Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 393, 2011 г.

А. Б. Плаченов

НАКЛОННЫЕ НЕПАРАКСИАЛЬНЫЕ ПУЧКИ И ПАКЕТЫ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДВУМЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫМИ ПЕРЕМЕННЫМИ

§1. Введение

Решение уравнения

$$u_{xx} + u_{zz} - \frac{1}{c^2}u_{tt} = 0, \quad c = \text{const} \tag{1}$$

называется *относительно неискажающимся* [1], если оно представляется в виде

$$u(\mathbf{x}, t) = g(\mathbf{x}, t) f(\theta(\mathbf{x}, t)), \tag{2}$$

где $\mathbf{x} = (x, z)$ – вектор пространственных координат, t – время, g (*амплитуда*) и θ (*фаза*) – некоторые заданные функции, а f (*форма волны*) – произвольная двукратно дифференцируемая (для классического решения) функция своего аргумента. В дальнейшем переменную z будем именовать продольной, а x – поперечной.

Наиболее известное решение вида (2), для которого $g = \text{const}$, $\theta = \alpha$ или $\theta = \beta$, где

$$\alpha = z - ct, \quad \beta = z + ct \tag{3}$$

– Д'Аламберовская плоская волна, распространяющаяся вдоль направления оси z. Другой пример относительно неискажающегося решения в трёхмерном пространстве – решение Бейтмена–Ильона [2,3], двумерный аналог которого имеет вид [4]

$$g = \frac{1}{\sqrt{\beta - ib}}, \quad \theta = \alpha + \frac{x^2}{\beta - ib}, \tag{4}$$

$b > 0$, мнимая часть квадратного корня отрицательна, функция f аналитична при $\operatorname{Im}\theta \geq 0$. Специальный выбор формы волны в (4) позволяет получить точные решения (1), имеющие вид негармонических по времени сосредоточенных волн (см. [4–7] и содержащиеся в этих работах ссылки). В настоящей заметке строится простейшее обобщение

Ключевые слова: волновое уравнение, точные решения, локализованные волны, решения Бейтмена, наклонные пучки.

решения (4) и анализируется его поведение при некоторых формах волны f.

§2. Комплексный сдвиг по поперечной координате

Выполним в (4) комплексный (точнее, чисто мнимый) сдвиг $x \mapsto x - ia$ $(a \in \mathbb{R})$ по поперечной координате x:

$$g = \frac{1}{\sqrt{\beta - ib}}, \quad \theta = \alpha + \frac{(x-ia)^2}{\beta - ib}\,. \tag{5}$$

Легко убедиться, что в результате такого сдвига мы получаем новое относительно неискажающееся решение волнового уравнения (1). Чтобы проанализировать поведение этого решения, введём обозначение

$$\phi = \operatorname{arctg}\frac{a}{b} \tag{6}$$

и выполним элементарные преобразования:

$$(x-ia)^2 = (x - \beta\operatorname{tg}\phi)^2 + 2(x-\beta\operatorname{tg}\phi)(\beta - ib)\operatorname{tg}\phi + (\beta - ib)^2\operatorname{tg}^2\phi\,,$$

откуда

$$\theta = \frac{(x-\beta\operatorname{tg}\phi)^2}{\beta - ib} + (\alpha + 2x\operatorname{tg}\phi - \beta\operatorname{tg}^2\phi) - ib\operatorname{tg}^2\phi = \theta_2 + \theta_1 + \theta_0\,,$$

