Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 393, 2011 г.

Н. Я. Кирпичникова, А. С. Кирпичникова

ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ОТ ВЕРТИКАЛЬНОГО СЛОЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ SH-ВОЛН, ВОЗБУЖДАЕМЫХ ТОЧЕЧНЫМ ИСТОЧНИКОМ НА СВОБОДНОЙ ОТ НАПРЯЖЕНИЙ ГРАНИЦЕ

Основная часть упругой энергии при подземных и подводных взрывах приходится на поверхностные волны. Это связано с тем, что поверхностные волны затухают слабее по сравнению с объемными. Поверхностные волны играют важную роль в сейсмологии и наблюдаются неизменно при каждом землетрясении. Здесь будет исследовано преобразование упругой поверхностной волны шепчущей галереи SH поляризации (так называемой волны Лява), многократно проходящей через слой между двумя полуплоскостями. У волн Лява смещение частиц в главном происходит ортогонально плоскости рассмотрения (x, z).

При нахождении решения применяется асимптотический метод пограничного слоя [1, 2] и используются результаты работ [3–6].

§1. Постановка задачи.

Пусть изотропная упругая среда заполняет полуплоскость $\{-\infty < x < \infty,\ z \geq 0\}$. Параметр Ламе μ и плотность ρ среды зависят от координаты z. Граница $z = 0$ считается свободной от напряжений. Смещение u поперечной SH-волны представляет решение следующей задачи при $z \geq 0$:

$$u_{xx} + u_{zz} + \frac{\omega^2}{b^2}u + \frac{\mu_z}{\mu}u_z = 0, \quad z > 0, \quad b^2 = \frac{\mu}{\rho}, \tag{1.1}$$

с граничным условием на линии $z = 0$:

$$\mu u_z\big|_{z=0} = -\delta(x + x_0), \quad x_0 > 0. \tag{1.2}$$

Ключевые слова: асимптотический метод пограничного слоя, упругие среды, поверхностные волны шепчущей галереи, волны соскальзывания, однородные волны, точечный источник.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 11-01-00407А.

Точечный источник Q^* расположен в точке $(-x_0, 0)$. В соответствии с физическим смыслом для однозначной разрешимости рассматриваемой задачи к уравнениям (1.1)–(1.2) следует добавить условие убывания функции u при $r = \sqrt{x^2 + z^2} \to \infty$

$$\lim_{r\to\infty} \sqrt{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - iku\right) = 0, \quad k = \frac{\omega}{b(0)}. \tag{1.3}$$

Предположим, что полуплоскость $\{-\infty < x < \infty,\, z \geq 0\}$ разделена на три области $\Omega_0 = \{x \leq 0,\, z \geq 0\}$, $\Omega_1 = \{0 \leq x \leq x_1,\, z \geq 0\}$ и $\Omega_2 = \{x \geq x_1,\, z \geq 0\}$. Обозначим смещение u в каждой области через $u = u_0$, $u = u_1$ и $u = u_2$, соответственно. Параметр Ламе и плотность упругих сред Ω_0, Ω_1, Ω_2 так же снабдим индексами 0, 1, 2. Уравнение (1.1) и условие излучения выполняются для всех функций $u(x, z) = u_i(x, z)$, $i = 0, 1, 2$. Точечный источник Q^* принадлежит упругой среде $\Omega_0 = \{x \leq 0, z \geq 0\}$ и граничное условие (1.2) выполнено в области Ω_0. В областях Ω_1 и Ω_2 на свободной от напряжений границе $z = 0$ заданы однородные условия Неймана.

На вертикальных границах перехода $\Gamma_0 = \{x = 0, z \geq 0\}$ и $\Gamma_1 = \{x = x_1, z \geq 0\}$ выполняются условия жесткого контакта:

$$u_0 = u_1\big|_{x=0}, \quad \mu_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} = \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x}\bigg|_{x=0};$$

$$u_1 = u_2\big|_{x=x_1}, \quad \mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} = \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial x}\bigg|_{x=x_1}. \tag{1.4}$$

В настоящей статье рассматривается следующая задача, (см. рис. 1).

В среде Ω_0 от точечного источника Q^* распространяются поверхностные волны шепчущей галереи, набегающие на вертикальную границу Γ_0 между областями Ω_0 и Ω_1. В области Ω_0 скорость на границе $z = 0$ имеет минимум ($b'_z(0) > 0$). От вертикальной границы $\{x = 0,\, z \geq 0\}$ волновое поле отражается в среду Ω_0 и преломляется в слой Ω_1. Упругий слой $\Omega_1 = \{0 \leq x \leq x_1,\, z \geq 0\}$ предполагается однородным. Волновое поле в слое распространяется с постоянной скоростью b_1 и в области Ω_1 распространяются однородные волны. Прошедшее слой волновое поле в свою очередь отражается в слой и преломляется в Ω_2 от границы $\Gamma_1 = \{x = x_1,\, z \geq 0\}$. Предполагаем, что в среде Ω_2 скорость на границе достигает максимума $b'_z(0) < 0$ и в этой области вблизи границы распространяются волны соскальзывания. Источник Q^* расположен в области Ω_0 в точке $(-x_0, 0)$, $x_0 > 0$,

