

Л. А. Молотков

РАСПРОСТРАНЕНИЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПОРИСТОМ СТЕРЖНЕ С ЗАКРЫТЫМИ ПОРАМИ НА ГРАНИЦАХ

При исследовании распространения сейсмических волн полезно рассматривать, кроме твердых и жидких сред, также и пористые среды, состоящие из твердого скелета и включений в виде пор, заполненных жидкостями. Теория распространения волн в таких средах была предложена Био [1, 2, 3] и исследована, в частности, в монографиях [4, 5]. Указанная теория является двухфазной и обобщает динамические теории упругости и акустики.

В предлагаемой работе и в работе [6] рассматриваются цилиндрические стержни, заполненные пористой средой. Эти исследования являются продолжением анализа волновых полей в пористых средах [7]. Как показывают исследования, волновое поле существенно зависит от граничных условий, которые определяют или закрытые, или открытые поры на границах. От граничных условий в случае пористого стержня зависит количество низкочастотных нормальных волн, а также скорость и существование волны Релея, распространяющейся вдоль свободной границы пористой среды. Исследования волнового поля в пористых цилиндрических стержнях с разными граничными условиями разделены на две статьи, так как используемые методы и результаты сильно отличаются.

§1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задана пористая среда, насыщенная жидкостью и заполняющая цилиндрическую область $r \leq R$, $-\infty < z < \infty$, где r и R –

Ключевые слова: пористый стержень, закрытые поры, две стержневые волны, волна Релея распространяется всегда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 11-01-00407А.

радиусы. Эта среда описывается уравнениями Био

$$\begin{aligned}\tau_{xx} &= H \frac{\partial u_x}{\partial x} + B \frac{\partial u_z}{\partial z} + C \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right), \\ \tau_{zz} &= B \frac{\partial u_x}{\partial x} + H \frac{\partial u_z}{\partial z} + C \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right), \\ -p &= C \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) + M \left(\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_z}{\partial z} \right), \\ \tau_{xz} &= L \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right); \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} &= \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + \rho_f \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}, \\ -\frac{\partial p}{\partial x} &= \rho_f \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w_x}{\partial t^2}, \quad -\frac{\partial p}{\partial z} = \rho_f \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} + m \frac{\partial^2 w_z}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.2)$$

в которых τ_{xx} , τ_{xz} , τ_{zz} – напряжения, u_x , u_z – смещения упругой фазы, w_x , w_z – относительные смещения, p – давление, ρ – средняя плотность и ρ_f – плотность жидкой фазы. Среда возбуждается точечным источником, действующим с момента $t = 0$, расположенным на оси $r = 0$ и создающим осесимметричное волновое поле.

Для решения уравнений (1.1) и (1.2) вводятся потенциалы φ_1 , φ_2 и ψ , удовлетворяющие уравнениям

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_i^2} \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} \quad (i = 1, 2), \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} &= \frac{1}{v_3^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

где скорости v_1 , v_2 и v_3 волн выражаются равенствами

$$\begin{aligned}v_{1,2}^2 &= \left[\pm \sqrt{(mH + \rho M - 2\rho_f C)^2 - 4(HM - C^2)(\rho m - \rho_f^2)} \right. \\ &\quad \left. + mH + \rho M - 2\rho_f C \right] / [2(\rho m - \rho_f^2)], \\ v_3^2 &= \frac{Lm}{\rho m - \rho_f^2}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Граница среды $r = R$ является поверхностью свободной от напряжений и с закрытыми порами. На ней выполняются граничные условия

$$\tau_{rr} = 0, \quad \tau_{rz} = 0, \quad w_r = 0. \quad (1.5)$$

Входящие в условия (1.5) напряжения и относительное смещение выражаются через потенциалы равенствами

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= (\rho + B_1 \rho_f) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + (\rho + B_2 \rho_f) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} \\ &\quad - 2L \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right), \\ \tau_{rz} &= L \left(2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\psi}{r^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \\ w_r &= B_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} + B_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} + \frac{\rho_f}{m} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \end{aligned} \quad (1.6)$$

в которых безразмерные коэффициенты B_1 и B_2 представляются соотношениями

$$B_i = \frac{C - \rho_f v_i^2}{m v_i^2 - M} = \frac{H - \rho v_i^2}{\rho_f v_i^2 - C} \quad (i = 1, 2). \quad (1.7)$$

Модули H , B , M , C и L удовлетворяют условиям

$$H > 0, \quad B > 0, \quad M > 0, \quad C > 0, \quad L > 0 \quad (1.8)$$

и равенству

$$H = B + 2L. \quad (1.9)$$

Из положительной определенности матриц, состоящих из коэффициентов в уравнениях (1.1) и (1.2), следуют неравенства

$$HM - C^2 > 0, \quad HM + BM - 2C^2 > 0, \quad \rho m - \rho_f^2 > 0. \quad (1.10)$$

Решение уравнений (1.3) выражаются равенствами

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} X_1(k, \eta) J_0(-ikr\alpha_i) e^{kt\eta} d\eta \quad (i = 1, 2), \\ \psi &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y(k, \eta) J_1(-ikr\beta) e^{kt\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (1.11)$$

где $J_1(-ikr\alpha_i)$ и $J_1(-ikr\beta)$ – функции Бесселя и

$$\alpha_i = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_1^2}} \quad (i = 1, 2), \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_3^2}}. \quad (1.12)$$

