Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 393, 2011 г.

А. П. Киселев, А. Б. Плаченов

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ m-МЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ ИЗ ПАРАКСИАЛЬНЫХ. ДАЛЬНЕЙШЕЕ ОБОБЩЕНИЕ РЕШЕНИЯ БЕЙТМЕНА

§1. Введение

Интерес к построению точных решений волнового уравнения, моделирующих пучки и частицы, прослеживается на протяжении всего 20 века, начиная, по крайней мере, с [1]. Мы обсуждаем один подход к построению таких решений и применяем его для обобщения решений бейтменовского типа. Имея в виду решения волнового уравнения с $m \geqslant 2$ пространственными переменными $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$,

$$\sum_{n=1}^{m} u_{x_n x_n} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad c = \mathrm{const}\,, \tag{1}$$

сосредоточенные вблизи выделенного направления $x_m =: z$, будем записывать (1) в виде

$$\Delta_\perp u + u_{zz} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \tag{2}$$

где $\Delta_\perp u := \sum\limits_{n=1}^{m-1} u_{x_n x_n}$, $\Delta_\perp$ – оператор Лапласа по поперечным переменным $\boldsymbol{x}_\perp = (x_1, \dots, x_{m-1})$, $\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{x}_\perp, z)$.

Первые результаты, относящееся к построению локализованных решений, получены в 1960-е годы. Они имели асимптотический характер и основались на построении пучкообразных точных решений уравнения

$$\Delta_\perp W + 2ikW_z = 0, \tag{3}$$

Ключевые слова: волновое уравнение, точные решения, локализованные волны, решения Бейтмена.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 11-01-00407А.

где *волновое число* k – вещественный свободный параметр, которое специалисты по теории дифракции [2–5] традиционно называют *параболическим.* Соответствующие функции

$$\widetilde{u} = e^{ik(z-ct)}W \tag{4}$$

асимптотически при $k \to \infty$ удовлетворяют (2) в окрестности оси z. Такие приближенные решения называются *параксиальными.* Функции (4) *гармонические по времени*, т.е. t содержится только в экспоненте перед W.

Под влиянием асимптотической теории, но формально независимо, для $m = 3$ и $m = 2$ был построен ряд частых (не гармонических по времени) локализованных решений волнового уравнения (2), сначала пучкообразных [6–8], а затем и частицеподобных [9–13]. Эти решения были модификациями (сдвигами на одну или на две комплексные константы) классического *относительно неискажающегося решения Бейтмена* [1] при специальном выборе содержащейся в нем произвольной функции. Отметим, что многие из упомянутых локализованных точных решений волнового уравнения были получены альтернативным образом при работе с интегральными преобразованиями, см., например, [10, 14]. Эти исследования также были мотивированы, в сущности, параксиальной теорией.

За последние пятьдесят лет физики нашли и исследовали (в основном, для $m = 3$) ряд приближенных параксиальных пучкообразных решений вида (4). Процесс построения их точных аналогов (т. е. решений (2)), как пучкообразных, так и частицеподобных, продолжает происходить формально независимым образом (см., например, обзор [15]). В настоящей заметке мы сначала излагаем восходящую к [8] простую процедуру сопоставления каждому решению параболического уравнения (3) негармонического по времени решения волнового уравнения (2) специального вида. Далее, из построенных решений уравнения (2) мы конструируем новые обобщения решения Бейтмена с бóльшим, в сравнении с [13], т. е. $m(m-1)$ вместо $2(m-1)$, числом произвольных параметров (для $m = 2$ ничего нового не возникает). Выбрав содержащуюся в нем произвольную функцию подходящим образом, можно придти к пучкообразным и частицеподобным точным решениям.

