

Л. А. Молотков

## НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПОРИСТОМ СЛОЕ С ОТКРЫТЫМИ ПОРАМИ НА ОДНОЙ ГРАНИЦЕ И С ЗАКРЫТЫМИ ПОРАМИ НА ДРУГОЙ ГРАНИЦЕ

В волновом поле пористых сред Био существенную роль играют особые низкочастотные нормальные волны. Эти волны в большой степени зависят от состояния пор на свободных границах. Упомянутые поры на границах могут быть как открытыми, так и закрытыми. В изолированном пористом слое на низкой частоте с открытыми порами распространяется одна пластинчатая волна [1], а в случае закрытых пор распространяются две пластинчатые волны [2].

В настоящей работе рассматривается распространение волн в изолированном пористом слое, при этом на одной границе поры открыты, а на другой – закрыты. Так как такой слой не обладает симметрией относительно средней плоскости, то граничные условия необходимо учитывать одновременно на обеих границах. В результате левая часть дисперсионного уравнения представляется в виде определителя шестого порядка. На низкой частоте этот определитель приводится к квазидиагональному виду и дисперсионное уравнение распадается на два уравнения. Исследование этих уравнений определяет особые волны, образующиеся на низких частотах. Такими особыми волнами являются одна пластинчатая волна и волна с нулевой скоростью при нулевой частоте. Обе скорости особых волн при нулевой частоте в рассматриваемом слое и в слое с открытыми порами совпадают.

С ростом частоты фазовые скорости большинства нормальных волн стремятся к минимальной скорости объемных волн в пористой среде. Исключения представляют особые волны. Их скорости приближаются к скоростям волн Релея, распространяющихся вдоль свободных границ пористого слоя. При этом скорость пластинчатой волны стремится к  $v_{R1}$ , а скорость волны, равной нулю при нулевой частоте, приближается к  $v_{R2}$ , и  $v_{R2} < v_{R1}$ . В том случае, когда поры на границе

---

*Ключевые слова:* пористый слой, пластинчатая волна, волна Релея, открытые поры, закрытые поры.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 11-01-00407А.

открыты и волна Релея не выделяется по скорости от остальных нормальных волн [3], конечной скоростью пластинчатой волны является вторая продольная скорость  $v_{R2}$ .

### 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть задан изолированный однородный изотропный пористый флюидонасыщенный слой, у которого на границе  $z = 0$  поры открыты, а на границе  $z = h$  поры закрыты. Слой возбуждается некоторым точечным источником, действующим с момента  $t = 0$ , расположенным на оси  $z$  и создающим осесимметричное волновое поле. Это поле описывается потенциалами  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\psi$ , удовлетворяющими уравнениям

$$\Delta\varphi_1 = \frac{1}{v_1^2} \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2}, \quad \Delta\varphi_2 = \frac{1}{v_2^2} \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \quad \Delta\psi - \frac{\psi}{r^2} = \frac{1}{v_3^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}, \quad (1.1)$$

в которых

$$v_{1,2}^2 = \left[ \pm \sqrt{(Hm + M\rho - 2C\rho_f)^2 - 4(HM - C^2)(\rho m - \rho_f^2)} + Hm + M\rho - 2C\rho_f \right] / [2(\rho m - \rho_f^2)], \quad (1.2)$$

$$v_3^2 = Lm / (\rho m - \rho_f^2),$$

$\rho$  – средняя плотность среды и  $\rho_f$  – плотность жидкой фазы. Через потенциалы напряжения  $\tau_{zz}, \tau_{rz}$ , давление  $p$  и относительное смещение  $w_z$  выражаются соотношениями

$$\begin{aligned} \tau_{zz} &= (\rho + B_1\rho_1) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + (\rho + B_2\rho_f) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2} \\ &\quad - 2L \left( \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_2}{\partial r} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right), \\ \tau_{rz} &= L \left( 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial r \partial z} + 2 \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial r \partial z} + \frac{1}{v_3^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + 2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right), \\ -p &= (\rho_f + B_1 m) \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + (\rho_f + B_2 m) \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial t^2}, \\ w_z &= B_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} + B_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} - \frac{\rho_f}{m} \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\psi}{r} \right). \end{aligned} \quad (1.3)$$