После подстановки соотношений (1.11) в формулы (1.6) и ряда преобразований приходим к равенствам

$$\begin{aligned}
\tau_{rr} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty k^2 e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \{[\rho + B_1 \rho_f) \eta^2 + 2L] J_0(-ikr \alpha_1) X_1 \\
&\quad + [(\rho + B_2 \rho_f) \eta^2 + 2L] J_0(-ikr \alpha_2) X_2 + L \beta J_0(-ikr \beta) Y\} e^{kt\eta} d\eta \\
&\quad - \frac{i2L}{2\pi r} \int_0^\infty k e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [\alpha_1 J_1(-ikr \alpha_1) X_1 + \alpha_2 J_1(-ikr \alpha_2) X_2 \\
&\quad + J_1(-ikr \beta) Y] e^{kt\eta} d\eta, \\
\tau_{rz} &= \frac{L}{2\pi} \int_0^\infty k^2 e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [2\alpha_1 J_1(-ikr \alpha_1) X_1 + 2\alpha_2 J_1(-ikr \alpha_2) X_2 \\
&\quad + g J_1(-ikr \beta) Y] e^{kt\eta} d\eta, \\
w_z &= \frac{i}{2\pi} \int_0^\infty k e^{-ikz} dk \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} [B_1 \alpha_1 J_1(-ikr \alpha_1) X_1 + B_2 \alpha_2 J_1(-ikr \alpha_2) X_2 \\
&\quad - \frac{\rho_f}{m} J_1(-ikr \beta) Y] e^{kt\eta} d\eta,
\end{aligned} \tag{1.13}$$

где

$$g = 2 + \eta^2 / v_3^2. \tag{1.14}$$

§2. ДИСПЕРСИОННОЕ УРАВНЕНИЕ

Граничные условия (1.5) совместно с равенствами (1.10) определяют систему уравнений

$$\begin{aligned}
B_1 \alpha_1 J_1(-ikR \alpha_1) X_1 + B_2 \alpha_2 J_1(-ikR \alpha_2) X_2 - \frac{\rho_f}{m} J_1(-ikR \beta) Y &= 0, \\
2\alpha_1 J_1(-ikR \alpha_1) X_1 + 2\alpha_2 J_1(-ikR \alpha_2) X_2 + g J_1(-ikR \beta) Y &= 0, \\
[(\beta_1 \rho_f + \rho) \eta^2 + 2L] J_0(-ikR \alpha_1) X_1 + [(\beta_2 \rho_f + \rho) \eta^2 + 2L] J_0(-ikR \alpha_2) X_2 \\
+ 2L \beta J_0(-ikR \beta) Y - \frac{i2L}{kR} [\alpha_1 J_1(-ikR \alpha_1) X_1 \\
+ \alpha_2 J_1(-ikR \alpha_2) X_2 + J_1(-ikR \beta) Y] &= 0.
\end{aligned} \tag{2.1}$$

При использовании второго уравнения (2.1) третье уравнение системы (2.1) заменяется соотношением

$$\begin{aligned}
[(B_1 \rho_f + \rho) \eta^2 + 2L] J_0(-ikR \alpha_1) X_1 + [(B_2 \rho_f + \rho) \eta^2 + 2L] J_0(-ikR \alpha_2) X_2 \\
+ L [2\beta J_0(-ikR \beta) + \frac{i\eta^2}{kR v_3^2} J_1(-ikR \beta)] Y &= 0.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Система, состоящая из первых двух уравнений (2.1) и уравнения (2.2), имеет ненулевое решение, если ее определитель обращается в нуль. Это условие определяет дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned}
 & 2\alpha_1\alpha_2[2L\beta J_0(-ikR\beta) \\
 & + \frac{iL\eta^2}{kRv_3^2}J_1(-ikR\beta)](B_1 - B_2)J_1(-ikR\alpha_1)J_1(-ikR\alpha_2) \\
 & + [(B_1\rho_f + \rho)\eta^2 + 2L]J_0(-ikR\alpha_1)(B_2g + 2\frac{\rho_f}{m})\alpha_2J_0(-ikR\alpha_2)J_1(-ikR\beta) \\
 & - [(B_2\rho_f + \rho)\eta^2 + 2L]J_0(-ikR\alpha_2)(B_1g + 2\frac{\rho_f}{m})\alpha_1J_0(-ikR\alpha_1)J_1(-ikR\beta) \\
 & = 0.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Преобразуем уравнение (2.3) с использованием соотношений

$$\begin{aligned}
 \frac{2\rho_f}{m} + B_1g &= \frac{mC - \rho_f M}{Lm(mv_1^2 - M)} \left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \eta^2 \right), \\
 \frac{2\rho_f}{m} + B_2g &= -\frac{mC - \rho_f M}{Lm(M - mv_2^2)} \left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \eta^2 \right);
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

$$B_1 - B_2 = \frac{(mC - \rho_f M)(v_1^2 - v_2^2)}{(M - mv_2^2)(mv_1^2 - M)}; \tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}
 \rho + B_1\rho_f &= \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C}, \quad \rho + B_2\rho_f = -\frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2}, \\
 (\rho_f v_1^2 - C)(C - \rho_f v_2^2)(\rho m - \rho_f^2) &= (mC - \rho_f M)(\rho_f H - \rho C).
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

После этих преобразований уравнение (2.3) переходит в уравнение

$$\begin{aligned}
 & (mv_1^2 - M) \left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \eta^2 \right)^2 \alpha_2 J_1(-ikR\alpha_1) J_0(-ikR\alpha_2) J_1(-ikR\beta) \\
 & + (M - mv_2^2) \left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \eta^2 \right)^2 \alpha_1 J_1(-ikR\alpha_1) J_0(-ikR\alpha_2) J_1(-ikR\beta) \\
 & - 2L^2 m\alpha_1\alpha_2(v_1^2 - v_2^2)[2\beta J_0(-ikR\beta) \\
 & + \frac{i\eta^2}{kRv_3^2}J_1(-ikR\beta)]J_1(-ikR\alpha_1)J_1(-ikR\alpha_2) = 0.
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Уравнение (2.7) имеет двойной корень $\eta = 0$ при всех вещественных kR . В этом легко убедиться, если в левую часть подставить $\eta = 0$. Все корни уравнения (2.7) расположены на мнимой оси $\eta = i\tau$, где

левая часть является вещественной или чисто мнимой. Если предположить, что существует комплексный корень в левой полуплоскости, то по принципу симметрии, должен существовать симметричный корень и в правой полуплоскости. Так как волновое поле должно удовлетворять нулевым начальным данным, то в правой полуплоскости не должно быть корней. Вследствие симметрии корней относительно начала координат, мы ограничимся рассмотрением корней только на положительной части мнимой оси $\eta = i\tau$.