§2. Параксиальные пучки

Приведем (повторяя в упрощённом виде построения работ [16–18], см. также [5]) нужные нам сведения относительно параксиальных гауссовых пучков – решений уравнения (3), гауссовски локализованных по поперечным координатам $\boldsymbol{x}_\perp$ в окрестности оси z. Будем искать их в виде

$$W = A(z)e^{\frac{ik}{2}(\boldsymbol{\Gamma}(z)\boldsymbol{x}_\perp,\boldsymbol{x}_\perp)},\ (\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_\perp) := \sum_{n=1}^{m-1} y_n x_n\,. \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{\Gamma}$ – симметричная матрица $(m-1)\times(m-1)$ с положительно определённой мнимой частью (что гарантирует локализацию решения около оси z), зависящая от продольной координаты z. Решения уравнения (3) вида (5) называются *фундаментальными модами*, а решения, в которых A зависит также от $\boldsymbol{x}_\perp$ – *высшими модами*. Особенно разработана теория высших мод для осесимметрического случая при $m = 3$ (см. например, ссылки в [15] и [19], а также и не упомянутую там интересную работу [20]). Здесь мы ограничимся рассмотрением фундаментальной моды.

Подстановка (5) в (3) дает

$$\begin{aligned} A(z)\left[-k^2(\boldsymbol{\Gamma}(z)\boldsymbol{x}_\perp,\boldsymbol{\Gamma}(z)\boldsymbol{x}_\perp) + ik\,\mathrm{tr}\,\boldsymbol{\Gamma}(z) - k^2(\boldsymbol{\Gamma}'(z)\boldsymbol{x}_\perp,\boldsymbol{x}_\perp)\right]& \\ +2ikA'(z) = 0,& \end{aligned} \tag{6}$$

$' := \frac{d}{dz}$. Приравняв в левой части (6) к нулю сумму слагаемых, квадратичных по $\boldsymbol{x}_\perp$, получаем:

$$\boldsymbol{\Gamma}^2(z) + \boldsymbol{\Gamma}'(z) = \mathbf{O}\,, \tag{7}$$

откуда, учитывая следующую из $\mathrm{Im}\,\boldsymbol{\Gamma} > 0$ невырожденность $\boldsymbol{\Gamma}$,

$$[\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(z)]' = \mathbf{E}\,, \tag{8}$$

$\mathbf{E}$ – единичная матрица $(m-1)\times(m-1)$. Из (8) вытекает, что

$$\boldsymbol{\Gamma}^{-1}(z) = \boldsymbol{\Gamma}_0^{-1} + z\mathbf{E}\,, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{\Gamma}_0 = \boldsymbol{\Gamma}(0)$ – постоянная матрица, и

$$\boldsymbol{\Gamma}(z) = \boldsymbol{\Gamma}_0(\mathbf{E} + z\boldsymbol{\Gamma}_0)^{-1}\,. \tag{10}$$

При обсуждении оптического астигматизма для $m = 3$ в [4] (см. также [21]) дано описание некоторого (неполного) 6-параметрического семейства соответствующих матриц; полную их характеризацию можно найти в заметке [22].

Очевидно, в общем случае $\mathbf{\Gamma}(z)$ параметризуется $\frac{m(m-1)}{2}$ комплексными параметрами, т. е. $m(m-1)$ вещественными. Частный пример [13] (по аналогии с оптической терминологией [4, 21] его естественно называть *простым астигматизмом*) дается формулой $\mathbf{\Gamma}_{ij}(z) = (z-\zeta_j)^{-1}\delta_{ij}$, где ζ_j, $j = 1, 2, \ldots, m-1$ имеют положительную мнимую часть, а δ_{ij} – символ Кронекера. Самый простой осесимметрический случай получается отсюда, если все ζ_j равны.

Рассмотрение не содержащих $\boldsymbol{x}_\perp$ слагаемых в (6) дает

$$A(z)\,\mathrm{tr}\,\mathbf{\Gamma}(z) + 2A'(z) = 0. \tag{11}$$

Из (9) вытекает, что собственные числа матрицы $\mathbf{\Gamma}^{-1}$, в литературе по оптике традиционно обозначаемые для $m = 3$ через q_n, линейны по z: $q_n(z) = z - \zeta_n$, $\quad n = 1, 2, ..., m-1$, откуда

$$\mathrm{tr}\,\mathbf{\Gamma}(z) = \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{z - \zeta_n}\,, \tag{12}$$

и тогда

$$A(z) = C\sqrt{\Pi_{n=1}^{m-1}(z - \zeta_n)} = C\sqrt{\det \mathbf{\Gamma}}, \quad C = \mathrm{const}\,. \tag{13}$$

§3. Относительно неискажающиеся волны

Относительно неискажающимися волнами [23] называются решения уравнения (2), имеющие вид

$$u = gf(\theta), \tag{14}$$

где *фаза* $\theta = \theta(\boldsymbol{x}, t)$ и *амплитуда* $g = g(\boldsymbol{x}, t)$ – фиксированные (вообще говоря, комплексные) функции, а *форма волны* f – произвольная функция одной переменной.