Безразмерные коэффициенты  $B_1$  и  $B_2$  выражаются равенствами

$$B_i = \frac{C - \rho_f v_i^2}{m v_i^2 - M} = \frac{H - \rho v_i^2}{\rho_f v_i^2 - C} \quad (i = 1, 2). \quad (1.4)$$

Модули  $H$ ,  $B$ ,  $M$ ,  $C$  и  $L$  удовлетворяют условиям

$$H > 0, \quad B > 0, \quad M > 0, \quad C > 0, \quad L > 0 \quad (1.5)$$

и равенству

$$H = B + 2L. \quad (1.6)$$

Из положительной определенности потенциальной и кинетической энергий в среде Био следуют неравенства

$$HM - C^2 > 0, \quad HM + BM - 2C^2 > 0, \quad \rho m - \rho_f^2 > 0. \quad (1.7)$$

Потенциалы  $\varphi_1, \varphi_2$  и  $\psi$  как решения уравнений (1.1) представляются равенствами

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ X_{11}(k, \eta)e^{-kz\alpha_1} + X_{12}(k, \eta)e^{k(z-h)\alpha_1} \right] e^{kt\eta} d\eta, \\ \varphi_2 &= \int_0^\infty \frac{J_0(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ X_{21}(k, \eta)e^{-kz\alpha_2} + X_{22}(k, \eta)e^{k(z-h)\alpha_2} \right] e^{kt\eta} d\eta, \\ \psi &= \int_0^\infty \frac{J_1(kr)dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left[ Y_1(k, \eta)e^{-kz\beta} + Y_2(k, \eta)e^{k(z-h)\beta} \right] e^{kt\eta} d\eta, \end{aligned} \quad (1.8)$$

в которых

$$\alpha_i = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_i^2}} \quad (i = 1, 2), \quad \beta = \sqrt{1 + \frac{\eta^2}{v_3^2}}. \quad (1.9)$$

На границах слоя выполняются условия

$$\begin{aligned} \tau_{zz}(0) = 0, \quad \tau_{rz}(0) = 0, \quad -p(0) = 0, \\ \tau_{zz}(h) = 0, \quad \tau_{rz}(h) = 0, \quad w(h) = 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Входящие в равенства (1.10) величины  $\tau_{zz}$ ,  $\tau_{rz}$ ,  $-p$  и  $w$  представляются равенствами

$$\begin{aligned}
\tau_{zz} &= \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ A_1 \left[ X_{11} e^{-kz\alpha_1} + X_{12} e^{k(z-h)\alpha_1} \right] \right. \\
&\quad + A_2 \left[ X_{21} e^{-kz\alpha_2} + X_{22} e^{k(z-h)\alpha_2} \right] \\
&\quad \left. - 2L\beta \left[ Y_1 e^{-kz\beta} - Y_2 e^{k(z-h)\beta} \right] \right\} e^{kt\eta} d\eta, \\
\tau_{rz} &= \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ 2\alpha_1 \left[ X_{11} e^{-kz\alpha_1} - X_{12} e^{k(z-h)\alpha_1} \right] \right. \\
&\quad + 2\alpha_2 \left[ X_{21} e^{-kz\alpha_2} - X_{22} e^{k(z-h)\alpha_2} \right] \\
&\quad \left. - g \left[ Y_1 e^{-kz\beta} + Y_2 e^{k(z-h)\beta} \right] \right\} e^{kt\eta} d\eta, \\
-p &= \int_0^{\infty} \frac{k^2 J_0(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ (\rho_f + B_1 m) \left[ X_{11} e^{-kz\alpha_1} + X_{12} e^{k(z-h)\alpha_1} \right] \right. \\
&\quad \left. + (\rho_f + B_2 m) \left[ X_{21} e^{-kz\alpha_2} + X_{22} e^{k(z-h)\alpha_2} \right] \right\} e^{kt\eta} d\eta, \\
w &= - \int_0^{\infty} \frac{k J_1(kr) dk}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \left\{ B_1 \alpha_1 \left[ X_{11} e^{-kz\alpha_1} - X_{12} e^{k(z-h)\alpha_2} \right] \right. \\
&\quad + B_2 \alpha_2 e^{-kz\alpha_2} \left[ X_{21} e^{-kz\alpha_2} - X_{22} e^{k(z-h)\alpha_2} \right] \\
&\quad \left. + \frac{\rho_f}{m} \left[ Y_1 e^{-kz\beta} + Y_2 e^{k(z-h)\beta} \right] \right\} e^{kt\eta} d\eta,
\end{aligned} \tag{1.11}$$

