Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 393, 2011 г.

А. П. Качалов

РЕЛЕЕВСКИЕ ВОЛНЫ В АНИЗОТРОПНОЙ УПРУГОЙ СРЕДЕ И ИМПЕДАНС

Введение

Статья посвящена вопросам существования, единственности и важным свойствам релеевских волн в анизотропных упругих средах. В следующей статье будут представлены различные вычисления, связанные с релеевскими волнами в таких средах. Мы также надеемся, что результаты этой статьи в будущем могут быть использованы для решения обратной задачи восстановления параметров анизотропных сред вблизи поверхности по известным характеристикам поверхностных волн на границе упругого тела.

§1. Формулировка задачи

Рассмотрим полупространство $\mathbb{R}^3_+ = \{\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, z); z \geq 0\}$ заполненное анизотропной упругой средой с плотностью $\rho = \rho(z)$ и упругими константами $c_{ijkl} = c_{ijkl}(z)$. Функции ρ и c_{ijkl} представляются в виде:

$$\rho(z) = \rho^0 + \rho'(z), \quad c_{ijkl}(z) = c^0_{ijkl} + c'_{ijkl}(z), \tag{1}$$

где ρ^0 и c^0_{ijkl} – константы и функции $\rho', c'_{ijkl} \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+)$ равны нулю при $z \geq z_0$.

В случае общей анизотропии упругие константы удовлетворяют условиям симметрии

$$c_{ijkl}(z) = c_{klij}(z) = c_{jikl}(z) = c_{ijlk}(z), \quad i, j, k, l = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Заметим, что для более сложного случая предварительно напряженной анизотропной упругой среды, сохраняются только первые соотношения симметрии (смотри, например, [1, 2]).

Ключевые слова: волны Релея, анизотропная упругая среда, импеданс.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 11-01-00407А.

Уравнения динамики анизотропной упругой среды можно записать в виде:

$$\rho(z)\partial_t^2 u_i - \partial_j \left(c_{ijkl}(z)\partial_l u_k\right) = 0, \tag{3}$$

где $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x^i}$.

Для решения задачи мы должны добавить к системе уравнений (3) граничные условия. В случае релеевских волн на границе $z = 0$ используются граничные условия отсутствия нормальных напряжений.

$$\sigma_{i3}\big|_{z=0} = c_{i3kl}\partial_l u_k\big|_{z=0} = 0. \tag{4}$$

Поскольку релеевские волны - это поверхностные волны, мы также предполагаем, что волновое поле $u_i \to 0$ при $z \to +\infty$. Более точно, введем основное пространство $H = L_2([0,\infty)\rho)$ и предположим, что $\mathbf{u} \in W_2^2([0,\infty),\rho)$ для любых x^1, x^2, t как вектор функции от z.

Легко видеть, что в анизотропных упругих средах все свойства релеевских волн зависят от направления распространения волны. Зафиксируем направление распространения с помощью единичного вектора $\mathbf{t}$ в плоскости $z = 0$, $\mathbf{t} = \mathbf{t}(\phi) = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ или посредством угла ϕ. Иногда для простоты без потери общности мы будем предполагать, что $\phi = 0$, так что $\mathbf{t} = (1,0,0)$.

В этой статье мы исследуем поверхностные волны, которые имеют вид:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \exp\left[-i\epsilon^{-1}(t - (\mathbf{t},\mathbf{x})/v)\right]\mathbf{U}_i(z), \tag{5}$$

для скорости v. Такие волны должны удовлетворять уравнениям (3) и векторное поле $\mathbf{U} = \mathbf{U}(z)$, $i = 1,2,3$, должно принадлежать пространству $W_2^2([0,\infty),\rho)$ и удовлетворять некоторым граничным условиям при $z = 0$.

Определение 1. *Поверхностная волна называется релеевской волной,* $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = \mathbf{u}^R(\mathbf{x},t)$, *если она принадлежит* $W_2^2([0,\infty),\rho)$ *для любых* x^1, x^2, t, *удовлетворяет системе уравнений* (3) *и граничным условиям* (4) *при* $z = 0$.