Хорошо известный пример решения (14) – “решение Д’Аламбера” – плоская волна с $\theta = \alpha$ или $\theta = \beta$ и $g = \mathrm{const}$, где α и β – характеристические переменные

$$\alpha = z - ct, \quad \beta = z + ct. \tag{15}$$

Отметим также (не фигурирующие в наших дальнейших рассмотрениях) функционально-инвариантные решения Смирнова–Соболева, см., например, [24–26], для которых $g = \mathrm{const}$, а некоторым неявным образом задаваемая фаза удовлетворяет волновому уравнению и уравнению эйконала $(\nabla\theta)^2 = c^{-2}(\theta_t)^2$. Еще ряд примеров для $m = 3$ и дополнительные ссылки можно найти в [27].

Перейдем теперь к важному для описания локализованных решений относительно неискажающемуся *решению Бейтмена.*

§4. Классическое решение Бейтмена и известные его обобщения

Бейтмен применил обнаруженную им [28] конформную инвариантность волнового уравнения при $m = 3$ для получения из “решения Д'Аламбера” решения вида (14) с *фазой Бейтмена*

$$\theta = \alpha + \frac{\boldsymbol{x}_\perp^2}{\beta}, \tag{16}$$

$\boldsymbol{x}_\perp^2 := \sum\limits_{n=1}^{n=m-1} x_n^2$, и амплитудой $g = 1/\beta$ [1]. Это решение было надолго забыто.

Ильон [29] заметил, что сосредоточенные решения, найденные независимым образом рядом авторов, [6,7,11], являются частными случаями *осесимметрически комплексифицированного* посредством сдвига $\beta \mapsto \beta - ib$, $b > 0$, решения Бейтмена. Речь шла о решениях (2) вида (14) с

$$\theta = \alpha + \frac{\boldsymbol{x}_\perp^2}{\beta - ib}, \quad g = \frac{1}{\beta - ib}. \tag{17}$$

Гауссовы пучки [7] (или *focus wave modes* [6]) оказались решениями (14) для формы волны

$$f(\theta) = \exp\left(ik\theta\right), \tag{18}$$

где k – свободный параметр, имеющий размерность волнового числа. Эти решения, очевидно, гауссовским образом убывают при удалении от оси z. Степенным образом локализованные по всем переменным волновые пакеты, найденные в [9,10] (*splash modes*), отвечали

$$f(\theta) = (-i\theta + a)^{-q}, \quad q > 0, \quad a > 0. \tag{19}$$

Частными случаями решения (17) были и решения с конечной энергией [11], гауссовски локализованные по поперечным координатам и степенным образом убывающие по z и t.

Наконец, уже под влиянием [29], в [12] предложены формы волны в (14), (17), обеспечивающие гауссовскую локализацию не только по поперечным координатам в окрестности оси z, но и по z и t. Простейшая из них имеет вид

$$f(\theta) = \exp\left[2kb\left(1-\sqrt{1-i\theta/b}\right)\right] \tag{20}$$

(k – свободный параметр, квадратный корень имеет положительную вещественную часть).

Простая неосесимметрическая комплексификация общего решения Бейтмена (16), описывающая, по физической терминологии, простой астигматизм, предложена в [12]. В [13] приведено многомерное обобщение этого решения

$$\theta = \alpha + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{x_n^2}{\beta - z_n - ib_n}, \quad g = \frac{1}{\sqrt{\Pi_{n=1}^{m-1}(\beta - z_n - ib_n)}}, \tag{21}$$

где $z_{1,..,m-1}$ и $b_{1,...,m-1}$ – произвольные вещественные постоянные. В осесимметрическом случае (17) $g = (\beta - ib)^{-(m-1)/2}$. Локализованность решений для форм волны (18) и (20) обеспечивается условием $\operatorname{Im} b_{1,...,m-1} > 0$.

