

Л. А. Молотков

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПОРИСТОМ СТЕРЖНЕ С ОТКРЫТЫМИ ПОРАМИ НА ГРАНИЦАХ

Предлагаемая работа и работа [1] рассматривают распространение нормальных волн в изолированных пористых цилиндрических стержнях Био. Так как волновые поля существенно зависят от условий на границах, то поры рассматриваются в предлагаемой работе открытыми, а в работе [1] – закрытыми. Различные граничные условия приводят к разным нормальным волнам на низких и высоких частотах. При нулевой частоте распространяется одна нормальная волна в случае открытых пор и распространяются две нормальных волны, если поры закрыты на границах. В обоих случаях нормальные волны обладают дисперсией, и их фазовые скорости уменьшаются с ростом частоты. Конечным значением фазовой скорости при бесконечной частоте для большинства нормальных волн является минимальная скорость объемных волн $\min(v_2, v_3)$, при этом v_2 – скорость второй продольной волны, а v_3 – скорость поперечной волны. У медленных нормальных волн в обоих рассматриваемых случаях конечными значениями фазовых скоростей являются при открытых порах \tilde{v}_R и при закрытых порах v_R . С этими же скоростями распространяются волны Релея вдоль поверхностей пористых сред. Волна Релея в случае границы с открытыми порами существует всегда при $v_3 < v_2$, а при обратном неравенстве отсутствует, если скорость \tilde{v}_R не является корнем дисперсионного уравнения в интервале $0 < \tau < v_2$ основного листа. В случае границы с закрытыми порами волна Релея также существует независимо от соотношений между v_2 и v_3 .

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана пористая среда, насыщенная жидкостью и заполняющая цилиндрическую область $r \leq R$, $-\infty < z < \infty$. Эта среда в

Ключевые слова: пористый стержень, открытые поры, единственная стержневая волна, волна Релея может отсутствовать.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 11-01-00407А.

двумерном измерении описывается уравнениями Био [2, 3, 4]

$$\begin{aligned}
 \tau_{xx} &= H \frac{\partial u_x}{\partial x} + B \frac{\partial u_z}{\partial z} + C \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right), \\
 \tau_{zz} &= B \frac{\partial u_x}{\partial x} + H \frac{\partial u_z}{\partial z} + C \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right), \\
 -p &= C \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right), \\
 \tau_{xz} &= L \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right);
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \\
 \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}, \\
 -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_f \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \\
 -\frac{\partial p}{\partial z} &= \rho_f \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2},
 \end{aligned} \tag{1.2}$$

в которых τ_{xx} , τ_{xz} , τ_{zz} – напряжения, p – давление, u_x , u_z – смещения упругой фазы, w_x , w_z – относительные смещения, ρ – средняя плотность и ρ_f – плотность жидкой фазы. Среда возбуждается некоторым точечным источником, действующим с момента $t = 0$, расположенным на оси $r = 0$ и создающим осесимметричное волновое поле.

Для решения уравнений (1.1) и (1.2) вводятся потенциалы φ_1 , φ_2 и ψ , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2), \\
 \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_3^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2},
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

где скорости v_1 , v_2 и v_3 волн выражаются равенствами

$$\begin{aligned}
 v_{1,2}^2 &= [mH + \rho M - 2\rho_f C \\
 &\quad \pm \sqrt{(mH + \rho M - 2\rho_f C)^2 - 4(HM - C^2)(\rho m - \rho_f^2)}] / [2(\rho m - \rho_f^2)], \\
 v_3^2 &= \frac{Lm}{\rho m - \rho_f^2}.
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

Граница среды $r = R$ является поверхностью, свободной от внешних напряжений и давления, и на ней выполняются граничные условия

$$\tau_{rr} = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad p = 0. \quad (1.5)$$

Входящие в уравнение (1.5) напряжения и давление выражаются через потенциалы равенствами

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= (\rho + B_1 \rho_f) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + (\rho + B_2 \rho_f) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} - 2L \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right), \\ \tau_{rz} &= L \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \\ -p &= (\rho_f + B_1 m) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + (\rho_f + B_2 m) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

в которых безразмерные коэффициенты B_1 и B_2 , разделяющие поля потенциалов φ_1 и φ_2 , представляются соотношениями

$$B_i = \frac{C - \rho_f v_i^2}{m v_i^2 - M} = \frac{H - \rho v_i^2}{\rho_f v_i^2 - C} \quad (i = 1, 2). \quad (1.7)$$