где

$$A_1 = 2L + \eta^2(\rho + B_1 \rho_f), \quad A_2 = 2L + \eta^2(\rho + B_2 \rho_f), \quad g = 2 + \frac{\eta^2}{v_3^2}. \tag{1.12}$$

После подстановки соотношений (1.11) в условия (1.10) приходим к однородной системе уравнений

$$\begin{aligned}
A_1 (X_{11} + X_{12} e^{-kh\alpha_1}) + A_2 (X_{21} + X_{22} e^{-kh\alpha_2}) - 2L\beta (Y_1 - Y_2 e^{-kh\beta}) &= 0, \\
A_1 (X_{11} e^{-kh\alpha_1} + X_{12}) + A_2 (X_{21} e^{-kh\alpha_2} + X_{22}) - 2L\beta (Y_1 e^{-kh\beta} - Y_2) &= 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& 2\alpha_1(X_{11} - X_{12}e^{-kh\alpha_1}) + 2\alpha_2(X_{21} - X_{22}e^{-kh\alpha_2}) - g(Y_1 + Y_2e^{-kh\beta}) = 0, \\
& 2\alpha_1(X_{11}e^{-kh\alpha_1} - X_{12}) + 2\alpha_2(X_{21}e^{-kh\alpha_2} - X_{22}) - g(Y_1e^{-kh\beta} + Y_2) = 0, \\
& (\rho_f + B_1m)(X_{11} + X_{12}e^{-kh\alpha_1}) + (\rho_f + B_2m)(X_{21} + X_{22}e^{-kh\alpha_2}) = 0, \\
& B_1\alpha_1(X_{11}e^{-kh\alpha_1} - X_{12}) + B_2\alpha_2(X_{21}e^{-kh\alpha_2} - X_{22}) \\
& + \frac{\rho_f}{m}(Y_1e^{-kh\beta} + Y_2) = 0.
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Однородная система уравнений (1.13) имеет ненулевое решение, если ее определитель равен нулю. Это условие определяет дисперсионное уравнение

$$\begin{vmatrix}
A_1 & A_1E_1 & A_2 & A_2E_2 & -2L\beta & 2L\beta E_3 \\
A_1E_1 & A_1 & A_2E_2 & A_2 & -2L\beta E_3 & 2L\beta \\
2\alpha_1 & -2\alpha_1E_1 & 2\alpha_2 & -2\alpha_2E_2 & -g & -gE_3 \\
2\alpha_1E_1 & -2\alpha_1 & 2\alpha_2E_2 & -2\alpha_2 & -gE_3 & -g \\
\tilde{\rho}_1 & \tilde{\rho}_1E_1 & \tilde{\rho}_2 & \tilde{\rho}_2E_2 & 0 & 0 \\
B_1\alpha_1E_1 & -B_1\alpha_1 & B_2\alpha_2E_2 & -B_2\alpha_2 & (\rho_f/m)E_3 & \rho_f/m
\end{vmatrix} = 0, \tag{1.14}$$

где

$$\begin{aligned}
E_1 &= e^{-kh\alpha_1}, & E_2 &= e^{-kh\alpha_2}, & E_3 &= e^{-kh\beta}, \\
\tilde{\rho}_1 &= \rho_f + B_1m, & \tilde{\rho}_2 &= \rho_f + B_2m.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

## 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСПЕРСИОННОГО УРАВНЕНИЯ ПРИ $kh \ll 1$

Дисперсионное уравнение (1.14) при вещественных  $kh$  имеет только чисто мнимые решения  $\eta = i\tau$ , описывающие фазовые скорости  $\tau$  нормальных волн. Обозначим через  $\Delta(\tau, kh)$  левую часть дисперсионного уравнения (1.14) и начнем его исследование со случая

$$kh \ll 1, \tag{2.1}$$

когда выполняются приближенные равенства

$$\begin{aligned}
E_1 &= e^{-kh\alpha_1} = 1 - kh\alpha_1, & E_2 &= e^{-kh\alpha_2} = 1 - kh\alpha_2, \\
E_3 &= e^{-kh\beta} = 1 - kh\beta.
\end{aligned} \tag{2.2}$$

После вычитаний из первой строки элементов второй строки и из третьей строки элементов четвертой строки и после вынесения множителей  $kh$  из первой и третьей строк получим некоторый определитель.