где

$$\theta_2 = \frac{(x-\beta\operatorname{tg}\phi)^2}{\beta - ib} = \frac{[x-(z+ct)\operatorname{tg}\phi]^2}{z+ct-ib}\,,$$

$$\theta_1 = \alpha + 2x\operatorname{tg}\phi - \beta\operatorname{tg}^2\phi = \frac{z\cos 2\phi + x\sin 2\phi - ct}{\cos^2\phi}\,,$$

$$\theta_0 = -ib\operatorname{tg}^2\phi\,.$$

Слагаемое $\theta_0 = -i|\theta_0|$ – мнимоотрицательная постоянная. Слагаемое θ_1 чисто вещественно и линейно по x, z и t, его линии уровня в $\mathbb{R}^2$ – прямые, движущиеся со скоростью c в направлении нормали, под углом 2ϕ к оси z, $|\nabla\theta_1| = -c^{-1}(\theta_1)_t = \cos^{-2}\phi$. Наконец, слагаемое θ_2 квадратично по x и дробно-рационально по β. Оно обращается с нуль на прямой $x = (z+ct)\operatorname{tg}\phi$, составляющей угол ϕ с осью z и движущейся со скоростью c в направлении, противоположном направлению этой оси. Вне указанных прямых θ_2 имеет положительную мнимую часть, так что фазовая функция принимает значения на полуплоскости $\operatorname{Im}(\theta - \theta_0) \geq 0$. $\operatorname{Im}\theta_2$ стремится к плюс бесконечности при фиксированом β и $x \to \infty$. На произвольной прямой вида $x = \operatorname{tg}\psi\cdot\beta + x_0$

предельное значение $\operatorname{Im}\theta_2$ при $\beta \to \infty$ равно $b(\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\phi)^2$. В частности, при фиксированном $x = x_0$ ($\psi = 0$) и $\beta \to \infty$ значение $\operatorname{Im}\theta_2$ стремится к $-\operatorname{Im}\theta_0$. Линии уровня $\operatorname{Im}\theta = \eta - |\theta_0|$, $\eta > 0$, в каждый момент времени представляют собой гиперболы $b(x - \beta\operatorname{tg}\phi)^2 = \eta(\beta^2 + b^2)$ с асимптотами $x = (\operatorname{tg}\phi \pm \sqrt{\eta/b})\beta$. Эти кривые движутся со скоростью c в направлении, противоположном направлению оси z.

Проследим за перемещением точки, отвечающей фиксированному значению $\theta = 2\xi + i\eta + \theta_0$, $\eta \geq 0$ (множитель 2 введён для удобства последующих вычислений). В случае $\eta = 0$ эта точка лежит на пересечении прямых $\theta_2 = 0$ и $\theta_1 = 2\xi$. Из получившейся системы уравнений следует, что

$$z = (ct + \xi)\cos 2\phi + \xi, \quad x = (ct + \xi)\sin 2\phi. \tag{7}$$

Точка перемещается со скоростью c вдоль прямой, направление которой составляет угол 2ϕ с осью z.

Пусть теперь $\eta > 0$. Каждому такому значению θ отвечают две точки, расположенные по обе стороны от прямой $\theta_2 = 0$. Как показано в Приложении А, траектории этих точек лежат на ветвях гиперболы (при $\eta = b\cos^{-2}\phi$ вырождающейся в пару лучей). Анализ показывает, что скорость движения каждой из точек, отвечающих постоянному значению $\theta = 2\xi + i\eta + \theta_0$, вдоль такой гиперболы при положительном η строго меньше c. Здесь мы не будем приводить соответствующих выкладок. В Приложении Б этот факт доказывается исходя из общих соображений.

§3. Решения со специальным выбором формы волны

Проанализируем поведение функций вида (2), (5) для некоторых форм волны f, аналитичных при $\operatorname{Im}(\theta - \theta_0) \geq 0$.