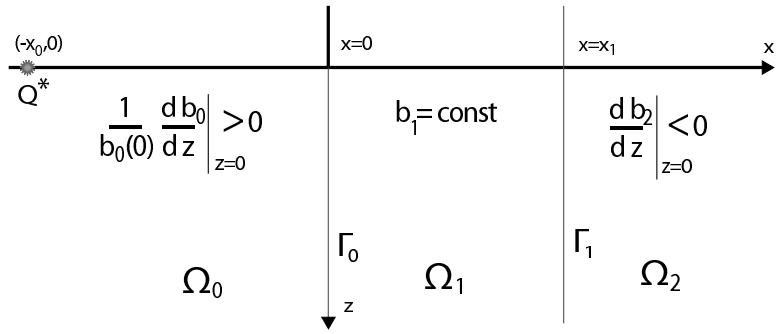

Рис. 1. Области Ω_i, $i = 0, 1, 2$ с прямолинейной границей $z = 0$

наблюдатель находится в области Ω_2 в произвольной точке $(x > x_1, z)$ вблизи поверхности $z = 0$. Найдем отраженное и преломленное от слоя Ω_1 волновое поле, прошедшее слой трижды и преломившееся в полуплоскость наблюдателя Ω_2. Этого достаточно, чтобы по предложенной схеме проследить многократно прошедшее слой из среды Ω_0 в среду Ω_2 волновое поле. Аналогично может быть рассмотрена ситуация перехода через слой волн соскальзывания [5], однородных волн и различных комбинаций волн соскальзывания, волн шепчущей галереи и однородных волн в областях Ω_i, $i = 0, 1, 2$.

§2. Падающее на вертикальную границу Γ_0, отраженное в Ω_0 и преломленное в слой Ω_1 волновые поля.

В работах [3,4] было найдено выражение для волн шепчущей галереи от точечного источника Q^*, находящегося в точке $(-x_0, 0)$, $x_0 > 0$. Пусть волновое поле типа волн шепчущей галереи номера p набегает на вертикальную границу $\Gamma_0 = \{x = 0,\ z \geq 0\}$. По этому падающему полю найдем отраженное в Ω_0 и преломленное в Ω_1 поля. Приведем выражение падающего на границу Γ_0 волнового поля:

$$u_0^{\mathrm{inc}}(\sigma_0, \nu_0) = e^{ik_0 x}\, U_0^{\mathrm{inc}}(\sigma_0, \nu_0) = e^{ik_0 x}\, A_p\, e^{i\sigma_0(-\zeta_p')}\, v(\nu_0 - \zeta_p'), \tag{2.1}$$

$$A_p = \frac{i\,\psi_0\, e^{ik_0 x_0}\, e^{i\sigma_{00}(-\zeta_p')}}{\mu_0(0)\, 2^{2/3}\, k_0^{1/3}\, \zeta_p'\, v(-\zeta_p')}. \tag{2.2}$$

Здесь

$$\sigma_i = \psi_i^2 k_i^{1/3} 2^{-1/3} x, \quad \sigma_{00} = \psi_0^2 k_0^{1/3} 2^{-1/3} x_0, \quad \sigma_{11} = \psi_1^2 k_1^{1/3} 2^{-1/3} x_1.$$

Для исследуемой задачи положительные величины ψ_i, $i = 0, 1, 2$ принимают следующие значения

$$\psi_0^3 = \frac{b_0'(0)}{b_0(0)}, \quad \psi_1^3 = 1, \quad \psi_2^3 = -\frac{b_2'(0)}{b_2(0)}, \quad -b_2'(0) > 0.$$

Волновые векторы k_i и новые переменные ν_i, $i = 0, 1, 2$ в каждой области Ω_i соответственно равны

$$k_i = \frac{\omega}{b_i(0)}, \quad \nu_i = \psi_i\, k_i^{2/3}\, 2^{1/3}\, z, \quad i = 0, 1, 2.$$

Корень производной функции Эйри на свободной от напряжений границе $z = 0$ области Ω_0 определен равенством

$$v'(-\zeta_p') = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, \quad \zeta_p' > 0.$$

Выражение (2.1), (2.2) получено как асимптотическое решение

$$u(x, z) = e^{ikx} \sum_{l=0} \frac{U^l(\sigma, \nu)}{k^{l/3}}$$

уравнения (1.1) в области Ω_0, причем асимптотически главное приближение $U^0 = U_0^{\mathrm{inc}} = U$ удовлетворяет параболическому уравнению Леонтовича–Фока

$$\mathcal{L}_0 U = i\frac{\partial U}{\partial \sigma_0} + \frac{\partial^2 U}{\partial \nu_0^2} - \nu_0 u + O(k^{-2/3}) = 0$$

при $x < 0$, но перестает быть им при $x > 0$, поскольку поперечная скорость $b_i(z)$, $i = 0, 1$ изменяет скачком свое значение при $x = 0$.

Сделаем естественное предположение, что решение, которое удовлетворяло уравнению Леонтовича–Фока при $x < 0$, будет удовлетворять аналогичному уравнению и при $x > 0$. Параболическое уравнение при $0 < x < x_1$ переходит в уравнение

$$\mathcal{L}_1 U = i\frac{\partial U}{\partial \sigma_1} + \frac{\partial^2 U}{\partial \nu_1^2} + O(k^{-2/3}) = 0.$$

В дальнейшем покажем, что это предположение позволит найти решение, удовлетворяющее асимптотически (при $k_i \to \infty$) всем условиям задачи.