На протяжении этой статьи мы будем искать релеевскую волну в виде (5). Соответствующее поле $\mathbf{U}^R(z)$ должно быть линейной комбинацией убывающих экспонент при $z > z_0$. Скорость $v = c_R(\phi)$ соответствующего векторного поля называется скоростью релеевской волны.

В дальнейшем нам потребуются также решения уравнений упругости, которые не принадлежат $W_2^2([0,\infty),\rho)$.

Определение 2. *Волновое поле* $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$ *вида* (5), *удовлетворяющее уравнениям упругости* (3), *некоторым граничным условиям при* $z=0$ *и*

$$\mathbf{u} * \exp\{-z/N\} \in W_2^2([0,\infty),\rho)$$

для любого $N \in \mathbb{N}$ *называется обобщенной поверхностной волной. Обобщенная релеевская волна – это обобщенная поверхностная волна, удовлетворяющая условиям свободной от напряжений поверхности* (4).

Это означает, что при $z > z_0$ наше решение может содержать не только убывающие, но также ограниченные экспоненты.

§2. Одномерный матричный оператор

Для любой поверхностной волны (5) ее подстановка в уравнения (3) приводит к системе уравнений

$$\mathcal{M}\mathbf{U} = v^2\mathbf{U}, \tag{6}$$

где компоненты матричного дифференциального оператора $\mathcal{M}$ могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{ik}V_k &= \mathcal{M}_{ik}(z', \frac{\partial}{\partial z'}; \phi)V_k \\ &= \rho^{-1}(z)\left\{c_{i\alpha k\beta}(z)t_\alpha t_\beta V_k - ic_{i\alpha k3}(z)t_\alpha \frac{\partial V_k}{\partial z'}\right. \\ &\left.-it_\alpha \frac{\partial}{\partial z'}(c_{i3k\alpha}(z)V_k) - \frac{\partial}{\partial z'}\left(c_{i3k3}(z)\frac{\partial V_k}{\partial z'}\right)\right\}.\end{aligned} \tag{7}$$

Здесь мы заменили переменную z на переменную $z' = \kappa^{-1}z$, $\kappa = \epsilon v$. Во всех наших вычислениях мы используем эйнштейновское правило суммирования. Более того, все латинские индексы, такие как i,j,k,l, принимают значения $1,2,3$, а греческие индексы α,β,γ принимают значения $1,2$. Граничные условия могут быть переписаны с помощью граничного дифференциального оператора первого порядка для вектор функции $\mathbf{V}(z')$

$$(\mathcal{Z}\mathbf{V})_i = \mathcal{Z}_{ik}V_k = \kappa\left(it_\alpha c_{i3k\alpha}(z)V_k + c_{i3k3}\frac{\partial V_k}{\partial z'}\bigg|_{z'=0}\right) = 0. \tag{8}$$

Определение 3. *Оператор $\mathcal{Z}$ называется оператором импеданса.*

Справедлива следующая лемма:

Лемма 1. *Оператор $\mathcal{M}(z', \frac{\partial}{\partial z'}; \phi)$ с граничными условиями (8) является неотрицательным самосопряженным опрератором с $D(\mathcal{M}) = \{\mathbf{U} \in W_2^2([0,\infty),\rho), \mathcal{Z}\mathbf{U} = 0\}$.*

Доказательство. Интегрирование по частям показывает, что для любых $\mathbf{U}, \mathbf{V} \in W_2^2([0,\infty),\rho)$ имеет место равенство

$$(\mathbf{U}, \mathcal{M}\mathbf{V}) = (\mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{V}) + ((\mathcal{Z}\mathbf{U}, V) - (\mathbf{U}, \mathcal{Z}\mathbf{V}))\big|_{z=0}.$$

Для доказательства неотрицательности рассмотрим выражение $(\mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{U})$ для $\mathbf{U} \in D(\mathcal{M})$.

$$\begin{aligned}(\mathcal{M}\mathbf{U}, \mathbf{U}) &= \int_0^\infty \mathcal{M}_{ik} U_k \bar{U}_i \rho(z) dz \\ &= \int_0^\infty c_{ijkl}(z) \Phi_{ij}(z) \overline{\Phi_{kl}(z)} dz \geq \sigma \sum_{i,k=1}^3 |\Phi_{ik}|^2,\end{aligned}$$