1) Выберем [9, 10]

$$f(\theta) = \exp[ik(\theta - \theta_0)], \tag{8}$$

где k – параметр, имеющий размерность волнового числа. В этом случае $|f(\theta)| \leq 1$,

$$u = \frac{1}{\sqrt{z + ct - ib}} \exp\left\{ik\frac{[x - (z + ct)\operatorname{tg}\phi]^2}{z + ct - ib}\right\} \times \exp\left[\frac{ik}{\cos^2\phi}(z\cos 2\phi + x\sin 2\phi - ct)\right]. \tag{9}$$

Эта функция описывает гауссов пучок, ось которого наклонена под углом ϕ к направлению оси z, модулированный плоской гармонической волной с волновым числом $k\cos^{-2}\phi$, направление распространения которой составляет угол 2ϕ с этой осью. Пучок движется со скоростью c в направлении, противоположном направлению оси z. При каждом значении t функция (9) гауссовски локализована в окрестности оси пучка по поперечной переменной x, однако степень локализации зависит от z: при больших $|z|$ ширина пучка по каждому направлению растёт в главном приближении линейно по $|z|$. Поскольку при больших $|\beta|$ и конечных x $|f(\theta)|$ стремится к конечному пределу $\exp(-kb\operatorname{tg}^2\phi)$, характер убывания поля при больших $|z|$ в фиксированный момент времени, а также в фиксированной точке (x, z) при $t\to\infty$ определяется предэкспоненциальным множителем.

При больших k полуширина пучка (расстояние от его оси до кривой $|f(\theta)| = e^{-1}$) в главном приближении равна $\sqrt{\frac{\beta^2+b^2}{kb}}\cos\phi$ и убывает с ростом k. На прямых $x = \operatorname{tg}\psi\cdot\beta + x_0$ предельное значение $\lim_{\beta\to\infty}|f(\theta)| = \exp[-kb(\operatorname{tg}\psi - \operatorname{tg}\phi)^2]$ заметно отлично от нуля лишь для значений ψ, лежащих в малой окрестности угла ϕ.

2) Пусть теперь

$$f(\theta) = \frac{P(\theta)}{Q(\theta)}\,, \tag{10}$$

где P и Q – многочлены, корни Q расположены в полуплоскости $\operatorname{Im}(\theta-\theta_0) < 0$, и степень знаменателя больше степени числителя. Более общий случай – отношение алгебраических функций, точки ветвления которых расположены в указанной полуплоскости. Простейший пример – функция

$$f(\theta) = (\theta-\theta')^{-q}\,, \tag{11}$$

где $\operatorname{Im}(\theta'-\theta_0) < 0$, $q > 0$. Функция u (2), (5), (10) представляет собой волновой пакет, амплитуда которого убывает степенным образом по всем направлениям (*splash-mode*) [6, 11].

Если числитель имеет корень θ_*, $\operatorname{Im}(\theta_*-\theta_0) > 0$, то условие $\theta = \theta_*$ при каждом t определяет два нуля функции u, лежащие на пересечением кривых $\operatorname{Im}(\theta-\theta_*) = 0$ и $\operatorname{Re}(\theta-\theta_*) = 0$. При $\operatorname{Im}(\theta_*-\theta_0) = 0$ эти нули сливаются в точке (7), где $\xi = (\theta_*-\theta_0)/2$, бегущей со скоростью c под углом 2ϕ к оси z. Простейший пример такой формы волны имеет

вид
$$f(\theta) = \frac{(\theta-\theta_0)^N}{(\theta-\theta')^q}\,,$$
$q > N > 0$, $\mathrm{Im}(\theta' - \theta_0) < 0$.

3) Возьмём в качестве формы волны произведение функций (8) и (10):
$$f(\theta) = \frac{P(\theta)}{Q(\theta)}\exp[ik(\theta-\theta_0)]\,. \tag{12}$$
Частным случаем (12) является функция
$$f(\theta) = (\theta-\theta')^{-q}\exp[ik(\theta-\theta_0)] \tag{13}$$
($\mathrm{Im}(\theta'-\theta_0) < 0$). Функция u (2), (5), (12) – волновой пакет, сочетающий гауссову локализацию по x в окрестности оси пучка (9) и степенное убывание вдоль этой оси [12].