Полное поле в области Ω_0 будем искать в виде

$$u_0(\sigma_0,\nu_0) = u_0^{\rm inc} + u_0^{\rm ref} = e^{ik_0x}U_0^{\rm inc}(\sigma_0,\nu_0) + \mathcal{R}_{01}\, e^{-ik_0x}U_0^{\rm ref}(\sigma_0,\nu_0). \quad (2.3)$$

Преломленное в область Ω_1 поле u_1 описывается равенством:

$$u_1(\sigma_1,\nu_1) = u_1^{\rm tr} = \mathcal{T}_{01}\, e^{ik_1x}U_1^{\rm tr}(\sigma_1,\nu_1). \quad (2.4)$$

Здесь функции $U_0^{\rm inc}(\sigma_0,\nu_0)$, $U_0^{\rm ref}(\sigma_0,\nu_0)$, $U_1^{\rm tr}(\sigma_1,\nu_1)$ удовлетворяют соответствующим уравнениям Леонтовича–Фока с операторами:

$$\mathcal{L}_j = i\frac{\partial}{\partial\sigma_j} + \frac{\partial^2}{\partial\nu_j^2} - \varkappa_j\nu_j, \quad j = 0,1,$$

$\varkappa_0 = -1$, $\varkappa_1 = 0$, $\varkappa_2 = 1$. Коэффициенты $\mathcal{R}_{01}$ и $\mathcal{T}_{01}$ являются искомыми константами. Из условия контакта (1.4) при $x = 0$, предполагая, что при $x = 0$ выполняется равенство

$$U_0^{\rm inc} = U_0^{\rm ref} = U_1^{\rm tr},$$

находим систему уравнений для $\mathcal{R}_{01}$ и $\mathcal{T}_{01}$:

$$1 + \mathcal{R}_{01} = \mathcal{T}_{01}, \quad \mu_0k_0(1 - \mathcal{R}_{01}) = \mu_1k_1\mathcal{T}_{01}.$$

Легко видеть, что для коэффициентов отражения $\mathcal{R}_{01}$ и преломления $\mathcal{T}_{01}$ получаем такие же значения, как и в случае нормального падения лучевой волны на границу раздела $x = 0$:

$$\mathcal{R}_{01} = \frac{\mu_0\,k_0 - \mu_1\,k_1}{\mu_0\,k_0 + \mu_1\,k_1}, \quad \mathcal{T}_{01} = \frac{2\,\mu_0\,k_0}{\mu_0\,k_0 + \mu_1\,k_1}.$$

Так как исследуются волновые процессы вблизи свободной границы, параметры $\mu_i, i = 0,1,2$ взяты на границе $z = 0$, $\mu_i = \mu_i(0)$. Таким образом волновое поле в области $x > 0$ является решением следующей задачи ($U \equiv U_1^{\rm tr}(\sigma_1,\nu_1)$)

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1U = 0; & \sigma_1 > 0, \quad \nu_1 > 0, \\ \left.\frac{\partial U}{\partial\nu_1}\right|_{\nu_1=0} = 0, & \sigma_1 > 0, \quad \nu_1 = 0, \\ U\big|_{\sigma_1=0} = \delta(\nu - \nu'), & \sigma_1 = 0, \quad \nu_1 > 0, \\ U \to 0, & \nu_1 \to \infty. \end{cases} \quad (2.5)$$

С помощью функции Грина $G_1(\sigma_1,\nu_1;\sigma_1' = 0,\nu_1')$ можно найти решение задачи (2.5) в квадратурах

$$U_1^{\rm tr}(\sigma_1,\nu_1) = \int\limits_0^\infty U_0^{\rm inc}(\sigma_1' = 0,\nu_1')\, G_1(\sigma_1' = 0,\nu_1';\sigma_1,\nu_1)\, d\nu_1'. \quad (2.6)$$

Выражение для функции Грина получается стандартным образом

$$G(\sigma,\nu;\sigma',\nu') = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty e^{i(\sigma-\sigma')\zeta}\frac{V_1(\nu_>)V_2(\nu_<)}{W(V_1,V_2)}d\zeta. \tag{2.7}$$

Линейно независимые решения $V_{1,2}$ удовлетворяют уравнению $\tilde{\mathcal{L}}_1 V_{1,2} = 0$, граничным условиям при $\nu = 0$ и при $\nu \to \infty$ соответственно,

$$\tilde{\mathcal{L}}_j = \frac{\partial^2}{\partial\nu_j^2} - \zeta - \varkappa_j\nu_j = 0, \quad j = 0,1,2,$$

$W(V_1,V_2)$ является вронскианом. Аргументы $\nu_>$ и $\nu_<$ функций $V_{1,2}$ есть большая или меньшая из координат источника ν' и наблюдателя ν. Если в формуле (2.7) провести интегрирование, то для однородного слоя Ω_1 функция Грина $G_1(\sigma_1,\nu_1;\sigma_1',\nu_1')$ равна

$$G_1(\sigma_1,\nu_1;\sigma_1',\nu_1') = \frac{e^{-i(\pi/4)\mathrm{sign}\,(\sigma_1-\sigma_1')}}{2\sqrt{\pi|\sigma_1-\sigma_1'|}}\left[e^{\frac{i(\nu_1-\nu_1')^2}{4(\sigma_1-\sigma_1')}} + e^{\frac{i(\nu_1+\nu_1')^2}{4(\sigma_1-\sigma_1')}}\right]. \tag{2.8}$$

Соответствующие волновым полям в областях Ω_i, $i = 0,2$ функции Грина $G(\sigma,\nu;\sigma',\nu')$ могут быть представлены следующими равенствами. Так функция Грина в градиентной среде Ω_0 имеет вид

$$G_0(\sigma_0,\nu_0;\sigma_0',\nu_0') = -i\sum_{m=1}^{M} e^{-i(\sigma_0-\sigma_0')\zeta_m'}\frac{v(-\zeta_m'+\nu_0)v(-\zeta_m'+\nu_0')}{\zeta_m'[v(-\zeta_m')]^2}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_M} e^{i\sigma_1\zeta}\frac{V_1(\nu_>)V_2(\nu_<)}{W(V_1,V_2)}d\zeta. \tag{2.9}$$