где σ есть некоторая положительная константа. Здесь мы также использовали обозначения

$$\Phi_{i\alpha} = U_i t_\alpha, \quad \Phi_{i3} = -i \frac{\partial U_i}{\partial z'}.$$

Это равенство получается интегрированием по частям и неотрицательность есть следствие положительной определенности свободной энергии упругой среды. В частности, скорость $c_R(\phi)$, если существует релеевская волна, удовлетворяет неравенству $c_R(\phi) > 0$. □

§3. Элементарные волны

Для однородной среды или в общем случае при $z > z_0$ и $v > 0$ все поверхностные волны представляются в виде линейной комбинации элементарных волн

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{P}(z) \exp\{-i\epsilon^{-1}(t - [(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \gamma z]/v)\}. \tag{9}$$

Здесь $\mathbf{P}(z)$ – это векторный многочлен от z, $\mathbf{t} = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$,

$$\mathbf{P}(z) = \mathbf{X}z^m + \mathbf{X}^1 z^{m-1} + \dots \mathbf{X}^m,$$

$\mathbf{X} = \mathbf{X}^0$, $0 \leq m \leq 2$ и $\Im\gamma > 0$.

Подстановка (9) в уравнение (6) приводит к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$M(\gamma)\mathbf{P} - i\kappa \frac{dM(\gamma)}{d\gamma}\frac{d\mathbf{P}(z)}{dz} - \frac{1}{2}\kappa^2 \frac{d^2M(\gamma)}{d\gamma^2}\frac{d^2\mathbf{P}(z)}{dz^2} = v^2\mathbf{P}. \tag{10}$$

Здесь матрица $M(\gamma)$ имеет вид

$$M(\gamma) = A\gamma^2 + B\gamma + C, \tag{11}$$

где A, B и C – это вещественные симметричные матрицы

$$A_{ik} = \rho^{-1}c_{i3k3},\ B_{ik} = \rho^{-1}(c_{i3k\alpha} + c_{i\alpha k3})t_\alpha,\ C_{ik} = \rho^{-1}c_{i\alpha k\beta}t_\alpha t_\beta. \tag{12}$$

Это уравнение может быть переписано как набор уравнений при различных степенях z

$$\begin{array}{lcll} (M(\gamma) - v^2I)\mathbf{X} & = & 0 & \\ (M(\gamma) - v^2I)\mathbf{X}^1 & = & i\kappa m\frac{dM(\gamma)}{d\gamma}\mathbf{X}, & m = 1, 2 \\ (M(\gamma) - v^2I)\mathbf{X}^2 & = & i\kappa\frac{dM(\gamma)}{d\gamma}\mathbf{X}^1 + \kappa^2\frac{d^2M(\gamma)}{d\gamma^2}\mathbf{X}^0, & m = 2. \end{array} \tag{13}$$

Иногда удобно преобразовать матрицу M к простейшему виду. Так как A – это положительно определенная матрица, то существует вещественная матрица D, $\det D \neq 0$, такая что $A = D^tD$, $B = D^t\Theta D$, $C = D^tRD$ с вещественной симметричной матрицей R и $\Theta = \mathrm{diag}\,[\theta_1, \theta_2.\theta_3]$. Сделав линейное преобразование $\mathbf{X} \to D\mathbf{X}$. мы придем к уравнениям (10), (13) с матрицей

$$M = \gamma^2 I + \gamma\Theta + R.$$

Чтобы получить ненулевое решение уравнений (10), мы сначала должны удовлетворить уравнению (13), так что

$$\det(M(\gamma) - v^2I) = \det(M(\gamma;\phi) - v^2I) = 0. \tag{14}$$

Левая часть этого уравнения является многочленом шестого порядка по γ с вещественными коэффициентами, зависящими от направления $\mathbf{t}$, и скорости $v > 0$.