§3. СКОРОСТИ В СТЕРЖНЕ ПРИ НИЗКОЙ ЧАСТОТЕ

Исследование корней уравнения (2.7) как функций от kR мы начнем со случая $kR \ll 1$ и заменим функции Бесселя приближенными равенствами

$$J_0(z) = 1, \quad J_1(z) = \frac{z}{2}. \quad (3.1)$$

После подстановки соотношений (3.1) в уравнение (2.7) приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & (mv_1^2 - M) \left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \eta^2 \right)^2 \alpha_2^2 \\ & + (M - mv_2^2) \left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \eta^2 \right)^2 \alpha_1^2 \\ & - 4L^2 m (v_1^2 - v_2^2) \alpha_1^2 \alpha_2^2 - L^2 m \frac{\eta^2}{v_3^2} (v_1^2 - v_2^2) \alpha_1^2 \alpha_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отметим, что левая часть уравнения (3.2) без последнего члена совпадает с левой частью низкочастотного симметричного дисперсионного уравнения пористой пластины с закрытыми порами на границах [7, 8]. Выражение (3.2) может быть представлено в виде полинома по η^2 . Так как свободный член этого полинома равен 0, то левая часть уравнения (3.2) представляется биквадратным трехчленом. После замены $\eta = i\tau$

уравнение (3.2) выразится равенством

$$\begin{aligned}
& (mv_1^2 - M) \left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \tau^2 \right)^2 \alpha_2^2 \\
& + (M - mv_2^2) \left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \tau^2 \right)^2 \alpha_1^2 \\
& - 2L^2 m (v_1^2 - v_2^2) \alpha_1^2 \alpha_2^2 \left(2 - \frac{\tau^2}{2v_3^2} \right) \\
& = - \frac{\tau^2 (v_1^2 - v_2^2) (\rho m - \rho_f^2)}{HM - C^2} (A_1 \tau^4 - A_2 \tau^2 + A_3), \tag{3.3}
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{mv_1^2 - M}{v_2^2} \left(\frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \right)^2 + \frac{M - mv_2^2}{v_1^2} \left(\frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \right)^2 \\
& - \frac{L^2 m (v_1^2 - v_2^2)}{v_1^2 v_2^2 v_3^2}, \tag{3.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= (mv_1^2 - M) \left(\frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \right)^2 + (M - mv_2^2) \left(\frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \right)^2 \\
& + \frac{4L}{v_2^2} (mv_1^2 - M) \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} - \frac{4L}{v_1^2} (M - mv_2^2) \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \\
& - 4L^2 m \frac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2 v_2^2} - \frac{L^2 m (v_1^4 - v_2^4)}{v_3^2 v_1^2 v_2^2}, \tag{3.5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_3 &= 4L (mv_1^2 - M) \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} - 4L (M - mv_2^2) \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \\
& + \frac{4L^2 (mv_1^2 - M)}{v_2^2} + \frac{4L^2 (M - mv_2^2)}{v_1^2} - \frac{4L^2 m (v_1^4 - v_2^4)}{v_1^2 v_2^2} \\
& - \frac{L^2 m (v_1^2 - v_2^2)}{v_3^2}. \tag{3.6}
\end{aligned}$$

После ряда преобразований с использованием формулы

$$\frac{mv_1^2 - M}{v_2^2 (\rho_f v_1^2 - C)^2} + \frac{M - mv_2^2}{v_1^2 (C - \rho_f v_2^2)^2} = \frac{H (v_1^2 - v_2^2) (\rho m - \rho_f^2)^2}{(HM - C^2) (H \rho_f - C \rho)} \tag{3.7}$$

коэффициент A_1 выражается равенством

$$A_1 = (\rho m - \rho_f^2) (H - L). \tag{3.8}$$

При преобразованиях коэффициента A_2 используются соотношения

$$\begin{aligned} \frac{mv_1^2 - M}{(\rho_f v_1^2 - C)^2} + \frac{M - mv_2^2}{(C - \rho_f v_2^2)^2} &= \rho \frac{(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)}{H\rho_f - C\rho}, \quad (3.9) \\ \frac{M - mv_2^2}{v_1^2(C - \rho_f v_2^2)} - \frac{mv_1^2 - M}{v_2^2(\rho_f v_1^2 - C)} &= - \frac{(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)(Hm - C\rho_f)}{(HM - C^2)(H\rho_f - C\rho)} \end{aligned}$$

и приходим к равенству

$$\begin{aligned} A_2 &= (H^2 - B^2)m + (HM - C^2)\rho - 2C(H - B)\rho_f \\ &\quad - L(Hm + M\rho - 2C\rho_f). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Применяя формулы

$$\begin{aligned} \frac{M - mv_2^2}{C - \rho_f v_2^2} - \frac{mv_1^2 - M}{\rho_f v_1^2 - C} &= - \frac{(\rho m - \rho_f^2)(v_1^2 - v_2^2)}{H\rho_f - L\rho}, \\ \frac{mv_1^2 - M}{v_2^2} + \frac{M - mv_2^2}{v_1^2} &= \frac{m(v_1^4 - v_2^4) - M(v_1^2 - v_2^2)}{v_1^2 v_2^2}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

получаем выражение

$$A_3 = (H - B)(HM + BM - 2C^2) - L(HM - C^2) \quad (3.12)$$

для коэффициента A_3 .