Здесь контур интегрирования L_M охватывает отрицательную часть вещественной оси плоскости комплексного переменного ζ, на которой расположены корни производной функции Эйри $v'(-\zeta) = 0$, начиная с номеров $\zeta_{M+1}, \zeta_{M+2}, \ldots$. Функция Грина, соответствующая среде Ω_2, определена выражением

$$G_2(\sigma_2,\nu_2;\sigma_2',\nu_2') = -i\sum_{q=1}^{Q} e^{i(\sigma_2-\sigma_2')\xi_q'}\frac{w(\xi_q'-\nu_2)w(\xi_q'-\nu_2')}{\xi_q'[w(\xi_q')]^2}$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_Q} e^{i\sigma_1\zeta}\frac{V_1(\nu_>)V_2(\nu_<)}{W(V_1,V_2)}d\zeta. \tag{2.10}$$

Контур интегрирования L_Q охватывает корни производной функции Эйри $w_1'(-\xi) = 0$, лежащие на луче от нуля до бесконечности с аргументом $\pi/3$ и начинающиеся с номеров $\xi_{Q+1}, \xi_{Q+2}, \ldots$.

Соответственно для множителя ослабления $U_0^{\mathrm{ref}}(\sigma_0, \nu_0)$ отраженной в область Ω_0 волны имеем равенство:

$$U_0^{\mathrm{ref}}(\sigma_0, \nu_0) = \int\limits_0^\infty U_0^{\mathrm{inc}}(-\sigma_0' = 0, \nu_0')\, G_0(-\sigma_0' = 0, \nu_0'; -\sigma_0, \nu_0)\, d\nu_0', \quad (2.11)$$

Отраженное поле получим по формуле (2.11), в которой функции U_0^{inc} и G_0 известны. Функция U_0^{ref} из формулы (2.3) равна

$$U_0^{\mathrm{ref}}(\sigma_0, \nu_0) = (-i)A_p \sum_{m=1} e^{i\sigma_0\zeta_m'} \frac{v(\nu_0 - \zeta_m')}{\zeta_m' v^2(-\zeta_m')} \int\limits_0^\infty v(\nu_0' - \zeta_p')v(\nu_0' - \zeta_m')d\nu_0'.$$

Учтем тот факт, что вещественнозначные функции Эйри $v(\nu - \zeta)$ удовлетворяют условию ортогональности

$$\frac{1}{\zeta_m' v^2(-\zeta_m')} \int\limits_0^\infty v(\nu_0' - \zeta_p')v(\nu_0' - \zeta_m')d\nu_0' = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad m \neq p, \\ 1 & \text{для} \quad m = p. \end{cases}$$

Тогда для отраженного от слоя Ω_1 упругого волнового поля в полуплоскости Ω_0 получаем выражение

$$\begin{aligned} u_0^{\mathrm{ref}}(\sigma_0, \nu_0) &= (-i)e^{-ik_0x}\mathcal{R}_{01}A_p e^{-i\sigma_0(-\zeta_p')}v(\nu_0 - \zeta_p') \\ &= e^{-ik_0x}(-i)\mathcal{R}_{01}U_0^{\mathrm{inc}}(-\sigma_0, \nu_0). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Соответственно в слое Ω_1 от вертикальной границы Γ_0 возникает волновое поле, преломленное из градиентной среды Ω_0 в однородную упругую среду Ω_1, следующего вида

$$u_1 = u_1^{\mathrm{tr}} = \mathcal{T}_{01}\, e^{ik_1x}U_1^{\mathrm{tr}}(\sigma_1, \nu_1).$$

Здесь функция U_1^{tr} найдена в виде

$$U_1^{\mathrm{tr}}(\sigma_1, \nu_1) = \frac{A_p e^{-i(\pi/4)\operatorname{sign}\sigma_1}}{2\sqrt{\pi\sigma_1}} \int\limits_0^\infty \left[e^{\frac{i(\nu_1 - \nu_1')^2}{4\sigma_1}} + e^{\frac{i(\nu_1 + \nu_1')^2}{4\sigma_1}} \right] v(\alpha_{01}\nu_1' - \zeta_p')d\nu_1'.$$

Коэффициент перехода α_{01} из среды Ω_0 в среду Ω_1 равен

$$\alpha_{\mathbf{01}} = \frac{k_0^{2/3}\psi_0}{k_1^{2/3}\psi_1} = \frac{(b'_0(0))^{1/3}(b_1)^{2/3}}{b_0(0)}.$$

Назовем коэффициентом трансформации $[TR_{p01}(\sigma_1,\nu_1)]$ следующий интеграл

$$[TR_{p01}(\sigma_1,\nu_1)]=\frac{e^{-i\pi/4\operatorname{sign}\sigma_1}}{2\sqrt{\pi|\sigma_1|}}\int\limits_0^\infty\left[e^{\frac{i(\nu_1-\nu_1')^2}{4\sigma_1}}+e^{\frac{i(\nu_1+\nu_1')^2}{4\sigma_1}}\right]v(\alpha_{01}\nu_1'-\zeta_p')d\nu_1'.$$

Окончательно, преломленное из полуплоскости Ω_0 в слой Ω_1 волновое поле имеет вид

$$u_{10}^{\mathrm{tr}}(\sigma_1,\nu_1)=e^{ik_1x}\,\mathcal{T}_{01}\,A_p\,[TR_{p01}(\sigma_1,\nu_1)]. \tag{2.13}$$

§3. Отраженные и преломленные от границы раздела Γ_1 волновые поля.