4) Ещё более быстрое убывание обеспечивает при больших значениях параметра k функция
$$f(\theta) = \Pi(\theta-\theta_0-2\xi; k,p,\sigma) \tag{14}$$
($k > 0$, $p > 0$, $\sigma \in (0,1)$, ξ – вещественные параметры), где $\Pi(\theta; k,p,\sigma)$ – функция Перель-Киселёва [8]
$$\Pi(\theta; k,p,\sigma) = \exp\left\{-\frac{kp}{\sigma}\left[\left(1+\frac{\theta}{ip}\right)^{\sigma} - 1\right]\right\}\,, \tag{15}$$
где степенная функция положительна при положительном основании (в работе [8] в функции (15) $p = 1-\sigma$). Функция u при каждом значении t снова локализована в окрестности точки (7). Поскольку при малых $|\theta|$ $\Pi(\theta;k,p,\sigma) \sim \exp\left[k\left(i\theta - \frac{1-\sigma}{2p}\theta^2\right)\right]$, то в окрестности (7) $|f(\theta)| \sim \exp\left[-k\left(\mathrm{Im}\,\theta_2 + \frac{1-\sigma}{2p}(\theta_1-2\xi)^2\right)\right]$, и при больших k характер локализации по всем пространственным направлениям близок к гауссовскому. Линии уровня модуля функции u в окрестности точки (7) близки к эллипсам
$$\frac{b[x-(z+ct)\,\mathrm{tg}\,\phi]^2}{4\cos^4\phi(ct+\xi)^2+b^2} + \frac{1-\sigma}{2p\cos^4\phi}[(z-\xi)\cos 2\phi + x\sin 2\phi - (ct+\xi)]^2 = \mathrm{const}\,.$$
Направления полуосей этих эллипсов не совпадают, вообще говоря, ни с координатными осями, ни с направлением распространения пакета.

Умножение функции (14) на многочлен (например, на $(\theta - \theta_*)^N$) позволяет, не нарушая гауссовской локализации, добиться обращения произведения в нуль в точках, определяемых условием $\theta = \mathrm{const}$.

§4. Заключительные замечания

Осесимметричные ($\phi = 0$) аналоги некоторых из рассмотренных выше специальных решений хорошо известны. Особенно много работ касается решений волнового уравнения в случае трёх пространственных координат. Так, решения уравнения (1), аналогичные (9), были получены в работах [9, 10]. Формы волны вида (11) и (12) рассматривались в работах [11] и [12] соответственно, см. также [6], а решения с фазой (15) изучались в [8].

Наклонные гауссовы пучки неоднократно возникали ранее (см., напр., [13–16] и цитированные там работы) как приближенные решения различных уравнений математической физики при описании их коротковолновой асимптотики в параксиальном приближении (при малых ϕ, когда направление оси z в главном приближении совпадает с направлением распространения волны). Подчеркнём, что поскольку функция (9) – точное решение (1), никаких условий параксиальности мы в данном случае не накладываем, и угол ϕ (6) может принимать произвольное значение из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$.

Обобщённая фаза Бейтмена с поперечным комплексным сдвигом может быть рассмотрена и в случае пространства произвольной размерности, и на её основе могут быть построены относительно неискажающиеся решения волнового уравнения (1). При подходящем выборе формы волны такие решения снова имет вид нестационарных пучков и пакетов, движущихся под углом к направлению оси z. Рассмотренный в настоящей заметке двумерный случай позволяет, не отвлекаясь на технические детали, выявить некоторые характерные свойства таких решений.