После сокращения на одинаковые множители равенство (3.3) заменяется на уравнение

$$\begin{aligned} (\rho m - \rho_f^2)(H - L)\tau^4 - [L(3B + 2L)m + (BM + LM \\ - C^2)\rho - 2CL\rho_f]\tau^2 + L(3BM + 2LM - 3C^2) = 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

корни которого представляются равенствами

$$\begin{aligned} \tau_{1,2}^2 &= \frac{A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3}}{2A_1}, \\ A_1 &= (\rho m - \rho_f^2)(H - L), \\ A_2 &= L(3B + 2L)m + (BL + LM - C^2)\rho - 2CL\rho_f, \\ A_3 &= L(3BM + 2LM - 2C^2) \end{aligned} \quad (3.14)$$

и определяют квадраты скоростей в пористом стержне при нулевой частоте. Как и в случае пористой пластины [7, 8], в пористом стержне при нулевой частоте распространяются две волны.

Исследуем случай, когда рассматриваемый пористый стержень Био переходит в упругий стержень. В этом случае выполняются равенства

$$H = \lambda + 2\mu, \quad B = \lambda, \quad L = \mu, \quad C = M = 0, \quad \rho_f = 0, \quad (3.15)$$

в которых λ и μ – коэффициенты Ламе. При условиях (3.15) уравнение (3.13) заменяется соотношением

$$\rho(\lambda + \mu)\tau^4 - \mu(3\lambda + 2\mu)\tau^2 = 0. \quad (3.16)$$

Из равенства (3.16) следует, что одна из скоростей обращается в нуль, а квадрат другой скорости представляется формулой

$$\tau^2 = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\rho(\lambda + \mu)}, \quad (3.17)$$

совпадающей с квадратом скорости в упругом стержне.

Аналогичный переход выполняется также в случае пористого слоя с закрытыми порами на границах. При нулевой частоте две скорости в пористой пластине удовлетворяют уравнению [7]

$$\begin{aligned} H(\rho m - \rho_f^2)\tau^4 - [(H^2 - B^2)m + (HM - C^2)\rho \\ - 4LC\rho_f]\tau^2 + 2L(HM + BM - 2C^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

После замены по формулам (3.15) уравнение (3.18) переходит в равенство

$$(\lambda + 2\mu)\rho\tau^4 - 4\mu(\lambda + \mu)\tau^2 = 0, \quad (3.19)$$

из которого следует формула

$$\tau^2 = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \quad (3.20)$$

для квадрата скорости волны в упругой пластине.

Если предполагать, что в упругой и жидкой фазах волны распространяются независимо, то в этом случае равенство (3.15) следует заменить на соотношения (5)

$$H = \lambda + 2\mu, \quad B = \lambda, \quad L = \mu, \quad C = 0, \quad \rho_f = 0. \quad (3.21)$$

При условиях (3.21) уравнение (3.13) распадается на два уравнения, решения которых выражаются формулой (3.17) и равенством

$$\tau^2 = M/m, \quad (3.22)$$

определяющим скорость распространения волны в жидкости.

Аналогичный переход может быть выполнен также и в случае плоского пористого слоя с закрытыми порами на границах. При условиях

(3.21) уравнение (3.18) распадается на два уравнения, при этом одно из этих уравнений имеет решение (3.20), а другое уравнение – (3.22). Таким образом, при независимом распространении волн в обеих фазах волна в жидкой фазе распространяется в пористом стержне и в пористом слое с одинаковой скоростью, определяемой соотношением (3.22). При тех же условиях волна в упругой фазе распространяется со стержневой скоростью в пористом стержне и с пластинчатой скоростью в пористом слое. Квадраты обеих скоростей определяются соответственно формулами (3.17) и (3.20).

§4. НЕРАВЕНСТВА, ОЦЕНИВАЮЩИЕ СКОРОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ

Чтобы оценить скорости (3.14) в пористом стержне сравним биквадратные уравнения в трех случаях: 1) уравнение для скоростей продольных объемных волн в пористой среде

$$(\rho m - \rho_f^2)\tau^4 - (Hm + M\rho - 2C\rho_f)\tau^2 + HM - C^2 = 0, \quad (4.1)$$

2) уравнение для скоростей в пористой пластине с закрытыми порами на границах при нулевой частоте (3.18) и 3) уравнение для скоростей в пористом стержне с закрытыми порами на границах при нулевой частоте (3.13). Все три уравнения имеют сходную структуру и их можно представить в виде равенств

$$x^2 - a_i x + d_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3), \quad (4.2)$$

в которых $x = \tau^2$, а индекс i определяется номером случая. Величины a_i и d_i представляются формулами

$$a_1 = \frac{Hm + M\rho - 2C\rho_f}{\rho m - \rho_f^2}, \quad d_1 = \frac{HM - C^2}{\rho m - \rho_f^2}, \quad (4.3)$$

$$a_2 = \frac{4L(B + L)m + (HM - C^2)\rho - 4CL\rho_f}{H(\rho m - \rho_f^2)},$$

$$d_2 = \frac{4L[M(B + L) - C^2]}{H(\rho m - \rho_f^2)}, \quad (4.4)$$

$$a_3 = \frac{L(3B + 2L)m + (BM + LM - C^2)\rho - 2CL\rho_f}{(H - L)(\rho m - \rho_f^2)},$$

$$d_3 = \frac{L(3BM + 2LM - 3C^2)}{(H - L)(\rho m - \rho_f^2)}. \quad (4.5)$$

Графики левых частей уравнений (4.2) являются конгруэнтными параболой с осями, параллельными оси ординат и направленными вверх, и с вершинами, расположенными ниже оси абсцисс. Эти параболы не пересекаются только в случае, когда абсциссы вершин парабол совпадают и имеет место вертикальный сдвиг между параболой. Во всех остальных случаях две параболы пересекаются в одной точке, которая может быть расположена или в нижней (рис. 1), или в верхней полуплоскости.