Коэффициенты H, B, M, C , и L удовлетворяют условиям

$$H > 0, \quad M > 0, \quad C > 0, \quad L > 0 \quad (1.8)$$

и равенству

$$H = B + 2L. \quad (1.9)$$

Из положительной определенности матриц, составленных из коэффициентов в уравнениях (1.1) и (1.2), следуют неравенства

$$HM - C^2 > 0, \quad HM + BM - 2C^2 > 0, \quad \rho m > \rho_f^2. \quad (1.10)$$

Согласно исследованиям [5, 6], упомянутые коэффициенты выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} H &= \frac{(k_r - k_b)^2}{D - k_b} + k_b + \frac{4L}{3}, \\ C &= \frac{k_r(k_r - k_b)}{D - k_b}, \quad M = \frac{k_r^2}{D - k_b}, \quad L = M, \\ D &= k_r(1 - \varepsilon + \varepsilon k_r / k_f) \end{aligned} \quad (1.11)$$

через модули всестороннего сжатия пористого вещества k_b , частиц скелета k_r и жидкости k_f , модуль сдвига μ и пористость ε . Все эти

модули являются положительными величинами и выражаются равенствами

$$\begin{aligned} k_b &= H - C^2/M - 4L/3, \\ k_r &= [H - C^2/M - 4L/3]/[1 - C/M], \\ k_f &= \frac{(H - C^2/M - 4L/3)M\varepsilon}{H - C^2/M + \varepsilon M - C(1 + \varepsilon)} \end{aligned} \quad (1.12)$$

через коэффициенты в уравнениях (1.1) и (1.2).

Решения уравнений (1.3) для потенциалов выражаются равенствами

$$\begin{aligned} \varphi_j &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_j(k, \eta) J_0(-ikr\alpha_j) e^{kt\eta} d\eta \quad (j = 1, 2), \\ \psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y(k, \eta) J_1(-ikr\beta) e^{kt\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (1.13)$$

где $J_0(-ikr\alpha_j)$ и $J_1(-ikr\beta)$ — функции Бесселя и

$$\alpha_j = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_j^2}} \quad (j = 1, 2), \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_3^2}}. \quad (1.14)$$

После подстановки соотношений (1.13) в формулы (1.6) приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k^2 e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \{[(\rho + B_1\rho_f)\eta^2 + 2L]J_0(-ikr\alpha_1)X_1 + \\
&+ [(\rho + B_2\rho_f)\eta^2 + 2L]J_0(-ikr\alpha_2)X_2 + 2L\beta J_0(-ikr\beta)Y\} e^{ut\eta} d\eta \\
&- \frac{i2L}{2\pi r} \int_0^\infty k e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [\alpha_1 J_1(-ikr\alpha_1)X_1 \\
&+ \alpha_2 J_1(-ikr\alpha_2)X_2 + J_1(-irk\beta)Y] e^{kt\eta} d\eta, \\
\tau_{rz} &= \frac{L}{2\pi} \int_0^\infty k^2 e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [2\alpha_1 J_1(-ikr\alpha_1)X_1 \\
&+ 2\alpha_2 J_1(-ikr\alpha_2)X_2 + gJ_1(-ikr\beta)Y] e^{kt\eta} d\eta, \\
-p &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k^2 e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [(\rho_f + mB_1)J_0(-ikr\alpha_1)X_1 \\
&+ (\rho_f + mB_2)J_0(-ikr\alpha_2)X_2] \eta^2 e^{kt\eta} d\eta,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где

$$g = 2 + \eta^2/v_3^2. \tag{1.16}$$

§2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Граничные условия (1.5) и равенства (1.15) определяют систему уравнений. В этой системе уравнений полезно преобразовать первое уравнение, используя третье уравнение. В результате придем к системе уравнений

$$\begin{aligned}
&[(\rho + B_1\rho_f)\eta^2 + 2L]J_0(-ikR\alpha_1)X_1 + [(\rho + B_2\rho_f)\eta^2 + 2L]J_0(-ikR\alpha_2)X_2 \\
&+ [2L\beta J_0(-ikR\beta) + \frac{iL\eta^2}{v_3^2 k R} J_1(-ikR\beta)]Y = 0, \\
2\alpha_1 J_1(-ikR\alpha_1)X_1 + 2\alpha_2 J_1(-ikR\alpha_2)X_2 + gJ_1(-ikR\beta)Y &= 0, \\
(\rho_f + mB_1)J_0(-ikR\alpha_1)X_1 + (\rho_f + mB_2)J_0(-ikR\alpha_2)X_2 &= 0,
\end{aligned} \tag{2.1}$$