Это уравнение имеет следующие свойства:

1. Имеется шесть непрерывных комплекснозначных функций $\gamma^I = \gamma^I(\phi, v)$, $I = 1, \dots, 6$, которые являются корнями уравнения (14) для любого $0 \le \phi < 2\pi$, $v > 0$.

2. Если для параметров $\phi = \phi_0$, $v = v_0$, $I = I_0$, $\gamma^{I_0}(\phi_0, v_0)$ есть компексснозначный корень уравнения (14), тогда есть индекс I_1, такой что $\gamma^{I_1}(\phi_0, v_0) = \overline{\gamma^{I_0}(\phi_0, v_0)}$ тоже является корнем этого уравнения. Более того, соответствующие коэффициенты многочленов $\mathbf{P}^I$ соотносятся как $[\mathbf{X}(\phi_0, v_0)]^{I_1} = \overline{[\mathbf{X}(\phi_0, v_0)]^{I_0}}$ и $([\mathbf{X}^l(\phi_0, v_0))]^{I_1} = (-1)^l \overline{[(\mathbf{X}^l(\phi_0, v_0))]^{I_0}}$.

3. Для фиксированного ϕ_0 существует $v_*(\phi_0) > 0$, что все $\gamma^I(\phi, v) \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ для любого $I = 1, \dots, 6$, $v < v_*(\phi_0)$. Функция $v_*(\phi)$ является непрерывной функцией ϕ.

4. Для $v > v_*(\phi)$ имеется, по крайней мере, два вещественных корня γ уравнения (14).

Свойства 1 и 2 совершенно элементарны, но свойства 3 и 4 нуждаются в комментариях.

Пусть $h^I(\nu)$, $I = 1, 2, 3$, $\nu = (\cos\phi\cos\psi, \sin\phi\cos\psi, \sin\psi)$ являются значениями функций, описывающих поверхности медленности анизотропной упругой среды в направлении ν, т. е. положительные корни уравнения

$$\det\left[\rho_0^{-1} c^0_{ijkl}\nu_j\nu_l - h^{-2}\delta_{ik}\right] = 0,$$

тогда

$$v_*(\phi) = 1/\sup_I \sup_\psi (h^I(\phi) * \cos\psi). \tag{15}$$

Очевидно, что не существует плоских волн в направлении ν для любого ψ с проекцией на плоскость $z = 0$, которые распространяются со скоростью $v < v_*(\phi)$. С другой стороны, такие волны существуют для любой скорости $v \ge v_*(\phi)$.

Скорость $v_*(\phi)$ играет важную роль во всех исследованиях, относящихся к релеевским волнам. В самом деле для любой скорости $v < v_*(\phi)$ имеется три корня $\gamma^I(\phi, v)$, $I = 1, 2, 3$, не обязательно различных, для которых выполнено $\Im\gamma^I(\phi, v) > 0$. Имеется также три многочлена $\mathbf{P}^I(\phi, v)$, $0 \le m^I \le 2$ таких, что соответствующие элементарные волны удовлетворяют уравнению (10).

Пример 1. Пусть $\theta_2 = 0$, $\theta_3 = -\theta_1 = -2$ и R имеет вид

$$R = \begin{pmatrix} 3, & 0, & 2\sqrt{2} \\ 0, & 1, & 0 \\ 2\sqrt{2}, & 0, & 3 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

В этом случае уравнение $\det M(\gamma) = 0$ имеет два корня $\gamma_0 = i$ и $\bar{\gamma}_0 = -i$ кратности 3. Имеется два собственных вектора, соответствующих собственному значению 0 у матрицы $M(\gamma_0)$: $\mathbf{X} = (0,1,0)^t$ и $\mathbf{X} = (-\sqrt{2}, 0, (1+i))^t$. В последнем случае m=1 и $\mathbf{X}^1 = i\kappa(-\sqrt{2}, 0, 0)^t$, так что в этом примере есть элементарная волна вида (9) с многочленом степени 1 по z.

