Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 393, 2011 г.

Н. Я. Кирпичникова

ФУНКЦИИ ГРИНА SH ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН

В работе рассмотрена задача нахождения функций Грина, соответствующих поверхностным SH-волнам. Эти волны вблизи свободной от напряжений границы распространяются с фазовой скоростью, близкой к скорости поперечных волн. Смещение частиц внутри области для SH-волн происходит перпендикулярно плоскости рассмотрения. Это так называемые волны Лява.

Характер волнового процесса существенным образом зависит от поведения поперечной скорости в окрестности границы полуплоскости. Если скорость распространения волн в среде растет с глубиной, то лучи, выходящие из излучателя под малым углом скольжения, распространяются путем многократных отражений от поверхности. Возникает так называемый поверхностный волновод. В этом случае несправедлив традиционный лучевой (геометрооптический) подход к решению задачи. Поле в областях интерференции поверхностных волн наиболее полно описывается в рамках метода пограничного слоя. Метод нахождения интерференционных поверхностных волновых полей, предложенный здесь, полностью переноситься на случай трехмерной упругой среды, ограниченной произвольной, гладкой, свободной от напряжений поверхностью.

Рассмотрим двумерную упругую полуплоскость $-\infty < x < \infty$, $z \geq 0$. Исследуется волновой процесс, образованный точечным источником M_0 с координатами (x_0, z_0). Изучаемые здесь решения уравнений теории упругости в полуплоскости есть волны, распространяющиеся вблизи поверхности $z = 0$ с фазовой скоростью, близкой к поперечной скорости $b(z)$. У волн Лява смещение частиц в главном происходит ортогонально плоскости рассмотрений (x, z). Вектор смещений SH-волны $\mathbf{u}(x, z) = (u(x, z) = 0,\ v(x, z) \neq 0,\ w(x, z) = 0)$ имеет одну составляющую и задача из векторной переходит в скалярную.

Ключевые слова: асимптотический метод, упругие среды, поверхностные волны шепчущей галереи, волны соскальзывания, однородные волны, точечный источник, функции Грина.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 11-01-00407А.

Функция $v(x,z)$ удовлетворяет следующей задаче:

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}+\frac{\partial \ln\mu}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\omega}{b^2(z)}v\right] = -\frac{\delta(x-x_0)\delta(z-z_0)}{\mu(z)}, \quad z>0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial v}{\partial z}\right|_{z=o}=0, \quad \lim_{r\to\infty}\sqrt{r}\left(\frac{\partial v}{\partial r}-ikv\right)=0, \quad k=\frac{\omega}{b(0)}, \quad b^2=\frac{\mu}{\rho}. \tag{2}$$

Исследуются поверхностные SH-волны шепчущей галереи, волны соскальзывания и волны, распространяющиеся в упругих средах с постоянной поперечной скоростью. Ввиду этого для упругих SH-волн рассмотрим простейшие варианты изменения поперечной скорости $b(z)$ при возрастании $z>0$:

$$\begin{array}{ll} U: & \frac{\partial b}{\partial z}=0; \\ W: & \frac{\partial b}{\partial z}>0; \\ C: & \frac{\partial b}{\partial z}<0. \end{array} \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения упругих поверхностных волн в градиентных средах, соответствующие первым буквам английских слов: U – однородный (Uniform), W – волны шепчущей галереи (Whispering gallery waves), C – волны соскальзывания (Creeping waves).