В этом определителе положим  $kh = 0$ , сохраняя множитель  $k^2h^2$ , и придем к соотношению

$$\Delta(\tau, kh \ll 1) = k^2h^2 \begin{vmatrix} A_1\alpha_1 & -A_1\alpha_1 & A_2\alpha_2 & -A_2\alpha_2 & -2L\beta^2 & -2L\beta^2 \\ A_1 & A_1 & A_2 & A_2 & -2L\beta & 2L\beta \\ 2\alpha_1^2 & 2\alpha_1^2 & 2\alpha_2^2 & 2\alpha_2^2 & -\beta g & \beta g \\ 2\alpha_1 & -2\alpha_1 & 2\alpha_2 & -2\alpha_2 & -g & -g \\ \tilde{\rho}_1 & \tilde{\rho}_1 & \tilde{\rho}_2 & \tilde{\rho}_2 & 0 & 0 \\ B_1\alpha_1 & -B_1\alpha_1 & B_2\alpha_2 & -B_2\alpha_2 & \rho_f/m & \rho_f/m \end{vmatrix}. \quad (2.3)$$

Дальнейшие преобразования определителя в формуле (2.3) касаются столбцов. Прибавим элементы второго столбца к элементам первого столбца и вынесем из первого столбца множитель 2. Затем полученный первый столбец вычтем из второго столбца и выделим из последнего множитель  $\alpha_1$ . Аналогичные операции проведем с третьим и четвертым столбцами, а также с пятым и шестым столбцами. После преобразований с третьим, четвертым, пятым и шестым столбцами будет выделен из определителя множитель  $4\alpha_2\beta$ . В результате всех преобразований равенство (2.3) заменится соотношением

$$\Delta(\tau, kh \ll 1) = 8\alpha_1\alpha_2\beta k^2h^2 \begin{vmatrix} 0 & -A_1 & 0 & -A_2 & -2L\beta^2 & 0 \\ A_1 & 0 & A_2 & 0 & 0 & 2L \\ 2\alpha_1^2 & 0 & 2\alpha_2^2 & 0 & 0 & g \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -g & 0 \\ \rho_f + B_1m & 0 & \rho_f + B_2m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_1 & 0 & -B_2 & \rho_f/m & 0 \end{vmatrix}. \quad (2.4)$$

После перестановок строк и столбцов в определителе (2.4) последний приводится к квазидиагональному виду

$$\Delta(\tau, kh \ll 1) = 8\alpha_1\alpha_2\beta k^2h^2 \Delta_1(\tau)\Delta_2(\tau), \quad (2.5)$$

при этом

$$\Delta_1(\tau) = \begin{vmatrix} -A_1 & -A_2 & -2L\beta^2 \\ -2 & -2 & -g \\ -B_1 & -B_2 & \rho_f/m \end{vmatrix}, \quad (2.6)$$

$$\Delta_2(\tau) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & 2L \\ 2\alpha_1^2 & 2\alpha_2^2 & g \\ \rho_f + B_1m & \rho_f + B_2m & 0 \end{vmatrix}.$$

После вычисления определителей (2.6) приходим к равенствам

$$\Delta_1(\tau) = -\frac{\rho(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)^2 \tau^4}{Lm(Cm - M\rho_f)}, \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \Delta_2(\tau) &= \frac{(\rho m - \rho_f^2)^3 (v_1^2 - v_2^2) \tau^2}{Lm(Cm - M\rho_f)} \left( \tau^2 - \frac{2Lm}{\rho m - \rho_f^2} \frac{HM + BM - 2C^2}{HM - C^2} \right) \\ &= \frac{(\rho m - \rho_f^2)^3 (v_1^2 - v_2^2) \tau^2}{Lm(Cm - M\rho_f)} \left[ \tau^2 - 4v_3^2 \left( 1 - \frac{LM}{HM - C^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.8)$$