которая имеет ненулевое решение, если ее определитель обращается в нуль. Это условие определяет дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
& 2L[2\beta J_0(-ikR\beta) + \frac{i\eta^2}{v_3^2 kR} J_1(-ikR\beta)][(\rho_f \\
& + mB_2)\alpha_1 J_1(-ikR\alpha_1)J_0(-ikrR\alpha_2) - (\rho_f \\
& + mB_1)\alpha_2 J_1(-ikR\alpha_2)J_0(-ikR\alpha_1)] - \{(\rho_f + mB_2)[(\rho + B_1\rho_f)\eta^2 \\
& + 2L] - (\rho_f + mB_1)[(\rho + B_2\rho_f)\eta^2 \\
& + 2L]\}g J_1(-ikR\beta)J_0(-ikr\alpha_1)J_0(-ikR\alpha_2) = 0. \tag{2.2}
\end{aligned}$$

Для упрощения уравнения (2.2) полезно использовать соотношения

$$\begin{aligned}
& (\rho_f + mB_2)[(\rho + B_1\rho_f)\eta^2 + 2L] - (\rho_f + mB_1)[(\rho + B_2\rho_f)\eta^2 + 2L] \\
& = Lm(B_2 - B_1)g, \\
& B_2 - B_1 = \frac{(mC - \rho_f M)(v_1^2 - v_2^2)}{(mv_1^2 - M)(M - mv_2^2)}. \tag{2.3}
\end{aligned}$$

В результате уравнение (2.2) заменится равенством

$$\begin{aligned}
& 2 \left[2\beta J_0(-ikR\beta) + \frac{i\eta^2}{v_3^2 kR} J_1(-ikR\beta) \right] [\alpha_1 (\rho_f \\
& + mB_2) J_1(-ikR\alpha_1) J_0(-ikR\alpha_2) \\
& - \alpha_2 (\rho_f + mB_1) J_1(-ikR\alpha_2) J_0(-ikR\alpha_1)] \\
& - m(B_2 - B_1)g^2 J_0(-ikR\alpha_1) J_0(-ikR\alpha_2) J_0(-ikR\beta) = 0. \tag{2.4}
\end{aligned}$$

Уравнение (2.4) имеет двойной корень $\eta = 0$ при всех вещественных kR . В этом легко убедиться, если в левую часть подставить $\eta = 0$. Все корни уравнения (2.4) расположены на мнимой оси $\eta = i\tau$, где левая часть является вещественной или чисто мнимой. Если предположить, что существует комплексный корень в левой полуплоскости, то по принципу симметрии, должен существовать симметричный корень и в правой полуплоскости. Так как волновое поле должно удовлетворять нулевым начальным данным, то в правой полуплоскости не должно быть корней. Вследствие симметрии корней относительно начала координат, мы ограничимся рассмотрением корней только на положительной части мнимой оси $\tau \geq 0$.

§3. СКОРОСТИ В СТЕРЖНЕ И В СЛОЕ ПРИ НИЗКИХ ЧАСТОТАХ

Исследование корней уравнения (2.4) как функции от $kR \ll 1$ начнем со случая $kR \ll 1$ и заменим функции Бесселя приближенными

равенствами

$$J_0(z) = 1, \quad J_1(z) = \frac{z}{2}. \quad (3.1)$$

После подстановки соотношений (3.1) в уравнение (2.4) и после ряда преобразований приходим к уравнению

$$2 \left(2 + \frac{\eta^2}{2v_3^2} \right) \left[(\rho_f + mB_2) \left(1 + \frac{\eta^2}{v_1^2} \right) - (\rho_f + mB_1) \left(1 + \frac{\eta^2}{v_2^2} \right) \right] - m(B_2 - B_1) \left(4 + \frac{4\eta^2}{v_3^2} + \frac{\eta^4}{v_3^4} \right) = 0. \quad (3.2)$$

С учетом формул

$$\begin{aligned} \rho_f + mB_1 &= \frac{C + B_1M}{v_1^2}, & \rho_f + mB_2 &= \frac{C + B_2M}{v_2^2}, \\ v_1^2 v_2^2 &= \frac{HM - C^2}{\rho m - \rho_f^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