Пример 2. Пусть $\Theta = \operatorname{diag}[\theta, 0, -\theta]$, $(R - v^2 I)_{ik} = r_{ik}$, $r_{13} = 0$, $r_{11} = r_{33} = \theta^2$, $r_{22} = 3 - \theta^2$, $r_{12} = r_{23} = b = \sqrt{(3(\theta^2-1)/2}$, и $\theta = \sqrt{2\cos(2\pi/9)}$. Тогда мы имеем случай $m = 2$, $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3$, $\mathbf{X} = (1/a, -1/b, 1/\bar{a})^t$, $\mathbf{X}^1 = 2i\kappa(d/a^2, 0, -\bar{d}/\bar{a}^2)^t$, $\mathbf{X}^2 = 2\kappa^2((a-d^2)/a^3$, 0, $(\bar{a}-\bar{d}^2)/\bar{a}^3)^t$, $a = (\theta^2 - 1) + \theta i$, $d = \theta + 2i$.

Пример 3. Пусть $\Theta = \operatorname{diag}[\theta, 0, -\theta]$, $r_{11} = r_{33} = r$, $r_{22} = \theta^2 + 4 - 2r$, $r_{13} = x$, $r_{12} = \sqrt{-(q + x^2)/2}$, где x – решение уравнения

$$x^3 + px^2 + qx + s = 0, \tag{17}$$

где $p = 4 + \theta^2 - 3r$, $q = 3r^2 - 4r(2+\theta^2) + (4+\theta^2)\theta^2 + 5$, $s = -r^2(4 + \theta^2 - 2r) - qr + 2$. Если $-pq + s \geq 0$ и $q < 0$, тогда мы имеем $\gamma_1 = i$, $m = 1$, $\gamma_2 = \sqrt{2}i$, $m_2 = 0$, $\mathbf{X} = (-r_{12}(\bar{b} - x), \Delta, -r_{12}(b - x))^t$, $\mathbf{X}^1 = i\kappa(-r_{12}(mx + \bar{m}\bar{b})/\Delta, 0, r_{12}(mb + \bar{m}x)/\Delta)^t$, $\mathbf{X}^2 = (-r_{12}(\bar{a} - x)$, δ, $-r_{12}(a - x))^t$, где $a = (r-2) + \sqrt{2}i\theta$, $b = (r-1) + i\theta$, $d = \theta + 2i$, $\Delta = |b|^2 - x^2$, $\delta = |a|^2 - x^2$, $m = \bar{d}(b - x)$.

Пример 4. Рассмотрим пример 3 для малых $0 < \theta << 1$. Тогда имеется анизотропная упругая среда с линейно зависимыми векторами $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}^1$, $\mathbf{X}^2$. Параметры r и x выражаются через θ посредством асимптотических рядов по θ: $r = 1 + \theta(\sqrt{5} - 1)/2 + O(\theta^2)$, $x = \theta(\sqrt{5} + 1)/2 + O(\theta^2)$.

Как видно из этих примеров, в анизотропной среде могут быть элементарные волны с полиномиальными множителями. Более того, иногда полный набор поверхностных волн при фиксированном z может не образовывать базис в $\mathbb{C}^3$ (пример 4).

Замечание 1. В множестве всех упругих сред подмножество сред. где есть элементарные волны с полиномиальными множителями, имеет codim $=4$, потому что для этого нужно удовлетворить следующим свойствам: 1) Корни γ имеют кратность 2 (два уравнения), 2) Имеется присоединенный вектор для $(M')^{-1}M(\gamma)$ (два уравнения).

§4. Линейная независимость элементарных волн

Пусть $\mathbf{P}^I(z)$, $I=1,2,3$. Множество многочленов, соответствующих экспоненциально убывающим волнам. Когда мы можем утверждать, что $\mathbf{P}^I(z_0)$, $I=1,2,3$, для этих волн образуют базис в $\mathbb{C}^3$ для $z>z_0$?