При выводе соотношений (2.7) и (2.8) использовались формулы

$$\begin{aligned} &[2L + \eta^2(\rho + B_1\rho_f)](\rho_f + B_2m) \\ &- [2L + \eta^2(\rho + B_2\rho_f)](\rho_f + B_1m) = (B_2 - B_1)Lmg; \quad (2.9) \\ &\rho_f + B_1m = \frac{M\rho_f - Cm}{M - mv_1^2}, \quad \rho_f + B_2m = \frac{M\rho_f - Cm}{M - mv_2^2}, \\ &B_2 - B_1 = -\frac{(M\rho_f - Cm)(v_1^2 - v_2^2)}{(M - mv_2^2)(mv_1^2 - M)} = \frac{(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)}{Cm - M\rho_f}, \quad (2.10) \\ &(mv_1^2 - M)(M - v_2^2) = \frac{(Cm - M\rho_f)^2}{\rho m - \rho_f^2}. \end{aligned}$$

Окончательное выражение

$$\begin{aligned} \Delta(\tau, kh \ll 1) &= -8\alpha_1\alpha_2\beta k^2 h^2 \\ &\times \frac{\rho(v_1^2 - v_2^2)^2 (\rho m - \rho_f^2)^5 \tau^6}{L^2 m^2 (Cm - M\rho_f)^2} \left[ \tau^2 - \frac{2Lm(HM + BM - 2C^2)}{(\rho m - \rho_f^2)(HM - C^2)} \right] \end{aligned} \quad (2.11)$$

для левой части дисперсионного уравнения при условии  $kh \ll 1$  записано на основании формул (2.4), (2.7) и (2.8).

Это выражение определяет начальные точки дисперсионных кривых нормальных волн. Однако не все множители в формуле (2.11) связаны с начальными точками дисперсионных кривых. К таким точкам относятся точки  $\tau = v_1$ ,  $\tau = v_2$  и  $\tau = v_3$ , где  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 = 0$  и  $\beta = 0$ . В этих точках дисперсионное уравнение (1.14) удовлетворяется при всех вещественных  $kh$ . В самом деле, если  $\alpha_1 = 0$ , то первый и второй столбцы совпадают и определитель (1.14) равен 0. Также определитель (1.14) обращается в нуль в случае  $\alpha_2 = 0$  и в случае  $\beta = 0$ . Тогда соответственно имеют место совпадения третьего и четвертого столбцов, а также пятого и шестого столбцов.

Множитель  $\eta^4$  также не связан с дисперсионными кривыми, так как уравнение (1.14) при всех вещественных  $kh$  имеет корень четвертой кратности  $\eta = 0$ . Для доказательства этого факта нужно в определителе (1.14) первый столбец прибавить к пятому, из четвертого и шестого столбцов вычесть второй столбец и из третьего столбца вычесть первый. После этих операций уравнение (1.14) заменится на уравнение

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_1 e^{-kh\alpha_1} & a_{13}\tau^2 & a_{14}\tau^2 & a_{15}\tau^2 & a_{16}\tau^2 \\ A_1 e^{-kh\alpha_1} & A_1 & a_{23}\tau^2 & a_{24}\tau^2 & a_{25}\tau^2 & a_{26}\tau^2 \\ 2\alpha_1 & -2\alpha_1 e^{-kh\alpha_1} & a_{33}\tau^2 & a_{34}\tau^2 & a_{35}\tau^2 & a_{36}\tau^2 \\ 2\alpha_1 e^{-kh\alpha_1} & -2\alpha_1 & a_{43}\tau^2 & a_{44}\tau^2 & a_{45}\tau^2 & a_{46}\tau^2 \\ \rho_f + B_1 m & (\rho_f + B_1 m)e^{-kh\alpha_1} & a_{53} & a_{54} & a_{55} & a_{56} \\ B_1 \alpha_1 e^{-kh\alpha_1} & B_1 \alpha_1 & a_{63} & a_{64} & a_{65} & a_{66} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.12)$$

Коэффициенты  $a_{ik}$  могут быть легко определены при использовании указанных преобразований столбцов и являются конечными при  $\tau \rightarrow 0$ . Согласно свойствам определителей, определитель является суммой произведений, при этом каждое произведение содержит в виде множителей по одному элементу из каждого столбца и из каждой строки. Из этих условий следует, что все указанные произведения должны иметь множитель  $\tau^4$  и такой множитель имеет определитель в равенстве (2.12) при всех  $kh$ .