и после сокращения на множитель η^2 уравнение (3.2) заменяется уравнением

$$\eta^2 (\rho m - \rho_f^2) \frac{ML - (HM - C^2)}{L^2 m (HM - C^2)} + \frac{4ML - 3HM + 3C^2}{L(HM - C^2)} = 0, \quad (3.4)$$

корень которого $\eta^2 = -v_{rd}^2$ определяет квадрат скорости

$$v_{rd}^2 = \frac{Lm(3HM - 4LM - 3C^2)}{(HM - LM - C^2)(\rho m - \rho_f^2)} = v_3^2 \frac{3HM - 4LM - 3C^2}{HM - LM - C^2} \quad (3.5)$$

низкочастотной волны в пористом стержне с открытыми порами.

Отметим, что в пористом стержне с закрытыми порами [1], как и в пористом слое с закрытыми порами [7], наблюдаются две низкочастотные волны. В случае же рассматриваемого пористого стержня, как и в случае упругого слоя, эта волна является единственной. Доказать положительность величины (3.5) при использовании неравенств (1.10) не удастся. Однако с учетом формул (1.14) приходим к соотношению

$$v_{rd}^2 = v_3^2 \frac{9k_b}{3k_b + L}, \quad (3.6)$$

из которого следует $v_{rd} > 0$. Если сделать предположение $k_b > L/6$, которое, как правило, выполняется, то приходим к неравенству $v_{rd} > v_3$.

При переходе от пористой среды к упругой среде, когда

$$C = 0, \quad H = \lambda + 2\mu, \quad (3.7)$$

формулы (3.5) заменяются равенством

$$v_{rd}^2 = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\rho(\lambda + \mu)}. \quad (3.8)$$

Как известно, стержневая скорость в случае упругой среды меньше пластинчатой скорости в упругом слое

$$v_{pl}^2 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\rho(\lambda + 2\mu)}. \quad (3.9)$$

Сравнение скорости v_{rd} в пористом стержне с открытыми порами (3.5) со скоростью

$$v_{pl}^2 = \frac{4Lm(HM - C^2 - ML)}{(\rho m - \rho_f^2)(HM - C^2)} \quad (3.10)$$

в пористом слое с открытыми порами приводит к соотношению

$$v_{pl}^2 - v_{rd}^2 = \frac{(MB - C^2)^2}{(HM - C^2)(HM - ML - C^2)}, \quad (3.11)$$

из которого следует неравенство

$$v_{pl} > v_{rd} \quad (3.12)$$

при всех параметрах.

§4. ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ

Кроме точки $\eta = iv_{rd}$, расположенной на конечном расстоянии от начала координат, начальной точкой для корней дисперсионного уравнения (2.4) является также точка $\eta = i\infty$ при $kR = 0$. Из этой точки выходит бесконечное число корней. Для исследования перемещения этих корней полезно разделить левую часть уравнения (2.4) на произведение

$$J_1(-ikR\alpha_1)J_1(-ikR\alpha_2)J_1(-ikR\beta) \quad (4.1)$$

и после ряда преобразований уравнение (2.4) заменится равенством

$$\begin{aligned} & 2 \left[2\bar{\beta} \frac{J_0(kR\bar{\beta})}{J_1(kR\bar{\beta})} + \frac{\tau^2}{v_3^2 kR} \right] \left[\bar{\alpha}_1(\rho_f + mB_2) \frac{J_0(kR\bar{\alpha}_1)}{J_1(kR\bar{\alpha}_2)} \right. \\ & \left. - \bar{\alpha}_2(\rho_f + mB_1) \frac{J_0(kR\bar{\alpha}_1)}{J_1(kR\bar{\alpha}_1)} \right] \\ & - m(B_2 - B_1)g^2 \frac{J_0(kR\bar{\alpha}_1)}{J_1(kR\bar{\alpha}_1)} \frac{J_0(kR\bar{\alpha}_2)}{J_1(kR\bar{\alpha}_2)} = 0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где

$$\bar{\alpha}_i = \sqrt{\frac{\tau^2}{v_i^2} - 1} \quad (i = 1, 2), \quad \bar{\beta} = \sqrt{\frac{\tau^2}{v_3^2} - 1}. \quad (4.3)$$

Уравнение (4.2) имеет полюса, в которых

$$J_1(kR\bar{\alpha}_1) = 0, \quad J_1(kR\bar{\alpha}_2) = 0, \quad J_1(kR\bar{\beta}) = 0. \quad (4.4)$$