§5. Специальные (гармонические по α) точные решения

Применение параксиальных решений к построению точных привлекало внимание многих исследователей, в частности, [8, 15, 30–32]. Нас, вслед за [8,15,32] (и в отличие от [30,31]) интересуют негармонические по t, но гармонические по α решения, зависящие также от β (*separable solutions*). Запишем волновое уравнение (2) в характеристических переменных (15)

$$\Delta_\perp u + 4u_{\alpha\beta} = 0\,. \tag{22}$$

Рассмотрим решения (2), имеющие специальный вид

$$u = e^{ik\alpha}\mathscr{W}(\boldsymbol{x}_\perp, \beta; k)\,, \tag{23}$$

где k – свободный параметр. Подставляя (23) в (22), получаем

$$\Delta_\perp \mathscr{W} + 4ik\mathscr{W}_\beta = 0\,, \tag{24}$$

связанное с (3) масштабным преобразованием: если $W(\boldsymbol{x}_\perp, z; k)$ – произвольное решение параболического уравнения (3), то функция $\mathscr{W} = W(\lambda\sqrt{2}\boldsymbol{x}_\perp, \lambda^2\beta; k)$ – решение точного уравнения (24), и тогда $u = e^{ik\alpha}W(\lambda\sqrt{2}\boldsymbol{x}_\perp, \lambda^2\beta; k)$ (см. (23)) удовлетворяет уравнению (2) при любом λ.

Выбрав в качестве W решения вида (5), (10), (13), получим при $\lambda = 1$:

$$u(\boldsymbol{x}_\perp, \alpha, \beta; k) = A(\beta) \exp(ik\theta)\,, \tag{25}$$

где

$$\theta(\boldsymbol{x}_\perp, \alpha, \beta; k) = \alpha + (\boldsymbol{\Gamma}(\beta)\boldsymbol{x}_\perp, \boldsymbol{x}_\perp) \tag{26}$$

– обобщённая фаза Бейтмена, принимающая значения в верхней полуплоскости $\operatorname{Im}\theta \geqslant 0$ в силу положительной определённости $\operatorname{Im}\boldsymbol{\Gamma}$. Такие решения представляют собой нестационарные гауссовы пучки.

В случае, когда матрица $\boldsymbol{\Gamma}$ диагональна, фазовая функция (26) принимает вид (21), а если $\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{\beta - ib}\mathbf{E}$, то (17).

§6. Суперпозиция специальных точных решений. Дальнейшее обобщение решения Бейтмена

Суперпозиция решений (25) волнового уравнения (22)

$$u = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} A(\beta) \exp(ik\theta) \widehat{f}(k)\, dk \tag{27}$$

с произвольной весовой функцией $\hat{f}(k)$ (возможно, обобщенной), также удовлетворяет (22). Перепишем (27) в виде

$$u = A(\beta) f(\theta)\,, \tag{28}$$

где

$$f(\theta) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \exp(ik\theta) \widehat{f}(k)\, dk \tag{29}$$

– произвольная функция, аналитическая в области значений функции θ (26), т. е. в (открытой) верхней полуплоскости. Для того, чтобы анзац (27) можно было подставить в (22) при всех $\boldsymbol{x}$ и t, нужны предположения о поведении $f(\theta)$ при приближении θ к вещественной оси (последняя соответствует оси z), например, что ее предельные значения задают обобщенную функцию одного переменного.

Функция (28) представляет собой относительно неискажающуюся волну (14) с $g = A(\beta) = C\sqrt{\det \boldsymbol{\Gamma}(\beta)}$ и фазой (26), обобщающей бейтменовскую (16).

Таким образом, нами получен новый класс относительно неискажающихся волн, включающий известные решения бейтменовского типа

(21) как частный случай. Выбрав форму волны в виде (18), мы снова приходим к функции (25), а при f вида (20) мы получаем решение типа волнового пакета, распространяющегося вдоль прямой $z = ct$. В случае, когда собственные векторы вещественной и мнимой части $\mathbf{\Gamma}$ не совпадают, такие решения описывают, пользуясь физической терминологией, пучки и пакеты со *сложным*, или *общим астигматизмом*.