Лемма 2. *Пусть $0<v<v_*(\phi)$ и нет элементарных волн с линейными множителями $\mathbf{P}(z)$ в этой анизотропной упругой среде. Тогда имеется три линейно независимых решения уравнений*

$$M(\gamma^s,v)\mathbf{X}^s=0,\quad M(\gamma,v)=M(\gamma)-v^2I,\quad \Im\gamma^s>0,\quad s=1,2,3.$$

Доказательство. Сначала мы докажем, что если $\gamma^1\neq\gamma^2$ тогда $\mathbf{X}^1$ и $\mathbf{X}^2$ линейно независимы. В самом деле, пусть имеются константы d_1 и d_2, такие что $d_1\mathbf{X}^1+d_2\mathbf{X}^2=0$. Применим $M(\gamma^1)$ к левой части этого равенства. Мы получим, что

$$\begin{aligned}0=M(\gamma^1,v)\mathbf{X}^2&=(M(\gamma^1,v)-M(\gamma^2,v))\mathbf{X}^2\\&=(\gamma^1-\gamma^2)((\gamma^1+\gamma^2)I+\Theta)\mathbf{X}^2.\end{aligned}\tag{18}$$

Это не возможно, так как $\Im(\gamma^1+\gamma^2)>0$ и $\theta_s\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим теперь случай трех векторов $\mathbf{X}^s$. Покажем, что эти вектора линейно независимы. Согласно предыдущему утверждению это доказано если какое-то γ^s имеет кратность больше, чем 1. Рассмотрим случай, когда $\gamma^s\neq\gamma^\sigma$ для $s\neq\sigma$, $s,\sigma=1,2,3$. Проанализируем следующие неравенства

$$\begin{aligned}0=(M(\gamma^s,v)\mathbf{X}^s,\mathbf{X}^\sigma)&=(\mathbf{X}^s,M(\bar\gamma^s,v)\mathbf{X}^\sigma)\\&=(\mathbf{X}^s,[M(\bar\gamma^s,v)-M(\gamma^\sigma,v)]\mathbf{X}^\sigma)\\&=(\gamma^s-\bar\gamma^\sigma)(\mathbf{X}^s,[(\bar\gamma^s+\gamma^\sigma)I+\Theta]\mathbf{X}^\sigma).\end{aligned}$$

Из этих неравенств мы получаем, что

$$(\mathbf{X}^s,\mathbf{X}^\sigma)(\gamma^s+\bar\gamma^\sigma)+(\Theta\mathbf{X}^s,\mathbf{X}^\sigma)=0.\tag{19}$$

Пусть теперь $\mathbf{X}^3=d_1\mathbf{X}^1+d_2\mathbf{X}^2$, $d_1\neq0$, $d_2\neq0$, а также $\mathbf{X}^1$ и $\mathbf{X}^2$ – линейно независимы. Вычисляя $0=M(\gamma^3)\mathbf{X}^3$ через $\mathbf{X}^1$ и $\mathbf{X}^2$, умножая полученные тождества на $\mathbf{X}^1$ и $\mathbf{X}^2$, затем, используя тождества (19), мы придем к тождествам

$$\begin{array}{l} d_1(\mathbf{X}^1,\mathbf{X}^1)(\gamma^3-\gamma^1)(\gamma^3-\bar\gamma^1)+d_2(\mathbf{X}^2,\mathbf{X}^1)(\gamma^3-\gamma^2)(\gamma^3-\bar\gamma^1)=0,\\ d_1(\mathbf{X}^1,\mathbf{X}^2)(\gamma^3-\gamma^1)(\gamma^3-\bar\gamma^2)+d_2(\mathbf{X}^2,\mathbf{X}^2)(\gamma^3-\gamma^2)(\gamma^3-\bar\gamma^2)=0. \end{array} \quad (20)$$

Из этой системы тождеств следует, что $d_1(\gamma^3-\gamma^1)=0$ и $d_2(\gamma^3-\gamma^2)=0$. Таким образом, $d_1=d_2=0$. Утверждение леммы доказано. $\square$

Пример 5. В изотропном случае для любого направления распространения (мы можем взять $\phi=0$) и любой $o<v<v_*(\phi)=b=\sqrt{\mu/\rho}$ матрица $M(\gamma,v)=M(\gamma)-v^2I$ имеет вид

$$M(\gamma,v)=\begin{pmatrix} a^2+b^2\gamma^2-v^2, & 0, & (a^2-b^2)\gamma\\ 0, & b^2(1+\gamma^2)-v^2, & 0\\ (a^2-b^2)\gamma, & 0, & a^2\gamma^2+b^2-v^2\end{pmatrix}. \quad (21)$$