Приложение А. Траектории точек постоянной фазы

Рассмотрим уравнение $\theta(x, z, t) = \theta_0 + 2\xi + i\eta$, $\eta \geq 0$, т.е.

$$\alpha + \frac{(x - ib\,\mathrm{tg}\,\phi)^2}{\beta - ib} = 2\xi + i(\eta - b\,\mathrm{tg}^2\,\phi)\,.$$

В результате элементарных преобразований получим:

$$(\alpha - 2\xi)(\beta - ib) + x^2 - 2ixb\,\mathrm{tg}\,\phi - b^2\,\mathrm{tg}^2\,\phi = (\eta - b\,\mathrm{tg}^2\,\phi)(i\beta + b)\,,$$

откуда

$$(\alpha-2\xi)\beta+x^2=\eta b\,,\quad -b(\alpha-2\xi)-2b\operatorname{tg}\phi x=(\eta-b\operatorname{tg}^2\phi)\beta\,.$$

Учитывая, что $\alpha-2\xi=(z-\xi)-(ct+\xi)$, $\beta=(z-\xi)+(ct+\xi)$, $(\alpha-2\xi)\beta=(z-\xi)^2-(ct+\xi)^2$, преобразуем эту систему к виду

$$\begin{cases} x^2+(z-\xi)^2-(ct+\xi)^2=\eta b, \\ xb\sin 2\phi+(z-\xi)(b\cos 2\phi+\eta\cos^2\phi)-(c+\xi)(b-\eta\cos^2\phi)=0. \end{cases} \tag{16}$$

В случае $b-\eta\cos^2\phi\neq 0$ после исключения $ct+\xi$ получаем уравнение траектории одной ($\eta=0$) или двух ($\eta>0$) точек, отвечающих заданному значению θ:

$$\begin{aligned}[] [x^2+(z-\xi)^2-\eta b](b-\eta\cos^2\phi)^2- \\ -[xb\sin 2\phi+(z-\xi)(b\cos 2\phi+\eta\cos^2\phi)]^2=0\,. \end{aligned} \tag{17}$$

За исключением особых случаев $\eta=0$ и $\eta\cos^2\phi=b$ кривая (17) – гипербола, две ветви которой суть траектории точек, отвечающих одинаковым значениям фазовой функции.

При $\eta=0$ (17) превращается в

$$x^2+(z-\xi)^2-[x\sin 2\phi+(z-\xi)\cos 2\phi]^2=0\,,$$

откуда $[x\cos 2\phi-(z-\xi)\sin 2\phi]^2=0$ – уравнение двух совпадающих прямых $x=(z-\xi)\operatorname{tg}2\phi$. Этот случай рассмотрен ранее, зависимость x и z от t задаётся системой (7).

В случае $\eta\cos^2\phi=b$ система (16) принимает вид

$$x^2+(z-\xi)^2-(ct+\xi)^2=b^2\cos^{-2}\phi,\quad x\sin\phi+(z-\xi)\cos\phi=0\,.$$

Первое уравнение описывает окружность переменного радиуса с центром в точке $x=0$, $z=\xi$, а второе – проходящую через этот центр неподвижную прямую. С течением времени их точки пересечения сначала сближаются, а затем удаляются, оставаясь на указанной прямой. Уравнения движения этих точек имеют вид

$$x=\pm\sqrt{b^2\cos^{-2}\phi+(ct+\xi)^2}\cos\phi\,,$$

$$z=\mp\sqrt{b^2\cos^{-2}\phi+(ct+\xi)^2}\sin\phi+\xi\,.$$

Приложение Б. Скорость перемещения точки постоянной фазы

Из (1), (2) и произвольности формы волны f вытекает, что фаза θ удовлетворяет уравнению эйконала

$$(\nabla\theta, \nabla\theta) - \frac{1}{c^2}\theta_t^2 = 0\,, \qquad (18)$$

причём в случае, когда фаза $\theta = \tau + i\sigma$ комплексна, скалярное произведение понимается без комплексного сопряжения компонент второго сомножителя. Функции τ и σ удовлетворяют вытекающей из (18) системе уравнений

$$(\nabla\tau)^2 - (\nabla\sigma)^2 - \frac{1}{c^2}(\tau_t^2 - \sigma_t^2) = 0\,, \quad (\nabla\tau, \nabla\sigma) - \frac{1}{c^2}\tau_t\sigma_t = 0\,,$$