§7. Заключительные замечания

Использованная нами выше связь между решениями параболического уравнения и гармоническими по α решениями волнового уравнения имеет и другие приложения в обсуждаемой тематике, не связанные с решениями, содержащими произвольную функцию. Она, например, позволяет мгновенно переходить от параксиальных Бессель–гауссовских пучков [33] к их точным аналогам, Бессель–гауссовским импульсам [34]. Другие интересные примеры использования описываемого подхода можно найти в [8,15,20,32]. Между прочим, возможно и обратное преобразование решений (2) вида (23) в решения уравнения (24).

Интегрирование решений волнового уравнения по параметру – приём в этой тематике не новый. Он использовался, например, для построения частицеподобных (правда, слабо локализованных) решений волнового уравнения [11], сильно локализованных решений уравнения Клейна–Гордона–Фока [35] и др., см. также [15].

Изложенные результаты допускают модификации и обобщения в отношении как амплитуды g, так и фазы θ. Так, решения вида (14) могут быть получены из некоторых высших мод, в которых предэкспоненциальные множители не зависят от k. В случае полиномиальной зависимости их от k описанная процедура дает решения (2), содержащие, наряду с произвольной функцией f, её производные. Такие решения тоже называют относительно неискажающимися волнами [36].

Ещё один путь обобщения решения Бейтмена – рассмотрение более общей, чем (26), фазовой функции, содержащей, наряду с квадратичными, линейные по поперечным переменным члены, см. [37].

В заключение авторы благодарят В. М. Бабича, М. В. Перель и М. М. Попова за полезные обсуждения.

Литература

1. H. Bateman, *The mathematical analysis of electrical and optical wave-motion on the basis of Maxwell's equations.* Cambridge University Press, Cambridge, 1915.
2. V. A. Fock, *Electromagnetic diffraction and propagation problems.* Pergamon Press, Oxford, 1965.
3. Л. А. Вайнштейн, *Открытые резонаторы и открытые волноводы.* Наука, М., 1966.
4. J. A. Arnaud, H. Kogelnik, *Gaussian light beams with general astigmatism.* — Appl. Optics, **8** (1969), 1687–1693.
5. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* Наука, М., 1972.
6. J. N. Brittingham, *Focus waves modes in homogeneous Maxwell's equations: Transverse electric mode.* — J. Appl. Phys. **54** (1983), 1179–1189.
7. А. П. Киселев, *Модулированные гауссовы пучки.* —- Изв. высш. уч. завед. Радиофизика. **26**(5) (1983), 1014–1020.
8. P. A. Bélanger, *Packetlike solutions of the homogeneous-wave equation.* — J. Opt. Soc. Am. A **1**(7) (1984), 723–724.
9. R. W. Ziolkowski, *Exact solutions of the wave equation with complex source locations.* — J. Math. Phys. **26** (1985), 861–863.
10. I. M. Besieris, A. M. Shaarawi, R. W. Ziolkowski, *A bidirectional traveling plane wave representation of exact solutions of the wave equation.* — J. Math. Phys. **30** (1989) 1254–1269.
11. R. W. Ziolkowski, *Localized transmission of electromagnetic energy.* — Phys. Rev. A **39** (1989), 2005–2033.
12. A. P. Kiselev, M. V. Perel, *Highly localized solutions of the wave equation.* — J. Math. Phys. **41**(4) (2000), 1934–1955.
13. А. П. Киселев, М. В. Перель, *Относительно неискажающиеся решения m-мерного волнового уравнения.* — Дифф. уравнения **38**(8) (2002), 1128–1129.
14. I. M. Besieris, A. M. Shaarawi, A. M. Attiya, *Bateman conformal transformations within the framework of the bidirectional spectral representation.* — Progress in Electromagnetics Research **48** (2004), 201–231.
15. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравненя (Обзор).* — Оптика и Спектроскопия **102**(4) (2007), 661–681.
16. В. М. Бабич, *Собственные функции, сосредоточенные в окрестности замкнутой геодезической.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **9** (1968), 15—63.
17. М. М. Попов, *Резонаторы для лазеров с развёрнутыми направлениями главных кривизн. Метод параболического уравнения.* — Оптика и Спектроскопия, **25**(2) (1968), 314–316.
18. М. М. Попов, *Собственные колебания многозеркальных резонаторов.* — Вестник Ленинградского университета, сер. физ.-хим. No. 22 (4) (1969), 42–54.
19. E. G. Abramochkin, V. G. Volostnikov, *Generalized Hermite–Laguerre–Gauss beams.* — Physics of Wave Phenomena **18**(1) (2010), 14–22.
20. C. F. R. Caron, R. M. Potvliege, *Bessel-modulated Gaussian beams with quadratic radial dependence.* — Optics Communications, **164** (1999), 83–93.

