). Найдем поле для угла  $\theta = \pi - \theta'$  с малым  $\theta'$ . Для упрощения выкладок представим  $\sin \theta'$  и  $\cos \theta'$  степенными рядами от  $\theta'$  с точностью до линейных членов. В результате получим приближенную формулу

$$u = \frac{-ie^{ikr}}{2kr} \int_0^\infty \exp \left\{ \frac{i\nu^2}{2kr} \right\} \frac{H_0^{(2)}(\nu\theta') \dot{H}_0^{(1)}(\nu\Phi) - H_0^{(1)}(\nu\theta') \dot{H}_0^{(2)}(\nu\Phi)}{\dot{H}_0^{(1)}(\nu\Phi)} \nu d\nu. \quad (59)$$

Пусть  $\theta' = \Phi$ , т.е. ищется поле на поверхности конуса. Заметим, что

$$H_0^{(2)}(z) \dot{H}_0^{(1)}(z) - H_0^{(1)}(z) \dot{H}_0^{(2)}(z) = \frac{4i}{\pi z}.$$

С использованием этого соотношения поле для  $u(\theta' = \Phi)$  можно упростить:

$$u(r, \theta' = \Phi) = \frac{2e^{ikr}}{\pi kr \Phi} \int_0^\infty \exp \left\{ \frac{i\nu^2}{2kr} \right\} \frac{1}{\dot{H}_0^{(1)}(\nu\Phi)} d\nu. \quad (60)$$

Для граничных условий Дирихле подставим (36) в (46). Получим

$$u = \frac{-ie^{ikr}}{2kr} \int_0^\infty \exp \left\{ \frac{i\nu^2}{2kr} \right\} \frac{H_0^{(2)}(\nu\theta') H_0^{(1)}(\nu\Phi) - H_0^{(1)}(\nu\theta') H_0^{(2)}(\nu\Phi)}{H_0^{(1)}(\nu\Phi)} \nu d\nu. \quad (61)$$

Вычислим нормальную производную поля на поверхности, т.е. выражение

$$\frac{\partial u}{\partial n} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta'}(r, \theta' = \Phi).$$

Используя вронскиан, получим

$$\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{2e^{ikr}}{\pi kr^2 \Phi} \int_0^\infty \exp \left\{ \frac{i\nu^2}{2kr} \right\} \frac{1}{H_0^{(1)}(\nu\Phi)} \nu d\nu. \quad (62)$$

Асимптотики (60) и (62) совпадают с полученными И. В. Андроновым в [5].

### f. Волны соскальзывания вблизи конической полутени

Сделаем краткие замечания, касающиеся волнового поля, связанного с асимптотикой (40). Пусть точка наблюдения расположена вблизи конической полутени, т.е.  $\theta = \pi - \theta'$ , для некоторого малого  $\theta'$ . В соответствии с формулой (46), оценка поля связана с интегралом

$$I(\theta', kr, \alpha_n \Psi) = \int_0^{\infty} \exp \left\{ -i\nu\theta' + i\frac{\nu^2}{2kr} + i\alpha_n \Psi\nu^{1/3} \right\} \nu^{-1/3} d\nu. \quad (63)$$

Этот интеграл определяет новую “специальную функцию” и позволяет исследовать влияние различных геометрических параметров на решение.

## §7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Получена приближенная формула (46), связывающая дифракционный ряд для функции Грина на сфере и асимптотики компонент волнового поля, рассеянного коническим препятствием в трехмерном пространстве. Во многих случаях (основное исключение представляет собой коническая полутень) эта формула может быть преобразована в элементарное выражение (50). Автор также надеется, что собранные вместе асимптотики различных волн на сфере могут представлять определенный интерес для читателя.

Автор благодарен профессорам В. М. Бабичу и М. А. Лялинову за плодотворные дискуссии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. V. M. Babich, D. B. Dement'ev, B. A. Samokish, V. P. Smyshlyaev, *On evaluation of the diffraction coefficient for arbitrary “nonsingular” directions of a smooth convex cone.* — SIAM J. Appl. Math. **60**, No. 2 (2000), 536–573.
2. В. А. Боровиков, *Дифракция на многоугольниках и многогранниках.* Наука, М., 1966.
3. В. М. Бабич, *О ПЦ-анзаце.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **308** (2004), 9–22.
4. А. Попов, А. Ladyzhensky, S. Khoziosky, *Uniform asymptotics of the wave diffracted by a cone of arbitrary cross-section.* — Russ. J. Math. Phys. **16**, No. 2, (2009), 296–299.
5. И. В. Андронов, *Дифракция на некоторых сильно вытянутых телах вращения.* Направлена в Акустический журнал.

Shanin A. V. Asymptotics of waves diffracted by a cone and diffraction series on a sphere.

Diffraction of a plane harmonic scalar wave by a cone with ideal boundary condition is studied. A flat cone or a circular cone is chosen as a scatterer. It is known that the diffracted field contains different components: a spherical wave, geometrically reflected wave, multiply diffracted cylindrical waves (for a flat cone), creeping waves (for a circular cone). The main task of the paper is to find a uniform asymptotics of all wave components. This problem is solved by using an integral representation proposed in the works by V.M.Babich and V.P.Smyshlyaev. This representation uses a Green's function of the problem on a unit sphere with a cut. This Green's function can be presented in the form of diffraction series. It is shown that different terms of the series correspond to different wave components of the conical diffraction problem. A simple formula connecting the leading terms of the diffraction series for the spherical Green's function with the leading terms of different wave components of the conical problem is derived. Some important particular cases are studied.

МГУ им. М.В. Ломоносова,  
Ленинские горы, МГУ,  
119992 Москва, Россия  
*E-mail*: a.v.shanin@gmail.com

Поступило 5 сентября 2011 г.