откуда

$$(\nabla\tau)^2 - \frac{1}{c^2}\tau_t^2 = (\nabla\sigma)^2 - \frac{1}{c^2}\sigma_t^2\,, \quad (\nabla\tau, \nabla\sigma) = \frac{1}{c^2}\tau_t\sigma_t\,. \qquad (19)$$

Из второго уравнения вытекает, что $\frac{1}{c^2}|\tau_t\sigma_t| \le |\nabla\tau||\nabla\sigma|$, равенство достигается, если $\nabla\tau$ и $\nabla\sigma$ коллинеарны (знаки τ_t и σ_t совпадают, если $\nabla\tau$ и $\nabla\sigma$ сонаправлены, и различаются при противоположной направленности градиентов). Отсюда следует, что левая и правая часть первого уравнения системы неотрицательны и обращаются в нуль в случае коллинеарности $\nabla\tau$ и $\nabla\sigma$. В дальнейшем предполагается, что производные τ_t и σ_t в нуль не обращаются.

Рассмотрим пространственно-временную кривую $\mathbf{x}(t)$, на которой значения функций τ и σ постоянны. Покажем, что скорость $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}$ при неколлинеарных $\nabla\tau$ и $\nabla\sigma$ по модулю строго меньше c. Запишем условия равенства нулю полных производных τ и σ вдоль $\mathbf{x}(t)$:

$$\tau_t + (\nabla\tau, \mathbf{w}) = 0, \quad \sigma_t + (\nabla\sigma, \mathbf{w}) = 0\,.$$

Если $\nabla\tau$ и $\nabla\sigma$ не коллинеарны, мы можем представить $\mathbf{w}$ в виде их линейной комбинации $\mathbf{w} = \lambda\nabla\tau + \mu\nabla\sigma$, и тогда, с учётом второго уравнения (19),

$$\tau_t + (\nabla\tau)^2\lambda + \frac{1}{c^2}\tau_t\sigma_t\mu = 0\,, \quad \sigma_t + \frac{1}{c^2}\tau_t\sigma_t\lambda + (\nabla\sigma)^2\mu = 0\,, \qquad (20)$$

или, после вычитания и прибавления членов вида $\frac{1}{c^2}\tau_t^2\lambda$ и $\frac{1}{c^2}\sigma_t^2\mu$,

$$\begin{cases} \left[(\nabla\tau)^2 - \frac{1}{c^2}\tau_t^2\right]\lambda + \tau_t\left[1 + \frac{1}{c^2}(\tau_t\lambda + \sigma_t\mu)\right] = 0\,, \\ \\ \left[(\nabla\sigma)^2 - \frac{1}{c^2}\sigma_t^2\right]\mu + \sigma_t\left[1 + \frac{1}{c^2}(\tau_t\lambda + \sigma_t\mu)\right] = 0\,. \end{cases}$$

Учитывая первое уравнение системы (19), видим, что множители при квадратных скобках в полученных уравнениях пропорциональны. Поэтому, для некоторого ν, $\lambda = -\nu\tau_t$, $\mu = -\nu\sigma_t$, откуда $\mathbf{w} = -\nu(\nabla\tau\tau_t + \nabla\sigma\sigma_t)$. Тогда из системы (20) после сокращения на τ_t и σ_t получаем:

$$\nu = \left[(\nabla\tau)^2 + \frac{1}{c^2}\sigma_t^2\right]^{-1} = \left[(\nabla\sigma)^2 + \frac{1}{c^2}\tau_t^2\right]^{-1} < \frac{c^2}{\tau_t^2 + \sigma_t^2}$$

(неравенство строгое, поскольку $\nabla\tau$ и $\nabla\sigma$ не коллинеарны).