Найденное в слое волновое поле (2.13), прошедшее один раз слой Ω_1, в свою очередь набегает на вертикальную границу $\Gamma_1=\{x=x_1,z>0\}$, разделяющую области Ω_1 и Ω_2. Это поле будет нормально падающим на границу $\Gamma_1=\{x=x_1,z>0\}$ волновым полем вида (2.1):

$$u_{11}^{\mathrm{inc}}(\sigma_1,\nu_1)=e^{ik_1(x-x_1)}\,A_p\,e^{ik_1x_1}\mathcal{T}_{01}[TR_{p01}(\sigma_1,\nu_1)]. \tag{3.1}$$

Обозначим через A_{p1} следующее произведение

$$A_{p1}=A_p\,e^{ik_1x_1}\,\mathcal{T}_{01}$$

Полное волновое поле в слое Ω_1 определим как сумму падающего и отраженного от вертикальной границы Γ_1 полей:

$$\begin{aligned}u_{11}(\sigma_1,\nu_1)&=u_{11}^{\mathrm{inc}}+u_{11}^{\mathrm{ref}}\\&=e^{ik_1(x-x_1)}U_{11}^{\mathrm{inc}}(\sigma_1,\nu_1)+\mathcal{R}_{12}\,e^{-ik_1(x-x_1)}U_{11}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1,\nu_1),\end{aligned} \tag{3.2}$$

где

$$U_{11}^{\mathrm{inc}}(\sigma_1,\nu_1)=A_{p1}[TR_{p01}(\sigma_1,\nu_1)].$$

Преломленное в область Ω_2 поле ищем в виде:

$$u_2(\sigma_2,\nu_2)=u_2^{\mathrm{tr}}=\mathcal{T}_{12}\,e^{ik_2(x-x_1)}U_2^{\mathrm{tr}}(\sigma_2,\nu_2). \tag{3.3}$$

Множители ослабления $U_{11}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1,\nu_1)$ и $U_2^{\mathrm{tr}}(\sigma_2,\nu_2)$ найдем по формулам

$$U_{11}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1,\nu_1)=\int\limits_0^\infty U_{11}^{\mathrm{inc}}(-\sigma_1''=\sigma_{11},\nu_1'')G_1(-\sigma_1''=\sigma_{11},\nu_1'';-\sigma_1,\nu_1)d\nu_1'', \tag{3.4}$$

$$U_2^{\mathrm{tr}}(\sigma_2,\nu_2)=\int\limits_0^\infty i\,U_{11}^{\mathrm{inc}}(\sigma_2'=\sigma_{11},\nu_2')\,G_2(\sigma_2'=\sigma_{11},\nu_2';\sigma_2,\nu_2)\,d\nu_2'. \tag{3.5}$$

Проводя процедуру нахождения отраженной и преломленной волн от границы раздела Γ_1, аналогично разделу 2, найдем

$$u_{11}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1,\nu_1) = \mathcal{R}_{12}\, e^{-ik_1(x-x_1)} U_{11}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1,\nu_1) = e^{-ik_1(x-x_1)}\mathcal{R}_{12} A_{p1}$$

$$\times \int\limits_0^\infty \left\{ \frac{e^{i\pi/4\mathrm{sign}\,\sigma_{11}}}{2\sqrt{\pi\sigma_{11}}} \int\limits_0^\infty \left[e^{\frac{-i(\nu_1''-\nu_1')^2}{4\sigma_{11}}} + e^{\frac{-i(\nu_1''+\nu_1')^2}{4\sigma_{11}}} \right] v(\alpha_{01}\nu_1' - \zeta_p')d\nu_1' \right.$$

$$\left. \times \frac{e^{-i\pi/4\mathrm{sign}\,(\sigma_{11}-\sigma_1)}}{2\sqrt{\pi(\sigma_{11}-\sigma_1)}} \left[e^{\frac{i(\nu_1-\nu_1'')^2}{4(\sigma_{11}-\sigma_1)}} + e^{\frac{i(\nu_1+\nu_1'')^2}{4(\sigma_{11}-\sigma_1)}} \right] \right\} d\nu_1''.$$

Здесь коэффициент отражения $\mathcal{R}_{12}$ равен

$$\mathcal{R}_{12} = \frac{\mu_1\, k_1 - \mu_2\, k_2}{\mu_1\, k_1 + \mu_2\, k_2}. \tag{3.6}$$

В формуле для $u_{11}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1,\nu_1)$ подинтегральная функция

$$\frac{e^{-i\pi/4\mathrm{sign}\,(\sigma_{11}-\sigma_1)}}{2\sqrt{\pi(\sigma_{11}-\sigma_1)}} \left[e^{\frac{i(\nu_1-\nu_1'')^2}{4(\sigma_{11}-\sigma_1)}} + e^{\frac{i(\nu_1+\nu_1'')^2}{4(\sigma_{11}-\sigma_1)}} \right]$$

при $\sigma_1 \to \sigma_{11}$ снизу стремится к пределу $\delta(\nu_1 - \nu_1'')$. Окончательно для волны, один раз прошедшей через слой и отраженной от границы раздела Γ_1, имеем следующее представление

$$u_{11}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1,\nu_1) = e^{-ik_1(x-x_1)}\mathcal{R}_{12}\, A_{p1}$$

$$\times \frac{e^{i(\pi/4)\mathrm{sign}\,(\sigma_1)}}{2\sqrt{\pi|\sigma_1|}} \int\limits_0^\infty \left[e^{\frac{-i(\nu_1-\nu_1')^2}{4\sigma_1}} + e^{\frac{-i(\nu_1+\nu_1')^2}{4\sigma_1}} \right] v(\alpha_{01}\nu_1' - \zeta_p')d\nu_1'. \tag{3.7}$$

Из формулы (3.7) следует, что вид отраженного от границы раздела Γ_1 волнового поля согласуется с полем волны, падающей на эту границу:

$$\begin{aligned} u_{11}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1,\nu_1) &= e^{-ik_1(x-x_1)}\, \mathcal{R}_{12}\, A_{p1}\, [TR_{p01}(-\sigma_1,\nu_1)] \\ &= e^{-ik_1(x-x_1)}\, \mathcal{R}_{12}\, U_{11}^{\mathrm{inc}}(-\sigma_1,\nu_1). \end{aligned}$$