Уравнения (4.1), (3.18) и (3.13) определяют 6 скоростей: v_1, v_2 – скорости продольных объемных волн в среде Био, \bar{v}_1, \bar{v}_2 – скорости в пористой пластине и \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 – скорости в пористом стержне. Координаты точки пересечения парабол, относящихся к пористой пластине ($i = 2$) и к пористому стержню ($i = 3$), представляются равенствами

$$x = \frac{d_2 - d_3}{a_2 - a_3}, \quad y = \left(\frac{d_2 - d_3}{a_2 - a_3} \right)^2 + \frac{a_2 d_3 - a_3 d_2}{a_2 - a_3}. \quad (4.6)$$

После подстановки формул (4.4) и (4.5) в выражения (4.6) приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} x &= \frac{B(MB - C^2) + 2LC^2}{B^2m + C^2\rho - 2BC\rho_f}, \\ y &= -\frac{2LBCm - C(MB - C^2)\rho + (B^2M - C^2H)\rho_f^2}{(B^2m + C^2\rho - 2BC\rho_f)^2(\rho m - \rho_f^2)} < 0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

в которых $x > 0$, так как, согласно предположениям (1.8) и (1.10),

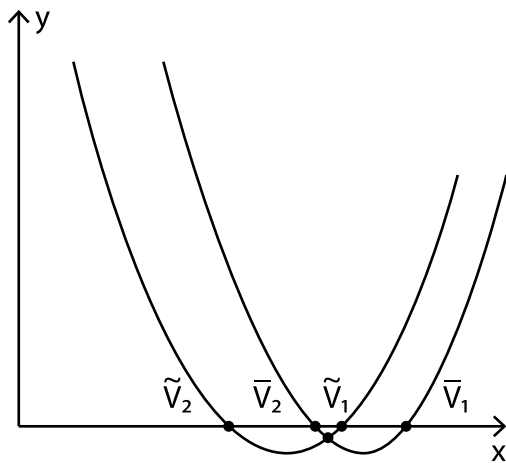
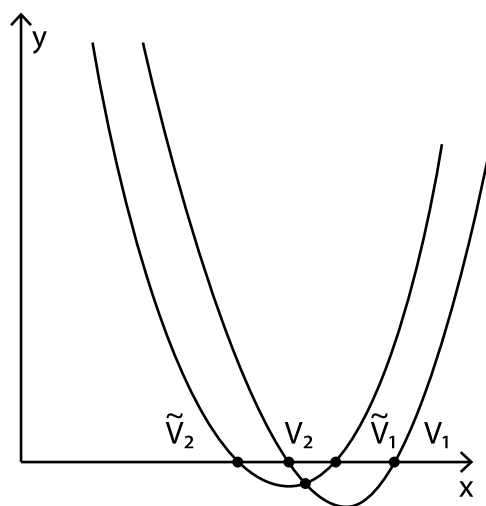
$$\begin{aligned} B(BM - C^2) + 2LC^2 &= (B\sqrt{M} - C\sqrt{H})^2 + 2BC(\sqrt{HM} - C) > 0, \\ B^2m + C^2\rho - 2BC\rho_f &= (B\sqrt{m} - C\sqrt{\rho})^2 + 2BC(\rho m - \rho_f^2) > 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Таким образом, точка пересечения парабол при $i = 2$ и $i = 3$ находится ниже оси абсцисс и расположение скоростей $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \tilde{v}_1$ и \tilde{v}_2 представляется на рис. 1 и неравенствами

$$\bar{v}_1 > \tilde{v}_1 > \bar{v}_2 > \tilde{v}_2. \quad (4.9)$$

Координаты точки пересечения парабол, относящихся к скоростям продольных волн в среде Био ($i = 1$) и к пористому стержню ($i = 3$), представляются равенствами

$$x = \frac{d_1 - d_3}{a_1 - a_3}, \quad y = \left(\frac{d_1 - d_3}{a_1 - a_3} \right)^2 + \frac{a_1 d_3 - d_1 a_3}{a_1 - a_3}. \quad (4.10)$$

Рис. 1. ($\tilde{v}_2 < \bar{v}_2 < \tilde{v}_1 < \bar{v}_1$)Рис. 2. ($\tilde{v}_2 < v_2 < \tilde{v}_1 < v_1$)