Эти полюса с ростом kR монотонно перемещаются по мнимой оси в сторону начала координат. Расположенные между ними корни также двигаются в том же направлении. Корни не могут обгонять друг друга, так как не может быть двойных корней при $\eta \neq 0$. Поэтому первым корнем является особый корень, выходящий из точки $\eta = i\tau d$. Для всех корней, кроме первого, конечной точкой является

$$\eta = i \min(v_2, v_3). \quad (4.5)$$

Для исследования конечной точки первого корня совершим предельный переход при $kR \rightarrow \infty$ в дисперсионном уравнении в области

$$0 < \tau < \min(v_2, v_3). \quad (4.6)$$

С этой целью используем асимптотику

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos(z - \frac{\pi}{4}), \quad J_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin(z - \frac{\pi}{4}) \quad (4.7)$$

функций Бесселя при $|z| \gg 1$. Из формул (4.7) при $kR \gg 1$ следуют равенства

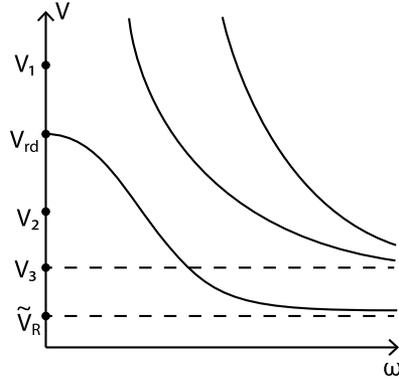
$$\begin{aligned} \frac{J_1(-ikR\alpha_j)}{J_0(-ikR\alpha_j)} &= \operatorname{tg}(-ikR\alpha_j - \frac{\pi}{4}) = -\frac{1 + i \operatorname{th}(kR\alpha_j)}{1 - i \operatorname{th}(kR\alpha_j)} = -i \quad (j = 1, 2), \\ \frac{J_1(-ikR\beta)}{J_0(-ikR\beta)} &= -i. \end{aligned} \quad (4.8)$$

В результате уравнение (2.4) перейдет в равенство

$$4\beta[\alpha_1(\rho_f + mB_2) - \alpha_2(\rho_f + mB_1)] - m(B_2 - B_1)g^2 = 0. \quad (4.9)$$

Для преобразования полученного уравнения используем соотношения

$$\begin{aligned} \rho_f + mB_1 &= \frac{mC - M\rho_f}{mv_2^2 - M}, \quad \rho_f + mB_2 = \frac{mC - M\rho_f}{mv_1^2 - M}, \\ B_1 - B_2 &= \frac{(mC - \rho_f M)(v_1^2 - v_2^2)}{(M - mv_3^2)(mv_1^2 - M)}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Рис. 1. $v_3 < v_2$

С учетом этих равенств и с введением величины

$$v_4^2 = M/m \quad (4.11)$$

придем к уравнению

$$(v_1^2 - v_2^2)g^2 - 4\alpha_1\beta(v_1^2 - v_4^2) - 4\alpha_2\beta(v_4^2 - v_2^2) = 0. \quad (4.12)$$

Этому уравнению удовлетворяет скорость волны Релея, распространяющейся вдоль свободной границы среды Био в случае открытых пор на границе [4,8]. Если в уравнении (4.12) положить $v_2 = v_4 = 0$, то получим уравнение Релея

$$g^2 - 4\alpha_1\beta = 0 \quad (4.13)$$

в случае упругой среды.

Уравнение (4.12) является также предельным дисперсионным уравнением при $kR \gg 1$ и в случае пористого слоя с открытыми порами на границе. Для исследования уравнения (4.12) в интервале (4.6) укажем, что при малых τ левая часть удовлетворяет неравенству

$$-\frac{2\tau^2(v_1^2 - v_2^2)(v_1^2 v_2^2 - v_3^2 v_4^2)}{v_1^2 v_2^2 v_3^2} < 0. \quad (4.14)$$

Если $v_3 < v_2$, то

$$[(v_1^2 - v_2^2)g^2 - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta - 4(v_4^2 - v_2^2)\alpha_2\beta]_{\tau=v_3} = v_1^2 - v_2^2 > 0. \quad (4.15)$$