Для преломленной в Ω_2 волны получаем следующее выражение

$$u_2^{\mathrm{tr}}(\sigma_2,\nu_2) = e^{ik_2(x-x_1)}\, (-i)\mathcal{T}_{12}\, A_{p1}$$

$$\times \sum_q e^{i(\sigma_2-\sigma_{11})\xi_q'} \frac{w(\xi_q'-\nu_2)}{\xi_q' w^2(\xi_q')} \int\limits_0^\infty [TR_{p01}(\sigma_{11},\nu_2''\alpha_{12})] w_1(\xi_q'-\nu_2'')d\nu_2''. \tag{3.8}$$

Здесь коэффициент преломления $\mathcal{T}_{12}$ имеет вид

$$\mathcal{T}_{12} = \frac{2\mu_1\, k_1}{\mu_1\, k_1 + \mu_2\, k_2}. \tag{3.9}$$

Коэффициент трансформации $[TR_{p01}(\sigma_{11}, \nu_2''\alpha_{12})]$ из слоя Ω_1 в Ω_2 представлен формулой

$$[TR^0_{p01}(\sigma_{11}, \nu_2''\alpha_{12})]$$
$$= \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi\sigma_{11}}} \int\limits_0^\infty \left[e^{\frac{i(\nu_2''\alpha_{12}-\nu_1')^2}{4\sigma_{11}}} + e^{\frac{i(\nu_2''\alpha_{12}+\nu_1')^2}{4\sigma_{11}}} \right] v(\alpha_{01}\nu_1' - \zeta_p')d\nu_1', \tag{3.10}$$

где отношение $\nu_1/\nu_2 = \alpha_{\mathbf{12}}$ равно

$$\alpha_{12} = \frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}\psi_2} = \frac{b_2(0)}{b_1^{2/3} b_2'(0)^{1/3}}.$$

§4. Волновые поля, набегающие на границу Γ_0.

Рассмотрим теперь волну, прошедшую один раз слой, отразившуюся от вертикальной границы раздела Γ_1 и падающую на границу раздела Γ_0:

$$u_{11}^{\mathrm{ref}}(\sigma_1, \nu_1) = e^{-ik_1(x-x_1)}\mathcal{R}_{12}A_{p1}\,[TR_{p01}(-\sigma_1, \nu_1)],$$

где коэффициент трансформации $[TR_{p01}(-\sigma_1, \nu_1)]$ представлен интегралом

$$[TR_{p01}(-\sigma_1, \nu_1)]$$
$$= \frac{e^{-i(\pi/4)\,\mathrm{sign}\,(-\sigma_1)}}{2\sqrt{\pi\sigma_1}} \int\limits_0^\infty \left[e^{\frac{-i(\nu_1-\nu_1')^2}{4\sigma_1}} + e^{\frac{-i(\nu_1+\nu_1')^2}{4\sigma_1}} \right] v(\alpha_{01}\nu_1' - \zeta_p')d\nu_1'.$$

Заметим, что в пределе при $\sigma_1 \to 0$ коэффициент $[TR_{p01}(-\sigma_1, \nu_1)]$ перейдет в следующее выражение

$$\lim_{\sigma_1\to 0}[TR_{p01}(-\sigma_1, \nu_1)] = v(\alpha_{01}\nu_1 - \zeta_p') = v(\nu_0 - \zeta_p').$$

Падающее на границу раздела Γ_0 волновое поле запишем в форме, аналогичной предыдущим пунктам

$$u_{110}^{\mathrm{inc}}(\sigma_1, \nu_1) = e^{-ik_1x}U_{110}^{\mathrm{inc}}(\sigma_1, \nu_1) = e^{-ik_1x}\mathcal{R}_{12}\mathcal{T}_{01}e^{2ik_1x_1}A_p[TR_{p01}(-\sigma_1, \nu_1)].$$

Обозначим через A_{p11} следующее произведение

$$A_{p11} = \mathcal{R}_{12}\,\mathcal{T}_{01}\,e^{2ik_1x_1}\,A_p.$$

Тогда нормально падающее на границу Γ_0 поле имеет вид

$$u_{110}^{\text{inc}}(\sigma_1,\nu_1) = e^{-ik_1x}U_{110}^{\text{inc}}(\sigma_1,\nu_1) = e^{-ik_1x}A_{p11}[TR_{p01}(-\sigma_1,\nu_1)].$$

Отличие от предыдущих пунктов состоит в том, что падающее волновое поле набегает на границу Γ_0 не слева, а справа.

Полное волновое поле в слое будем искать в следующем виде

$$u_{110}(\sigma_1,\nu_1) = e^{-ik_1x}U_{110}^{\text{inc}}(\sigma_1,\nu_1) + e^{ik_1x}\mathcal{R}_{10}U_{110}^{\text{ref}}(\sigma_1,\nu_1),$$

а преломленное в область Ω_0 волновое поле будет определено формулой

$$u_{01}^{\text{tr}}(\sigma_0,\nu_0) = e^{-ik_0x}\mathcal{T}_{10}\,U_{01}^{\text{tr}}(\sigma_0,\nu_0).$$

Коэффициенты отражения $\mathcal{R}_{10}$ и преломления $\mathcal{T}_{10}$ равны

$$\mathcal{R}_{10} = \frac{\mu_1\,k_1 - \mu_0\,k_0}{\mu_1\,k_1 + \mu_0\,k_0} = -\mathcal{R}_{01}, \quad \mathcal{T}_{10} = \frac{2\mu_1\,k_1}{\mu_1\,k_1 + \mu_0\,k_0}.$$

Отраженное от границы раздела Γ_0 в слой волновое поле получено в виде

$$u_{110}^{\text{ref}}(\sigma_1,\nu_1) = e^{ik_1x}\mathcal{R}_{10}\,A_{p11}\,[TR_{p01}(\sigma_1,\nu_1)]. \tag{4.1}$$

Преломленное в полуплоскость Ω_0 волновое поле преобразуется в следующее

$$u_{01}^{\text{tr}}(\sigma_0,\nu_0) = e^{-ik_0x}\mathcal{T}_{10}\,A_{p11}(-i)e^{-\sigma_0(-\zeta_p')}v(\nu_0-\zeta_p'). \tag{4.2}$$

§5. Волновое поле, прошедшее слой Ω_1 трижды и набегающее на границу Γ_1.