После подстановки формул (4.3) и (4.5) в выражения (4.10) приходим также к соотношениям (4.7) для координат точки пересечения парабол. Эта точка также находится ниже оси абсцисс. Расположение скоростей v_1 , v_2 , \tilde{v}_1 и \tilde{v}_2 представляются на рис. 2 и неравенствами

$$v_1 > \tilde{v}_1 > v_2 > \tilde{v}_2. \quad (4.11)$$

Таким образом, все три параболы, являющиеся графиками левых частей уравнений (4.2), пересекаются в одной точке с координатами (4.7) и не могут пересекаться в других точках. Эти параболы пересекают ось абсцисс в точках с координатами v_1 , \bar{v}_1 , \tilde{v}_1 , v_2 , \bar{v}_2 и \tilde{v}_2 , удовлетворяющими неравенствам

$$v_1 > \bar{v}_1 > \tilde{v}_1 > v_2 > \bar{v}_2 > \tilde{v}_2 \quad (4.12)$$

и изображенными на рис. 3. Используемый способ вывода неравенств (4.9), (4.11) и (4.12) был применен в работе [8]. Отметим, что в случае перехода от пористых сред к упругим $\bar{v}_2 = \tilde{v}_2 = 0$ и неравенства (4.12) заменяются на

$$v_1 > \bar{v}_1 > \tilde{v}_2 > v_2. \quad (4.13)$$

§5. ДИСПЕРСИОННЫЕ КРИВЫЕ НОРМАЛЬНЫХ ВОЛН В ПОРИСТОМ СТЕРЖНЕ

Кроме точек $\eta = i\tilde{v}_1$ и $\eta = i\tilde{v}_2$, расположенных на конечном расстоянии от начала координат, начальной точкой для корней дисперсионного уравнения (2.7) является также точка $\eta = i\infty$ при $kR = 0$. Из этой точки выходит бесконечное число корней. В уравнении (2.7) полезно произвести замену

$$\eta = i\tau \quad (5.1)$$

и разделить левую часть на произведение

$$J_1(-ikR\alpha_1)J_1(-ikR\alpha_2)J_1(-ikR\beta). \quad (5.2)$$

После этих преобразований уравнение (2.7) заменится на уравнение

$$\begin{aligned} & (mv_1^2 - M) \left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \tau^2 \right) \bar{\alpha}_2 \frac{J_0(kR\bar{\alpha}_1)}{J_1(kR\bar{\alpha}_1)} \\ & + (M - mv_2^2) \left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} r^2 \right) \bar{\alpha}_1 \frac{J_0(kR\bar{\alpha}_2)}{J_1(kR\bar{\alpha}_2)} \\ & - 2L^2 m \bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2 (v_1^2 - v_2^2) \left[2\bar{\beta} \frac{J_0(kR\bar{\beta})}{J_1(kR\bar{\beta})} - \frac{i\tau^2}{kRv_3^2} \right] = 0, \end{aligned} \quad (5.3)$$

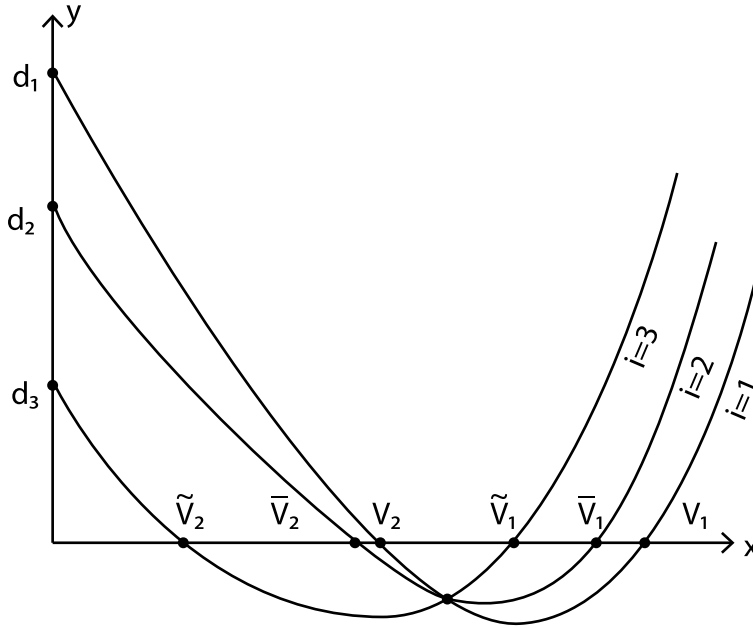


Рис. 3. ($\tilde{v}_2 < \bar{v}_2 < v_2 < \tilde{v}_1 < \bar{v}_1 < v_1$)

где

$$\bar{\alpha}_i = \sqrt{\frac{\tau^2}{v_i^2} - 1} \quad (i = 1, 2), \quad \bar{\beta} = \sqrt{\frac{\tau^2}{v_3^2} - 1}. \quad (5.4)$$

Уравнение (5.3) имеет полюса, в которых

$$J_1(kR\bar{\alpha}_1) = 0, \quad J_1(kR\bar{\alpha}_2) = 0, \quad J_1(kR\bar{\beta}) = 0. \quad (5.5)$$

Эти полюса с ростом kR монотонно перемещаются по мнимой оси в сторону начала координат. Все корни уравнения (5.3), кроме корней, выходящих из точек \tilde{v}_1 и \tilde{v}_2 , расположены между соседними полюсами и поэтому с ростом kR также двигаются к началу координат. При этом движении корни не могут обгонять друг друга, так как в этом случае образовывались бы двойные корни, что невозможно. Первыми корнями оказываются корни, выходящие из точек $\tau = \tilde{v}_2$ и $\tau = \tilde{v}_1$. Остальные корни следуют за ними. Движение корней неравномерное,