После отбрасывания множителя  $\tau^4 \alpha_1 \alpha_2 \beta$  приходим к выводу, что квадрат скоростей нормальных волн при нулевой частоте определяется равенствами

$$\tau^2 = 0, \quad \tau^2 = v_{pl}^2 = \frac{2Lm(HM + BM - 2C^2)}{(\rho m - \rho_f^2)(HM - C^2)}. \quad (2.13)$$

С ростом частоты или волнового числа эти скорости изменяются, сохраняя симметрию относительно начала координат. Скорости (2.13) полностью совпадают со скоростями при нулевой частоте в случае пористого слоя с открытыми порами на обеих границах [1, 4]. Пластинчатая скорость  $v_{pl}$  удовлетворяет неравенству

$$v_{pl} > v_3, \quad (2.14)$$

установленному на основании анализа модулей всесторонних сжатий скелета, жидкости и пористой среды [5, 6]. В то же время формулы (2.13) отличаются от скоростей в случае слоя с закрытыми порами



на обеих границах. Основное различие в том, что в слое с закрытыми порами на границах распространяются две нормальные волны при нулевой частоте [2].

Кроме точек (2.13), начальной точкой для корней дисперсионного уравнения является также точка  $\tau = \infty$  при  $kh = 0$ . Из этой точки выходит бесконечно большое число корней, удовлетворяющих условию

$$kh\tau = \text{const}, \quad (2.15)$$

из которого следует, что корни с ростом  $kh$  перемещаются в сторону начала координат. Подобные движения корней имеют место в случае изолированного пористого слоя с открытыми [1, 4] и с закрытыми порами [2]. Для описания движения корней полезно ввести функции

$$\bar{\alpha}_i = \sqrt{\frac{\tau^2}{v_i^2} - 1} \quad (i = 1, 2), \quad \bar{\beta} = \sqrt{\frac{\tau^2}{v_3^2} - 1}. \quad (2.16)$$

Дисперсионное уравнение в интервале

$$\tau > v_1 \quad (2.17)$$

представляется равенством

$$\begin{vmatrix} A_1 S_1 & A_1 C_1 & A_2 S_2 & A_2 C_2 & -2L\bar{\beta}C_3 & 2L\bar{\beta}S_3 \\ -A_1 S_1 & A_1 C_1 & -A_2 S_2 & A_2 C_2 & -2L\bar{\beta}C_3 & -2L\bar{\beta}S_3 \\ 2\bar{\alpha}_1 C_1 & -2\bar{\alpha}_1 S_1 & -2\bar{\alpha}_2 C_2 & -2\bar{\alpha}_2 S_2 & -gS_3 & -gC_3 \\ 2\bar{\alpha}_1 C_1 & 2\bar{\alpha}_1 S_1 & 2\bar{\alpha}_2 C_2 & 2\bar{\alpha}_2 S_2 & gS_3 & -gC_3 \\ \tilde{\rho}_1 S_1 & \tilde{\rho}_1 C_1 & \tilde{\rho}_1 S_2 & \tilde{\rho}_1 C_2 & 0 & 0 \\ B_1 \bar{\alpha}_1 C_1 & B_1 \bar{\alpha}_1 S_1 & B_2 \bar{\alpha}_1 C_2 & B_2 \bar{\alpha}_2 C_2 & -\frac{\rho_f}{m} S_3 & \frac{\rho_f}{m} C_3 \end{vmatrix} = 0, \quad (2.18)$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \sin \varkappa \bar{\alpha}_1, & C_1 &= \cos \varkappa \bar{\alpha}_1, & S_2 &= \sin \varkappa \bar{\alpha}_2, & C_2 &= \cos \varkappa \bar{\alpha}_2, \\ S_3 &= \sin \varkappa \bar{\beta}, & C_3 &= \cos \varkappa \bar{\beta}, & \tilde{\rho}_1 &= \rho_f + mB_1, & \tilde{\rho}_2 &= \rho_f + mB_2, \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\varkappa = kh/2.$$

Аналогичные соотношения могут быть записаны в промежутке

$$\min(v_2, v_3) < \tau < v_1. \quad (2.20)$$

Особенности интервалов (2.17) и (2.20) состоят в том, что через каждую точку проходит бесконечное число корней и в этих точках при фиксированных  $\tau$  не существует предела при  $kh \rightarrow \infty$ . Все корни, выходящие из точки  $\tau = \infty$ , при  $kh \rightarrow \infty$  асимптотически приближаются к крайней точке

$$\tau = \min(v_2, v_3). \quad (2.21)$$

Таким свойством обладают также волны и в других пористых слоях [1–4].