Теперь мы можем вычислить квадрат вектора $\mathbf{w}$:

$$\begin{aligned} |\mathbf{w}|^2 &= \nu^2\left[(\nabla\tau)^2\tau_t^2 + (\nabla\sigma)^2\sigma_t^2 + 2(\nabla\tau,\nabla\sigma)\tau_t\sigma_t\right] \\ &= \nu^2\left[(\nabla\tau)^2\tau_t^2 + (\nabla\sigma)^2\sigma_t^2 + \frac{2}{c^2}\tau_t^2\sigma_t^2\right] \\ &= \nu^2\left\{\left[(\nabla\tau)^2 + \frac{1}{c^2}\sigma_t^2\right]\tau_t^2 + \left[(\nabla\sigma)^2 + \frac{1}{c^2}\tau_t^2\right]\sigma_t^2\right\} = \nu(\tau_t^2 + \sigma_t^2) < c^2\,, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

В заключение автор выражает признательность В. М. Бабичу, М. И. Белишеву, А. Я. Казакову, А. П. Качалову, М. В. Перель, М. М. Попову и особенно А. П. Киселёву за полезные обсуждения.

Литература

1. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики.* Гостехиздат, М., 1941.
2. Г. Бейтмен, *Математическая теория распространения электромагнитных волн.* Наука, М., 1958.
3. P. Hillion, *Generalized phases and nondispersive waves.* — Acta Appl. Math. **30** (1) (1993), 35–45.
4. А. П. Киселев, М. В. Перель, *Относительно неискажающиеся решения m-мерного волнового уравнения.* — Дифф. уравнения **38** (8) (2002), 1128–1129.
5. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравненя (Обзор).* — Оптика и Спектроскопия **102** (4) (2007), 661–681.
6. A. Torre, *Relativistic Laguerre polynomials and splash pulses.* — In: Progress in Electromagnetics Research B **13** (2009), 329–356.

7. А. П. Киселев, А. Б. Плаченов, *Точные решения m-мерного волнового уравнения из параксиальных. Дальнейшее обобщение решения Бейтмена.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 167–177.
8. A. P. Kiselev, M. V. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation.* — J. Math. Phys. **41** (4) (2000), 1934–1955.
9. J. N. Brittingham, *Focus waves modes in homogeneous Maxwell's equations: Transverse electric mode.* — J. Appl. Phys. **54** (1983), 1179–1189.
10. А. П. Киселев, *Модулированные гауссовы пучки.* — Изв. высш. уч. завед. Радиофизика. **26** (5) (1983), 1014–1020.
11. I. M. Besieris, A. M. Shaarawi, R. W. Ziolkowski, *A bidirectional traveling plane wave representation of exact solutions of the wave equation.* — J. Math. Phys. **30** (1989), 1254–1269.
12. R. W. Ziolkowski, *Localized transmission of electromagnetic energy.* — Phys. Rev. A **39** (1989), 2005–2033.
13. М. М. Попов, *Собственные колебания многозеркальных резонаторов.* — Вестн. Ленингр. ун-та, сер. физ.-хим. No. 22. вып. 4 (1969), 42–54.
14. В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.* Наука, ГРФМЛ, М., 1977.
15. Ю. А. Ананьев, *Оптические резонаторы и лазерные пучки.* Наука, ГРФМЛ, М., 1980.
16. Y. Hadad, T. Melamed, *Parametrization of the tilted Gaussian beam waveobjects.* — In: Progress in Electromagnetics Research **102** (2010), 65–80.

Plachenov A. B. Tilted nonparaxial beams and packets for the wave equation with two spatial variables.

A class of relatively nondistorted solutions of the wave equation in two-dimension space is constructed. This class includes nonharmonic in time tilted beam-like and packetlike solutions with Gaussian-type localization.

Московский государственный
технический университет радиотехники,
электроники и автоматики (МИРЭА)
119454, Москва, пр. Вернадского, д. 78
E-mail: a_plachenov@mail.ru

Поступило 18 октября 2011 г.