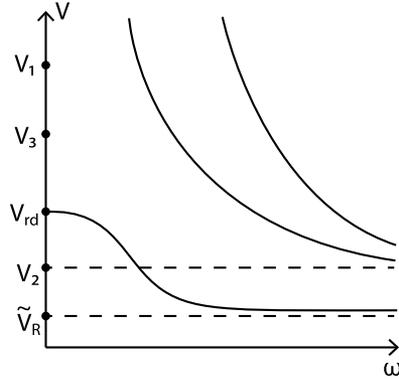


Рис. 2. ($v_2 < v_3, A > 0$)

На основании неравенств (4.14) и (4.15) приходим к выводу, что уравнение (4.12) имеет в интервале (4.6) единственный корень

$$\tau = \tilde{v}_R. \tag{4.16}$$

Этот корень описывает скорость поверхностной волны Релея, распространяющейся вдоль границы с открытыми порами. Также корень (4.16) является конечной точкой особого корня, выходящего из точки (3.5), (рис. 1) и конечной точкой особых корней дисперсионных уравнений в случае пористого слоя с открытыми порами на границах. Корни симметричного и антисимметричного дисперсионных уравнений подходят с двух сторон к значению (4.16) (рис. 2).

Если выполняется условие

$$v_2 < v_3, \tag{4.17}$$

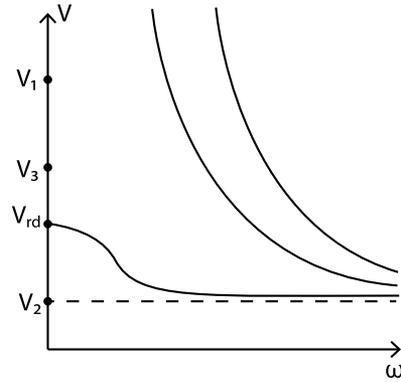
то положение конечной точки особого корня определяется величиной

$$A = [(v_1^2 - v_2^2)g^2 - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta] \Big|_{\tau=v_2}. \tag{4.18}$$

При $A > 0$ уравнение (4.12) имеет корень (4.16), лежащий в интервале

$$0 < \tau < v_2, \tag{4.19}$$

и дисперсионные кривые могут быть представлены на рис. 1 и 2, в которых скорости v_2 и v_3 поменены местами. Если $A = 0$, то $\tilde{v}_R = v_2$ и корень уравнения (4.12) совпадает с точкой ветвления $\eta = iv_2$. При

Рис. 3. ($v_2 < v_3, A < 0$)

$A < 0$ рассматриваемый корень уравнения (4.12) находится на втором листе многолистной поверхности и не является конечной точкой особых корней. К точке $\eta = iv_2$ подходят дисперсионные кривые всех нормальных волн в случае стержня (рис. 3) с открытыми порами на границах. Так как при $v_2 < v_3$ и $A < 0$ уравнение (4.12) не имеет корней в интервале $0 < \tau < v_2$, то волны Релея не образуются в этом случае.

ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Молотков, *Распространение нормальных волн в пористом стержне с закрытыми порами на границах*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 191–210.
2. М. А. Biot, *Theory of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low-frequency range*. — *Acoust. Soc. Amer.* **28** (1956), 168–178.
3. М. А. Biot, *Theory of elastic waves in fluid-saturated porous solid. II. Higher frequency range*. — *Acoust. Soc. Amer.* **28** (1956), 179–191.
4. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред*. Наука, С.-Петербург (2001).
5. М. А. Biot and D. G. Willis, *The elastic coefficients of theory consolidation*. — *Appl. Mechan.* **24** (1957), 594–601.
6. J. Geertsma and D. C. Smit, *Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solid*. — *Geophysics* **26** (1961), 169–181.

7. Л. А. Молотков, *Распространение волн в изолированном пористом слое Био с закрытыми порами на границах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **354**, (2008), 173–189.
8. Л. А. Молотков, *О распространении нормальных волн в изолированном пористом флюидонасыщенном слое Био.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **258**, (1999), 165–183.

Molotkov L. A. Propagation of normal waves in porous rod with opened pores on boundaries.

Propagation of normal waves in porous cylindrical rod with opened pores on boundaries is investigated. For this medium the dispersion equation is derived. At low-frequency this equation has one root which is velocity of a normal wave. While in the case of porous rod with closed pores there are two low-frequency waves. At high-frequency the dispersion equation can have in specific parameters one root. With such velocity the Rayleigh wave propagates along free boundary of porous medium with opened pores. The indicated root can be absent. In this case the Rayleigh wave is absent.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: molotkov@pdmi.ras.ru

Поступило 8 июня 20011 г.