### 3. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЫХ КОРНЕЙ ПРИ $kh \gg 1$

Исследуем корни дисперсионного уравнения (1.14) в интервале

$$0 \leq \tau < \min(v_2, v_3) \quad (3.1)$$

и с этой целью совершим в уравнении (1.14) предельный переход при  $kh \rightarrow \infty$ . В результате получим уравнение

$$\Delta(\tau, kh = \infty) = \begin{vmatrix} A_1 & 0 & A_2 & 0 & -2L\beta & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & A_2 & 0 & 2L\beta \\ 2\alpha_1 & 0 & 2\alpha_2 & 0 & -g & 0 \\ 0 & -2\alpha_2 & 0 & -2\alpha_2 & 0 & -g \\ \rho_f + mB_1 & 0 & \rho_f + mB_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -B_1\alpha_1 & 0 & -B_2\alpha_2 & 0 & \rho_f/m \end{vmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

Определитель, входящий в уравнение (3.2), приводится к квазидиагональному виду, а само уравнение (3.2) распадается на два уравнения

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & -2L\beta \\ 2\alpha_1 & 2\alpha_2 & -g \\ \rho_f + mB_1 & \rho_f + mB_2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad (3.3)$$

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & 2L\beta \\ -2\alpha_1 & -2\alpha_2 & -g \\ -B_1\alpha_1 & -B_2\alpha_2 & \rho_f/m \end{vmatrix} = 0. \quad (3.4)$$

Уравнения (3.3) при использовании формул (2.9) и (2.10) приводятся к уравнению

$$g^2(v_1^2 - v_2^2) - 4\alpha_1\beta(v_1^2 - v_4^2) - 4\alpha_2\beta(v_4^2 - v_2^2) = 0. \quad (3.5)$$

Уравнение (3.4) с применением соотношений

$$[2L - (\rho + B_1\rho_f)\tau^2] \left( \frac{2\rho_f}{m} + B_2g \right) = -\frac{Cm - M\rho_f}{Lm(M - mv_2^2)} \left( 2L - \frac{H\rho_f - C\rho}{\rho_f v_1^2 - C} \tau^2 \right)^2, \quad (3.6)$$

$$[2L - (\rho + B_2\rho_f)\tau^2] \left( \frac{2\rho_f}{m} + B_1g \right) = \frac{Cm - M\rho_f}{Lm(mv_1^2 - M)} \left( 2L + \frac{H\rho_f - C\rho}{C - \rho_f v_2^2} \tau^2 \right)^2$$

заменяется уравнением

$$\alpha_1(M - mv_2^2) \left( 2L + \frac{H\rho_f - C\rho}{C - \rho_f v_2^2} \tau^2 \right)^2 + \alpha_2(mv_1^2 - M) \left( 2L - \frac{H\rho_f - C\rho}{\rho_f v_1^2 - C} \tau^2 \right)^2 - 4L^2 m(v_1^2 - v_2^2) \alpha_1 \alpha_2 \beta = 0. \quad (3.7)$$

Уравнения (3.5) и (3.7) являются уравнениями, описывающими скорости волн Релея вдоль поверхности пористой среды, при этом (3.5) относится к случаю открытых пор на границе, а (3.7) – к случаю закрытых пор на границе.

Уравнение (3.7) имеет корень  $\tau = v_{R2}$  в интервале (3.1) [2]. В этом легко убедиться, так как левая часть уравнения (3.7) при малых  $\tau$  представляется выражением

$$-\frac{L(v_1^2 - v_2^2)(\rho m - \rho_f^2)(HM + VM - 2C^2)\tau^2}{HM - c^2} < 0, \quad (3.8)$$

а при  $\tau = v_2$  или  $\tau = v_3$  является положительной. Левая часть уравнения (3.5) при малых  $\tau$  удовлетворяет неравенству [3]

$$-\frac{(v_1^2 - v_2^2)(v_1^2 v_2^2 - v_3^2 v_4^2)\tau^2}{2v_1^2 v_2^2 v_3^2} < 0, \quad (3.9)$$

а в случае  $v_3 < v_2$  является положительной. Отсюда следует, что при  $v_3 < v_2$  уравнение (3.5) имеет корень  $\tau = v_{R1}$  в интервале (3.1). Если выполняется условие  $v_2 < v_3$ , то существование корня  $\tau = v_{R1}$  определяется знаком величины [3]

$$\tilde{A} = [(v_1^2 - v_2^2)g^2 - 4(v_1^2 - v_4^2)\alpha_1\beta] \Big|_{\tau=v_2}. \quad (3.10)$$

При  $\tilde{A} > 0$  уравнение (3.5) имеет корень  $v_{R1}$  в интервале (3.1). В случае  $\tilde{A} < 0$  корень  $\tau = v_{R1}$  в интервале (3.1) отсутствует и находится на втором листе. Если  $\tilde{A} = 0$ , то  $v_{R1} = v_2$ .