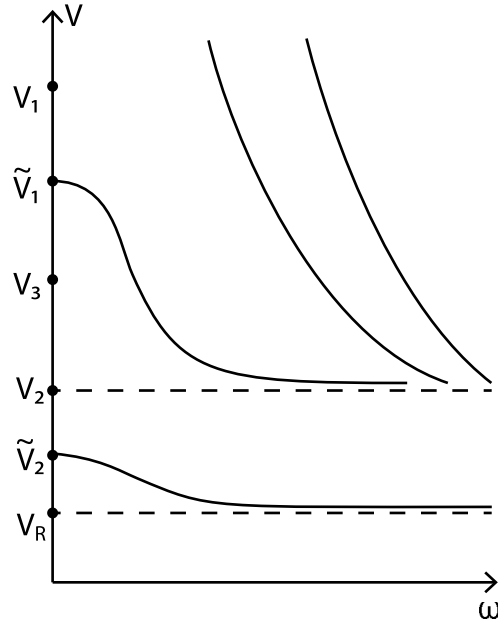


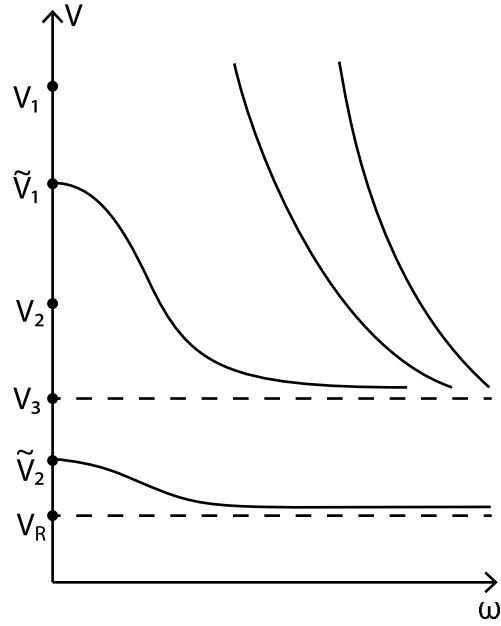
Рис. 4. ($\tilde{v}_2 < v_2 < v_3$)

и вблизи точек $\tau = v_1$ и $\tau = \max(v_2, v_3)$ корни сравнительно медленно перемещаются, образуя скопления корней. Для большинства корней конечной точкой является $\tau = \min(v_2, v_3)$. К ней корни приближаются асимптотически (рис. 4–6).

Остановимся на исследовании корней дисперсионного уравнения в интервале

$$0 \leq \tau \leq \min(v_2, v_3). \tag{5.6}$$

При условиях $\tilde{v}_2 < v_2 < v_3$ или $\tilde{v}_2 < v_3 < v_2$ в этом промежутке находится корень, выходящий из точки $\tau = \tilde{v}_2$ (рис. 4, 5). При условии $v_3 < \tilde{v}_2 < v_2$ корень, выходящий из точки $\tau = \tilde{v}_2$, находится сперва вне интервала (5.6), но с ростом kR проходит через этот промежуток

Рис. 5. ($\tilde{v}_2 < v_3 < v_2$)

и через точку $\tau = v_3$ (рис. 6). Для доказательства последнего утверждения рассмотрим дисперсионное уравнение (2.7)

$$\begin{aligned}
 \Delta(\tau, kR) = & (mv_1^2 - M) \left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} r^2 \right)^2 \alpha_2 \frac{J_1(-ikR\alpha_2)}{J_0(-ikR\alpha_2)} \frac{J_1(-ikR\beta)}{J_0(-ikR\beta)} \\
 & + (M - mv_2^2) \left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \tau^2 \right)^2 \alpha_1 \frac{J_1(-ikR\alpha_1)}{J_0(-ikR\alpha_1)} \frac{J_1(-ikR\beta)}{J_0(-ikR\beta)} \\
 & - 2L^2 m \alpha_1 \alpha_2 (v_1^2 - v_2^2) \left[2\beta - \frac{i\tau^2}{kRv_3^2} \frac{J_1(-ikR\beta)}{J_0(-ikR\beta)} \right] \frac{J_1(-ikR\alpha_1)}{J_0(-ikR\alpha_1)} \frac{J_1(-ikR\alpha_2)}{J_0(-ikR\alpha_2)} = 0.
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

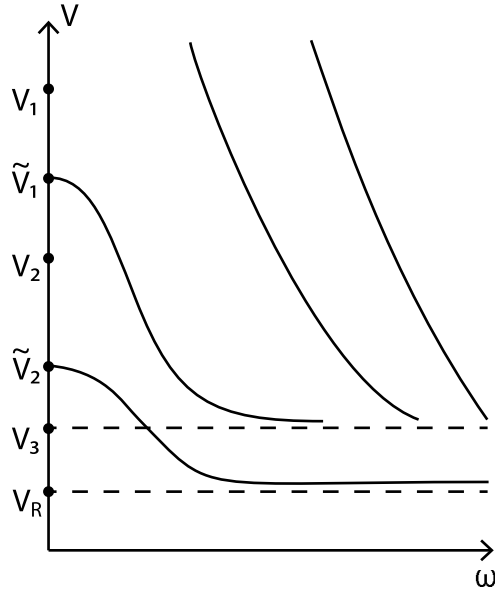


Рис. 6. ($v_3 < \tilde{v}_2 < v_2$)

При малых kR уравнение (5.7) на основании (3.3) заменяется равенствами

$$\begin{aligned} \Delta(\tau, kR \ll 1) &= -\frac{\tau^2(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)}{HM - C^2}(A_1\tau^4 - A_2\tau^2 + A_3) \\ &= -\frac{\tau^2(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)}{HM - C^2}A_1(\tau^2 - \tilde{v}_1^2)(\tau^2 - \tilde{v}_2^2), \end{aligned} \quad (5.8)$$

а при $\tau = v_3$ - неравенством

$$\Delta(v_3, kR \ll 1) = -\frac{v_3^2(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)}{HM - C^2}A_1(\tilde{v}_1^2 - v_3^2)(\tilde{v}_2^2 - v_3^2) < 0. \quad (5.9)$$