21. В. П. Быков, О. О. Силичев, *Лазерные резонаторы.* ФИЗМАТЛИТ, М., 2004.
22. A. P. Kiselev, A. B. Plachenov, P. Chamorro-Posada, *General astigmatic nonparaxial wave beams and packets.* — In: Proc. 11th International Conference on Laser & Fiber-Optical Networks Modeling, Kharkov (2011).
23. Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики.* Гостехиздат, М., 1941.
24. V. Smirnoff, S. Soboleff, *Sur le problème plan de vibrations élastiques.* — Comptes Rendus **194** (1932), 1437–1439.
25. С. Л. Соболев, *Некоторые вопросы теории распространения колебаний.* — В кн.: Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. ОНТИ, М., 1937.
26. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, Т. 3, Ч. 2. Наука, М., 1974.
27. А. П. Киселев, *Относительно неискажающиеся волны, зависящие от трех пространственных переменных.* — Мат. Заметки **79**(4) (2006), 635–636.
28. H. Bateman, *The conformal transformations of four dimensions and their applications to geometrical optics.* — Proc. London Math. Soc. **7** (1909), 70–89.
29. P. Hillion, *Generalized phases and nondispersive waves.* — Acta Appl. Math. **30**(1) (1993), 35–45.
30. Э. А. Полянский, *О связи между решениями уравнений Гельмгольца и типа Шрёдингера.* — ЖВММФ **12** (1) (1972), 241–249.
31. A. Wünsche, *Transition from the paraxial approximation to exact solutions of the wave equation and application to Gaussian beams.* — J. Opt. Soc. Amer. A **9** (1992), 765–774.
32. A. Torre, *Separable-variable solutions of the wave equation from a general type of solutions of paraxial wave equation.* — In: Proc. Int. Conf. "Days on Diffraction 2009", St.Petersburg (2009), 178–184.
33. F. Gori, C. Guattari, C. Padovani, *Bessel–Gauss beams.* — Opt. Commun. **64**(6) (1987), 491–495.
34. P. L. Overfelt, *Bessel–Gauss pulses.* — Phys. Rev. A **44**(6) (1991), 3941–3947.
35. М. В. Перель, И. В. Фиалковский, *Экспоненциально локализованные решения уравнения Клейна–Гордона.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **275** (2001), 187–198.
36. F. G. Friedlander, *Simple progressive solutions of the wave equation.* — Proc. Cambridge Philos. Soc. **43** (1947), 360–373.
37. А. Б. Плаченов, *Наклонные непараксиальные пучки и пакеты для волнового уравнения с двумя пространственными переменными.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 224–233.

Kiselev A. P., Plachenov A. B. Exact solutions of the m-dimensional wave equation from paraxial ones. Further generalization of the Bateman solution.

A review of earlier generalizations of the classical Bateman solution, involving an arbitrary function, is presented. Its further generalization, described by $m(m-1)$ real parameters characterizing the phase, is given.

Under a proper choice of the arbitrary function, it may describe Gaussian beam or Gaussian packet.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kiselev@pdmi.ras.ru

Московский государственный
технический университет радиотехники,
электроники и автоматики (МИРЭА)
пр. Вернадского, д. 78,
119454 Москва, Россия
E-mail: a_plachenov@mail.ru

Поступило 8 октября 2011 г.