Предпримем последний шаг и найдем волновое поле, прошедшее слой трижды и преломившееся в полуплоскость наблюдателя Ω_2. Это будет вторая серия волн, достигших точки наблюдения. Проведем процедуру нахождения отраженного от границы раздела Γ_1 в слой и преломленного в полуплоскость наблюдателя волновых полей.

Нормально падающее на границу раздела Γ_1 волновое поле преобразуем в соответствии с формулами (2.1)–(2.2):

$$u_{1101}^{\text{inc}}(\sigma_1,\nu_1) = e^{ik_1(x-x_1)}\mathcal{R}_{10}\mathcal{R}_{12}\mathcal{T}_{01}A_pe^{3ik_1x_1}[TR_{p01}(\sigma_1,\nu_1)]. \tag{5.1}$$

Обозначим через $\mathcal{A}$ коэффициент

$$\mathcal{A} = \mathcal{R}_{10}\mathcal{R}_{12}\mathcal{T}_{01}A_pe^{3ik_1x_1}.$$

Тогда, проводя всю процедуру нахождения отраженной и преломленной волн от Γ_1 по схеме пунктов 2 и 3, найдем

$$u_{1101}^{\text{ref}}(\sigma_1,\nu_1) = e^{-ik_1(x-x_1)}\mathcal{R}_{12}\mathcal{A}\,[TR_{p01}(-\sigma_1,\nu_1)]. \tag{5.2}$$

В формуле (5.2) коэффициент отражения $\mathcal{R}_{12}$ определен равенством (3.6). Преломленная от вертикальной границы раздела Γ_1 волна в точке наблюдения (σ_2, ν_2) имеем следующее выражение

$$u_{22}^{\mathrm{tr}}(\sigma_2, \nu_2) = e^{ik_2(x-x_1)}(-i)\mathcal{T}_{12}\mathcal{A}\sum_n^N e^{i(\sigma_2-\sigma_{11})\xi_n'}\frac{w_1(\xi_n'-\nu_2)}{\xi_n' w_1(\xi_n')}$$

$$\times\int_0^\infty [TR_{p01}(\sigma_{11}, \nu_2''\alpha_{12})]w_1(\xi_n'-\nu_2'')d\nu_2''. \tag{5.3}$$

Здесь коэффициент преломления $\mathcal{T}_{12}$ имеет вид (3.9), а коэффициент трансформации TR_{p01} выражается формулой (3.10).

Итак, пусть волна шепчущей галереи номера p, образованная точечным источником в точке $(-x_0, 0)$,

$$u_0^{\mathrm{inc}}(\sigma_0, \nu_0) = e^{ik_0x}\,A_p\,e^{-i\sigma_0\zeta_p'}\,v(\nu_0-\zeta_p'), \tag{5.4}$$

$$A_p = \frac{i\,\psi_0\,e^{ik_0x_0}\,e^{-i\sigma_{00}\zeta_p'}}{\mu_0(0)\,2^{2/3}\,k_0^{1/3}\,\zeta_p'\,v(\zeta_p')}, \tag{5.5}$$

набегает на слой Ω_1.

Тогда первая волна, прошедшая слой и преломившаяся в область Ω_2, где находится наблюдатель, равна

$$u_2^{\mathrm{tr}}(\sigma_2, \nu_2) = e^{ik_2(x-x_1)}\,(-i)\mathcal{T}_{12}\mathcal{T}_{01}A_pe^{ik_1x_1}$$

$$\times\sum_q e^{i(\sigma_2-\sigma_{11})\xi_q'}\frac{w(\xi_q'-\nu_2)}{\xi_q' w^2(\xi_q')}\int_0^\infty [TR_{p01}(\sigma_{11}, \nu_2''\alpha_{12})]w_1(\xi_q'-\nu_2'')d\nu_2''. \tag{5.6}$$

Здесь коэффициент преломления $\mathcal{T}_{12}$ имеет вид

$$\mathcal{T}_{12} = \frac{2\mu_1\,k_1}{\mu_1\,k_1+\mu_2\,k_2}. \tag{5.7}$$

Коэффициент трансформации $[TR_{p01}(\sigma_{11}, \nu_2''\alpha_{12})]$ из слоя в Ω_2 представлен формулой

$$[TR_{p01}^0(\sigma_{11}, \nu_2''\alpha_{12})]$$

$$= \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi\sigma_{11}}}\int_0^\infty \left[e^{\frac{i(\nu_2''\alpha_{12}-\nu_1')^2}{4\sigma_{11}}}+e^{\frac{i(\nu_2''\alpha_{12}+\nu_1')^2}{4\sigma_{11}}}\right]v(\alpha_{01}\nu_1'-\zeta_p')d\nu_1', \tag{5.8}$$