При рассмотрении функции $\Delta(\tau, kR)$ используем асимптотику

$$J_0(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right), J_1(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \quad (5.10)$$

функций Бесселя при $|z| \gg 1$. Из формул (5.10) при $kR \gg 1$ следуют равенства

$$\begin{aligned} \frac{J_i(-ikR\alpha_j)}{J_0(-ikR\alpha_j)} &= \operatorname{tg}\left(-ikR\alpha_j - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1 + i \operatorname{th}(kR\alpha_j)}{1 - i \operatorname{th}(kR\alpha_j)} = -i \quad (j = 1, 2), \\ \frac{J_1(-ikR\beta)}{J_0(-ikR\beta)} &= -i. \end{aligned} \quad (5.11)$$

С учетом формул (5.11) уравнение (5.7) приводит к равенству

$$\begin{aligned} \Delta(\tau, kR \gg 1) &= (mv_1^2 - M) \left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \tau^2\right)^2 \alpha_2 \\ &+ (M - mv_2^2) \left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \tau^2\right)^2 \alpha_1 - 4L^2 m \alpha_1 \alpha_2 \beta (v_1^2 - v_2^2), \end{aligned} \quad (5.12)$$

из которого следует, что при $\tau = v_3$ и $\beta = 0$

$$\Delta(v_3, kh \gg 1) > 0. \quad (5.13)$$

Из неравенств (5.9) и (5.13) вытекает, что через точку $\tau = v_3$ может проходить нечетное число корней. Но только один корень, выходящий из $\tau = \tilde{v}_2$, проходит через точку $\tau = v_3$, так как в случае прохождения трех и более корней через эту точку проходили бы не только корни, но и полюса, что невозможно.

Таким образом, в области (5.6) находится один корень, выходящий из точки $\tau = \tilde{v}_2$. Определим конечное положение этого корня при $kR = \infty$. С этой целью в уравнении (5.7) совершим предельный переход при $kR = \infty$ в интервале (5.6) и получим уравнение

$$\begin{aligned} \Delta(\tau, kR = \infty) &= (mv_1^2 - M) \left(2L - \frac{\rho_f H - \rho C}{\rho_f v_1^2 - C} \tau^2\right)^2 \alpha_2 \\ &+ (M - mv_2^2) \left(2L + \frac{\rho_f H - \rho C}{C - \rho_f v_2^2} \tau^2\right)^2 \alpha_1 - 4L^2 m (v_1^2 - v_2^2) \alpha_1 \alpha_2 \beta = 0. \end{aligned} \quad (5.14)$$

Если рассмотреть точки $\tau = v_2$ ($\alpha_2 = 0$) или $\tau = v_3$ ($\beta = 0$), то из уравнения (5.14) следуют неравенства

$$\Delta(v_2, kR = \infty) > 0, \quad \Delta(v_3, kR = \infty) > 0. \quad (5.15)$$

При малых τ , согласно уравнению (3.3), приходим к неравенству

$$\Delta(\tau, kR = \infty) = -\frac{\tau^2(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)}{HM - C^2}L(3BM + 2LM - 3C^2) < 0. \quad (5.16)$$

Из неравенств (5.15) и (5.16) следует, что уравнение (5.14) имеет один корень, который обозначим через v_R и который является конечной точкой для корня, выходящего из точки $\tau = \tilde{v}_2$. Дисперсионные кривые в случае различных соотношений между скоростями v_2 , v_3 и \tilde{v}_2 приведены на рис. 4–6.

Со скоростью v_R распространяется поверхностная волна Релея в пористой среде Био вдоль свободной границы с закрытыми порами [7, 8]. Эта волна существует при всех параметрах и ее скорость меньше скорости v_2 . В случае же открытых пор на границах и $v_2 < v_3$ волна Релея может распространяться, если соответствующее дисперсионное уравнение при $kR = \infty$ имеет корень в интервале $0 < \tau < v_2$. В случае $v_2 < v_3$ и отсутствия указанного корня волна Релея отсутствует [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. М. А. Бiot, *Theory of elastic waves in fluid-saturated porous solid. I. Low frequency range.* — *Acoust. Soc. Amer.* **28** (1956), 168–178.
2. М. А. Бiot, *Theory of elastic waves in fluid-saturated porous solid. II Higher frequency range.* — *Acoust. Soc. Amer.* **28** (1956), 179–191.
3. М. А. Бiot, *Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media.* — *Appl. Phys.* **33**, No. 4 (1962), 1482–1498.
4. Т. Bourbie, О. Coussy, В. Zinzner, *Acoustic of porous media.* Paris (1987).
5. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред.* С.-Петербург. Наука (2001).
6. Л. А. Молотков, *Распространение нормальных волн в пористом стержне с открытыми порами на границах.* — *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **393** (2011), 211–223.
7. Л. А. Молотков, *Распространение волн в изолированном пористом слое Био с закрытыми порами на границах.* — *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **354** (2008), 173–189.
8. Л. А. Молотков, *Исследование низкочастотных нормальных волн в слое Био, окруженном упругой средой.* — *Зап. научн. семин. ПОМИ*, **369** (2009), 110–126.

Molotkov L. A. Propagation of normal waves in porous rod with closed pores on boundaries.

Propagation of normal waves in porous cylindrical rod with closed pores on boundaries is investigated. For this medium the dispersion equation is

derived. At low-frequency this equation has two roots which are velocities of the normal waves. While in the cases of elastic rod and of porous rod with opened pores there is unique low-frequency wave. At high-frequency the dispersion equation has one special root. With such velocity the Rayleigh wave propagates along free boundary of the porous medium with closed pores. In this case the Rayleigh wave can exist always.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: molotkov@pdmi.ras.ru

Поступило 8 июня 2011 г.