Точки  $\tau = v_{R1}$  и  $\tau = v_{R2}$  являются также конечными точками для особых корней уравнения (1.14) при  $kh = \infty$ . Корень  $\tau = v_{pl}$  с ростом  $kh$  перемещается первым корнем в (3.1), проходит при условии  $\tilde{A} > 0$  через точки  $\tau = v_2$  и  $\tau = v_3$  и асимптотически приближается к точке  $\tau = v_{R1}$  (рис. 1). В случае  $v_2 < v_3$  и  $\tilde{A} < 0$  конечной точкой для этого корня оказывается  $\tau = v_2$  (рис. 2). Другой особый корень, выходящий из точки  $\tau = 0$ , подходит при  $kh \rightarrow \infty$  к точке  $\tau = v_{R1}$  (рис. 1 и 2). Указанное перемещение особых корней оправдывается тем, что дисперсионное уравнение (1.14) не может иметь двойных корней при

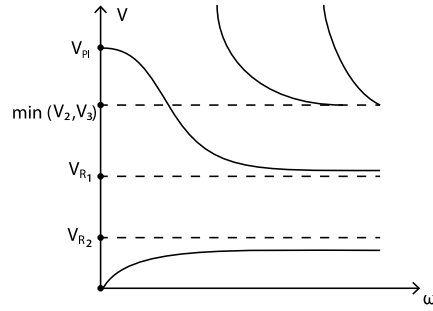
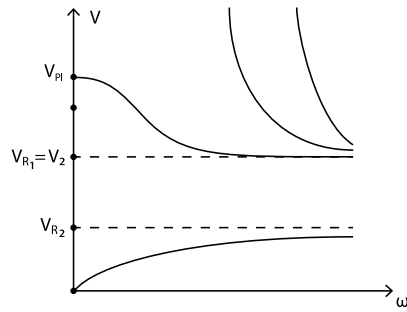


Рис. 1

Рис. 2. ( $v_2 < v_3, \tilde{A} < 0$ )

$\tau \neq 0$  и поэтому дисперсионные кривые не могут пересекаться. Отсюда следует неравенство

$$v_{R1} > v_{R2} \quad (3.11)$$

и волна Релея вдоль пористой границы распространяется с большей скоростью в случае открытых пор, чем в случае закрытых пор.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Л. А. Молотков, *Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред*. Наука, С.-Петербург (2001).
2. Л. А. Молотков, *Распространение волн в изолированном пористом слое Био с закрытыми порами на границах*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **354**, (2008), 173–189.

3. Л. А. Молотков, *Распространение нормальных волн в пористом стержне с закрытыми порами на границах*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 191–210.
4. Л. А. Молотков, *О распространении нормальных волн в изолированном пористом флюидонасыщенном слое Био*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **258**, (1999), 165–183.
5. М. А. Biot and D. G. Willis, *The elastic coefficients of theory consolidation*. — Appl. Mechan. **24** (1957), 594–601.
6. J. Geertsma and D. C. Smit, *Some aspects of elastic wave propagation in fluid-saturated porous solid*. — Geophysics **26** (1961), 169–181.

Molotkov L. A. Normal waves in porous layer with opened pores on one boundary and with closed pores on other boundary.

Isolated porous Biot layer with opened pores on one boundary and with closed pores on other boundary is considered. In this layer normal waves are investigated. For them dispersion curves are established. The low-frequency and high-frequency are analyzed explicitly. In low-frequency the plate wave is unique in this layer. In high-frequency the normal waves correspond to Rayleigh waves propagating along free boundary of porous media. The velocity of these Rayleigh waves in the case of opened pores is greater than the velocity of Rayleigh wave in the case of closed pores.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
Фонтанка 27, 191023  
Санкт-Петербург, Россия  
E-mail: molotkov@pdmi.ras.ru

Поступило 8 сентября 2011 г.