Ввиду того, что нас интересуют интерференционные поверхностные волны, решение задачи будем искать в виде:

$$v(x,z)=e^{ik|x-x_0|}\sum_{l=0}\frac{V^l(\sigma,\nu)}{k^{l/3}}, \quad k=\frac{\omega}{b(0)}. \tag{4}$$

Найдем лишь главные слагаемые в асимптотическом разложении (4) функции $v(x,z)$ т.е. составляющую $V^0(\sigma,\nu)=V(\sigma,\nu)$. Подставим решение (4) в уравнение (1). Тогда для составляющей $V(\sigma,\nu)$ в областях интерференции поверхностных волн получим параболическое уравнение Леонтовича–Фока [1]. Следуя методу пограничного слоя [2], введем растянутые координаты:

$$\nu=\psi k^{2/3}2^{1/3}z, \quad \sigma=\psi^2 k^{1/3}2^{-1/3}x, \\ \sigma_0=\psi^2 k^{1/3}2^{-1/3}x_0, \quad k=\frac{\omega}{b(0)}, \tag{5}$$

причем при решении данной задачи в однородной среде $\psi_U = 1$. Для неоднородных сред величина ψ определена следующими выражениями

$$\psi_W^3 = \frac{b'_z(0)}{b(0)} > 0, \quad \psi_C^3 = \frac{-b'_z(0)}{b(0)} > 0. \tag{6}$$

Во вновь введенных координатах функция $V(\sigma, \nu)$ удовлетворяет уравнениям Леонтовича–Фока и однородному краевому условию Неймана:

$$LV = i\frac{\partial V}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 V}{\partial \nu^2} + \varkappa \nu V = -\frac{\delta(\sigma - \sigma_0)\delta(\nu - \nu_0)\psi}{\mu k^{1/3} 2^{2/3}}, \tag{7}$$

$$\varkappa = \begin{cases} 0 & \text{в среде} \quad U \\ -1 & \text{в среде} \quad W \\ 1 & \text{в среде} \quad C. \end{cases}$$

Соответствующая уравнению (7) функция Грина $G(\sigma, \nu; \sigma_0, \nu_0)$ удовлетворяет уравнениям Леонтовича–Фока и однородному краевому условию Неймана:

$$LG = i\frac{\partial G}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 G}{\partial \nu^2} + \varkappa \nu G = -\delta(\sigma - \sigma_0)\delta(\nu - \nu_0).$$

В упругих средах U с постоянной скоростью распространения функция Грина с условием Неймана на свободной от напряжения границе имеет следующий вид

$$G_U(\sigma, \nu; \sigma_0, \nu_0) = \frac{e^{-i\pi/4}}{2\sqrt{\pi|\sigma - \sigma_0|}} \left[e^{\frac{i(\nu-\nu_0)^2}{4|\sigma=\sigma_0|}} + e^{\frac{i(\nu+\nu_0)^2}{4|\sigma-\sigma_0|}} \right]. \tag{8}$$

Для функции Грина, соответствующей задаче Неймана и минимуму скорости поперечных волн на поверхности, т.е. в среде W при $\psi_W^3 = \frac{b'_z(0)}{b(0)} > 0$, получаем выражение

$$G_W(\sigma, \nu; \sigma_0, \nu_0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\infty e^{-i2\pi/3}}^{\infty e^{i\pi/3}} e^{i|\sigma - \sigma_0|\zeta} \left[\frac{v(\zeta + \nu_>)}{v'(\zeta)} - \frac{w_2(\zeta + \nu_>)}{w_2'(\zeta)} \right]$$

$$\times [v(\zeta + \nu_<) w_2'(\zeta) - w_2(\zeta + \nu_<) v'(\zeta)] d\zeta, \quad \nu \geq 0, \quad \nu_0 \geq 0. \tag{9}$$

В формуле (9) контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}$ на рис. 1.

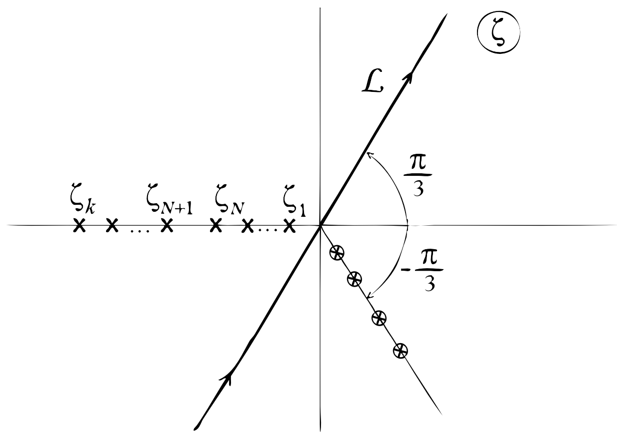

Рис. 1. Контур $\mathcal{L}$

Используя теорему о вычетах, запишем интеграл (9) в виде ряда по вычетам:

$$G_W(\sigma,\nu;\sigma_0,\nu_0) = (-i)\sum_{p=1}^{P} e^{i|\sigma-\sigma_0|(-\zeta'_p)}\frac{v(-\zeta'_p+\nu)v(-\zeta'_p+\nu_0)}{(-\zeta'_p)[v(-\zeta'_p)]^2}+\cdots. \tag{10}$$

Здесь под символом $+\cdots$ следует понимать интегральное представление функции Грина (9) взятое по контуру, охватывающему отрицательную часть вещественной оси, начиная с $P+1$-ого номера корня ζ'_{P+1} производной вещественнозначной функции $v'(-\zeta')=0$.

В случае, когда на границе полупространства скорость в среде имеет максимальное значение и когда величина ψ равна

$$\psi_C^3 = -\frac{b'_z(0)}{b(0)} > 0, \quad \nu > 0,$$

функция Грина граничного условия Неймана имеет следующее интегральное представление

$$G_C(\sigma,\nu;\sigma_0,\nu_0) = \frac{i}{4\pi}\int\limits_{\infty e^{i(\pi-\delta)}}^{\infty e^{i\varepsilon}} e^{i|\sigma-\sigma_0|\xi}\left[\frac{w_1(\xi-\nu_>)}{w'_1(\xi)}\right]$$

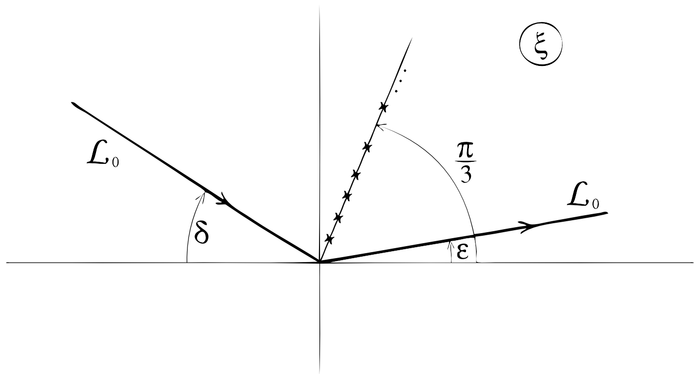

Рис. 2. Контур $\mathcal{L}_0$

$$[w_2(\xi-\nu_<)w_1'(\xi)-w_1(\xi-\nu_<)w_2'(\xi)]d\xi, \quad \nu\geq 0, \quad \nu_0\geq 0. \tag{11}$$

Контур интегрирования совпадает с контуром $\mathcal{L}_0$ на рис. 2. В этом случае также по теореме о вычетах вместо формулы (11) имеем:

$$G_C^{SH}(\sigma,\nu;\sigma_0,\nu_0)=i\sum_{q=1}^{Q}e^{i|\sigma-\sigma_0|\xi_q'}\frac{w_1(\xi_q'-\nu)w_1(\xi_q'-\nu_0)}{\xi_q'[w_1(\xi_q')]^2}+\cdots. \tag{12}$$

Из формул (1), (2) и задачи для функции Грина с теми же однородными условиями запишем выражение составляющей SH-волны с точностью до множителя, который не зависит от координат, в виде:

$$v=e^{ik|x-x_0|}V^0=e^{ik|x-x_0|}\frac{\psi}{\mu\, k^{1/3}\,2^{2/3}}\begin{cases}A\;G_U^{SH} & \text{в среде } U\\ A_p\,G_W^{SH} & \text{в среде } W\\ A_q\,G_C^{SH} & \text{в среде } C.\end{cases} \tag{13}$$

Найдем неопределенные множители A, A_p и A_q для трех случаев (3) изменения скорости вблизи границы. Используя схему получения явного выражения для множителей A, A_p и A_q из работы В. М. Бабича [3], найдем эти параметры.