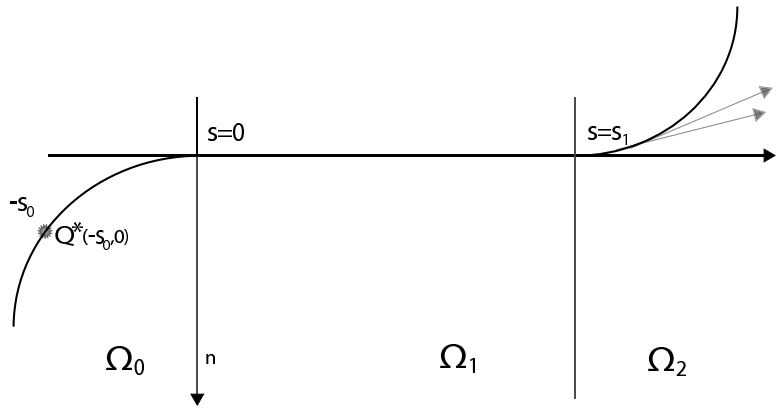

Рис. 2. Области Ω_i, $i = 0, 1, 2$ с криволинейной границей $n - 0$

где отношение $\nu_1/\nu_2 = \alpha_{12}$ равно

$$\alpha_{12} = \frac{k_1^{2/3}\psi_1}{k_2^{2/3}\psi_2} = \frac{b_2(0)}{b_1^{2/3}b_2'(0)^{1/3}}.$$

Волна, преломленная в Ω_2 и трижды прошедшая слой Ω_1, выражается следующей формулой

$$u_{22}^{\mathrm{tr}}(\sigma_2, \nu_2) = e^{ik_2(x-x_1)}(-i)\mathcal{T}_{12}\mathcal{R}_{10}\mathcal{R}_{12}\mathcal{T}_{01}\, A_p\, e^{3ik_1x_1}$$

$$\times \sum_n e^{i(\sigma_2-\sigma_{11})\xi_n'} \frac{w_1(\xi_n' - \nu_2)}{\xi_n' w_1(\xi_n')} \int\limits_0^\infty [TR_{p01}(\sigma_{11}, \nu_2''\alpha_{12})] w_1(\xi_q' - \nu_2'')d\nu_2''. \quad (5.9)$$

Используя результаты работ [3–6], можно по предложенной здесь схеме рассмотреть в области Ω_0 волну соскальзывания или однородную волну от точечного источника в точке $(-x_0, 0)$. Скорость в слое Ω_1 или в области Ω_2 может иметь минимум, максимум на свободной от напряжений границе $z = 0$ или быть постоянной. Во всех этих случаях в области Ω_2 можно найти волну, преломленную от слоя Ω_1 и прошедшую один раз, три раза этот слой и т.д.

Заметим, что аналогичное поведение приповерхностного волнового поля возникает в ситуации, рассмотренной на рис. 2. В точках сопряжения $(s = 0, n = 0)$ и $(s = s_1, n = 0)$ областей Ω_0 с Ω_1 и Ω_1 с Ω_2

касательные к границам области Ω_0 и слоя Ω_1 соответственно слоя Ω_1 и области Ω_2 совпадают, но кривизны границ изменяются скачком от $1/R_0 > 0$ до $1/R_1 = 0$ и от $1/R_1 = 0$ до $1/R_2 < 0$. (Кривизна границы равна обратной величине радиуса кривизны этой границы $R_i = R_i(s)$, $i = 0, 1, 2$.) Все формулы для падающего, отраженного и преломленного волновых полей сохраняют свой вид, если заменить в них функции ψ_j, $j = 0, 1, 2$ на соответствующие (см. [6])

$$\psi_0^3 = \frac{1}{R_0} + \frac{(b_0)'_z(0)}{b_0(0)}; \quad \psi_1^3 = 1; \quad \psi_2^3 = -\left(\frac{1}{R_2} + \frac{(b_2)'_z(0)}{b_2(0)}\right)$$

при тех же условиях на свойства скоростей в упругих средах Ω_j, $j = 0, 1, 2$. Если рассматривать однородные упругие среды с постоянными скоростями, то выбирая

$$\psi_0^3 = \frac{1}{R_0}; \quad \psi_1^3 = 1; \quad \psi_2^3 = -\frac{1}{R_2},$$

мы получим те же результаты (т.е. волна шепчущей галереи будет набегать на слой, преломляться в однородный слой и далее преобразовываться в волну соскальзывания).

Литература

1. М. А. Леонтович, В. А. Фок, *Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения.* — Журн. эксперим. и теор. физики **16**, No. 7 (1946), 557–573.
2. V. M. Babich, N. Ya. Kirpichnikova, *The Boundary-Layer Method in Diffraction Problems.* Springer-Verlag, 1979.
3. Н. В. Сивицкая, В. Б. Филиппов, *О распространении волн шепчущей галереи в среде с вертикальной границей раздела.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **179** (1989), 147–151.
4. Н. Я. Кирпичникова, *Дифракция поверхностных* SV-*волн на линии разрыва упругих параметров.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **342** (2007), 77–105.
5. N. Ya. Kirpichnikova, *Diffraction from a layer of surface* SH-*waves radiated by a point source at the boundary.* — In: Proceedings of the International Conference Days on Diffraction (2008), pp. 72–76.
6. Н. Я. Кирпичникова, А. С. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задаче дальнего распространения поверхностных* SV-*волн.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **380** (2010), 53–89.

Kirpichnikova N. Ya., Kirpichnikova A. S. Reflection and refraction from a vertical layer of surface SH-waves radiated from a point source on a free from tensions boundary.

By the use of asymptotical boundary layer method we analysis a transformation of the elastic SH-polarized surface wave of whispering gallery type (so-called Lowe waves), in the case this wave passes many times a vertical layer between two half-planes.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nkirp@pdmi.ras.ru

Поступило 8 сентября 2011 г.