U: Из формулы (13) для случая упругого полупространства с постоянными параметрами Ламе λ, μ и постоянной плотностью ρ в декартовых координатах x, z получаем следующее выражение для v_U:

$$v_U = \frac{e^{ik|x-x_0|}Ae^{-i\pi/4}}{2\mu\sqrt{2\pi k|x-x_0|}} \times \left[e^{\frac{ik(z-z_0)^2}{2|x-x_0|}} + e^{\frac{ik(z+z_0)^2}{2|x-x_0|}}\right].$$

Подставим выражение для v_U в уравнение (1) В левой части этого уравнения дельта-функция может появиться только за счет двукратного дифференцирования по x выражения $|x-x_0|$

$$\frac{d^2}{dx^2}|x-x_0| = 2\delta(x-x_0). \tag{14}$$

Приравняем друг другу выражения в левой и правой частях равенства, содержащие дельта функцию. С точностью до главных членов получим

$$2ik\frac{Ae^{-i\pi/4}}{2\mu\sqrt{2\pi k|x-x_0|}}\left[e^{\frac{ik(z-z_0)^2}{2|x-x_0|}} + e^{\frac{ik(z+z_0)^2}{2|x-x_0|}}\right] = -\frac{\delta(z-z_0)}{\mu}.$$

Интегрируя от нуля до бесконечности по z_0, последнее равенство дает $A = i$.

Окончательно, функция Грина задачи (1), (2) есть

$$v_U = \frac{e^{ik|x-x_0|}e^{i\pi/4}}{2\mu\sqrt{2\pi k|x-x_0|}}\left[e^{\frac{ik(z-z_0)^2}{2|x-x_0|}} + e^{\frac{ik(z+z_0)^2}{2|x-x_0|}}\right]. \tag{15}$$

W: Аналогично, действуя по предложенной выше схеме, найдем выражение A_p для сред с минимумом скорости на поверхности, но в координатах σ, ν. Выбираем функцию v_W в виде

$$v_W = \sum_{p=1} \frac{e^{ik|x-x_0|}i\psi A_p e^{i|\sigma-\sigma_0|(-\zeta_p')}}{\mu k^{1/3}2^{2/3}} \frac{v(-\zeta_p'+\nu)v(-\zeta_p'+\nu_0)}{\zeta_p'[v(-\zeta_p')]^2}.$$

Неопределенный коэффициент найдем из равенства:

$$\sum_{p=1}\frac{2ikA_p i\psi}{\mu k^{1/3}2^{2/3}}\frac{v(-\zeta_p'+\nu)v(-\zeta_p'+\nu_0)}{(-\zeta_p')[v(-\zeta_p')]^2} = -\delta(\nu-\nu_0)\frac{\psi k^{2/3}2^{1/3}}{\mu}.$$

Умножая правую и левую части равенства на $v(-\zeta_n'+\nu_0)$, интегрируя по ν_0 от нуля до бесконечности и учитывая ортогональность собственных вещественнозначных функций Эйри, получим

$$A_p = 1.$$

Ортогональность функций Эйри дает равенство

$$\int_0^{\infty} v(-\zeta_n' + \nu_0)v(-\zeta_p' + \nu_0)d\nu_0 = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad p \neq n, \\ -(-\zeta_p')[v(-\zeta_p')]^2 & \text{для} \quad p = n, \end{cases}$$

Приведем окончательный вид для функции Грина задачи (1), (2) в случае распространения функций шепчущей галереи вблизи свободной от напряжения границы

$$v_W = \sum_{p=1}^{P} \frac{e^{ik|x-x_0|}\, i\, \psi\, e^{i|\sigma-\sigma_0|(-\zeta_p')}}{\mu\, 2^{2/3}\, k^{1/3}} \frac{v(-\zeta_p' + \nu)v(-\zeta_p' + \nu_0)}{(-\zeta_p')[v(-\zeta_p')]^2}. \tag{16}$$

C: Найдем коэффициент A_q в формуле (13) для среды C. Подставим в (13) функцию Грина, соответствующую средам с максимумом скорости на поверхности $z = 0$ и определенную формулой (12):

$$v_C = \sum_{q=1} \frac{e^{ik|x-x_0|} i A_q \psi e^{i|\sigma-\sigma_0|(\xi_q')}}{\mu k^{1/3} 2^{2/3}} \frac{w_1(\xi_q' - \nu)w_1(\xi_q' - \nu_0)}{\xi_q'[w_1(\xi_q')]^2}.$$

Используя то обстоятельство, что выше приведенное решение v_C удовлетворяет уравнению (1) и что дельта функция от аргумента $(x - x_0)$ может появиться в левой части этого уравнения за счет двукратного дифференцирования по x выражения $|x - x_0|$ (см. формулу (14)), имеем

$$\sum_{q=1} \frac{2ikA_q i\psi}{\mu k^{1/3} 2^{2/3}} \frac{w_1(\xi_q' - \nu)w_1(\xi_q' - \nu_0)}{\xi_q'[w_1(\xi_q')]^2} = -\delta(\nu - \nu_0) \frac{\psi k^{2/3} 2^{1/3}}{\mu}.$$

Умножая правую и левую часть части равенства на $w(-\xi_n' + \nu_0)$ и интегрируя по ν_0 от нуля до бесконечности по лучу $\mathcal{L}_0$, получим

$$A_q = -1.$$

Эта формула следует из свойства ортогональности функций Эйри w_1:

$$\int_0^{\infty e^{i\pi/3}} w_1(\xi_q' - \nu_0)w_1(\xi_n' - \nu_0)d\nu_0 = \begin{cases} 0 & \text{для} \quad q \neq n, \\ \xi_q'[w_1(\xi_q')]^2 & \text{для} \quad q = n. \end{cases}$$

Приведем окончательный вид функции Грина задачи (1), (2) в случае распространения волн соскальзывания вблизи свободной от напряжения границы

$$v_C = \sum_{q=1}^{Q} \frac{e^{ik|x-x_0|}\,(-i)\psi\, e^{i|\sigma-\sigma_0|(\xi'_q)}}{\mu\, 2^{2/3}\, k^{1/3}} \frac{w_1(\xi'_q-\nu)w_1(\xi'_q-\nu_0)}{\xi'_q[w_1(\xi'_q)]^2}. \tag{17}$$

Аналогичным образом можно построить функции Грина для волн P и SV поляризаций (см. работы [4,5]).

Литература

1. М. А. Леонтович, В. А. Фок, *Решение задачи о распространении электромагнитных волн вдоль поверхности Земли по методу параболического уравнения.* — Журн. эксперим. и теор. физики **16**, No. 7 (1946), 557–573.
2. V. M. Babich, N. Ya. Kirpichnikova, *The Boundary-Layer Method in Diffraction Problems.* Springer-Verlag, 1979.
3. В. М. Бабич, *Об одном формальном способе построения коротковолновой асимптотики функции Грина.* — Труды МИАН СССР **115**, No. 1 (1971), 10–13.
4. Н. Я. Кирпичникова, *Дифракция поверхностных SV-волн на линии разрыва упругих параметров.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **342** (2007), 77–105.
5. Н. Я. Кирпичникова, П. В. Крауклис, А. П. Крауклис, *Отражение и преломление поверхностных P-волн от линии разрыва упругих параметров.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **342** (2007), 106–137.

Kirpichnikova N. Ya. Green's function of SH-polarized surface waves.

In this paper, we find Green's function corresponding to surface SH-waves. We investigate whispering gallery waves, creeping waves and waves propagating with constant transversal velocity in the elastic medium.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nkirp@pdmi.ras.ru

Поступило 8 сентября 2011 г.