Характеристическое уравнение $\det(M(\gamma)-v^2I)=0$ имеет три корня: $\gamma^1=i\sqrt{1-v^2/a^2}$, $\gamma^2=\gamma^3=i\sqrt{1-v^2/b^2}$. Соответствующие вектора $\mathbf{X}^1=(1,0,\gamma^3)^t$, $\mathbf{X}^2=(0,1,0)^t$, $\mathbf{X}^3=(-\gamma^2,0,1)^t$. Тогда для любой изотропной среды набор векторов $\mathbf{X}^I$, $I=1,2,3$, $0<v<b$, образует базис.

§5. Импеданс

Вернемся к оператору импеданса. Рассмотрим множество всех однородных анизотропных упругих сред $\Omega=\{\rho^0,c^0_{ijkl}\}$ и ϕ и v есть возможное направление распространения и скорость поверхностной волны вида (9). Множество Ω – это открытое подмножество $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{21}$. Обозначим как $\Pi=(\rho,c_{ijkl},\phi,v):(\rho,c_{ijkl})\in\Omega,\phi\in(0,2\pi),v\in(0,v_*(\phi))$ открытое множество параметров для задачи распространения поверхностных упругих волн. Очевидно, что множество Π_{is}, которое содержит все задачи для изотропных упругих сред является подмножеством Π.

Пусть $\mathbf{D}\in\mathbb{C}^3$ - комплексный вектор. Рассмотрим следующую задачу для поверхностной волны в однородной анизотропной упругой среде из Π

$$\mathcal{M}(z',\frac{\partial}{\partial z'};\phi)\mathbf{U}-v^2\mathbf{U}=0,\quad \mathbf{U}\in W_2^2([0,\infty),\rho),\quad \mathbf{U}\big|_{z=z_0}=\mathbf{D}. \quad (22)$$

Мы назовем эту граничную задачу корректно определенной, если она имеет единственное решение. Множество всех корректно определенных задач обозначим как Π_0, причем Π_0 – открытое подмножество Π. Из замечания 1 следует:

Лемма 3. *Множество* Π_0 *плотно в* Π.

Замечание 2. $\Pi_{is} \subset \Pi_0$.

Пусть $(\rho, c_{ijkl}, \phi, v) \in \Pi_0$. Тогда импеданс определен на $\mathbb{C}^3$. В частности, он определен на $\mathbb{C}^3$ для любой изотропной упругой среды.

Пример 6. Для изотропной упругой среды матрица импеданса легко вычисляется

$$Z = \frac{\rho\kappa}{1-\sigma_1\sigma_3} \tag{23}$$

$$\times \begin{pmatrix} -\sigma_1 v^2, & 0, & -ib^2(2\sigma_1\sigma_3 - (1+\sigma_3^2)) \\ 0, & -b^2\sigma_3(1-\sigma_1\sigma_3), & 0 \\ ib^2(2\sigma_1\sigma_3 - (1+\sigma_3^2)), & 0, & -\sigma_3 v^2 \end{pmatrix},$$

где $\sigma_1 = \sqrt{1 - v^2/a^2}$, $\sigma_2 = \sigma_3 = \sqrt{1 - v^2/b^2}$.

Теорема 1. *Пусть* (ρ, c_{ijkl}) *– однородная анизотропная упругая среда. Пусть в этой среде не существуют поверхностные волны релеевского типа с полиномиальными множителями вблизи плоскости* $z = 0$ *в направлении* $t = (\cos\phi, \sin\phi, 0)$ *со скоростью* v, $0 < v < v_*(\phi)$. *Тогда оператор импеданса* $Z = Z(v)$ *является самосопряженным оператором на* $\mathbb{C}^3$.

Доказательство. Теорема следует из результатов лемм 1 и 2. □

§6. Функция Лагранжа, энергия и импеданс

Билинейные формы плотностей кинетической и потенциальной (свободной) энергии в анизотропной упругой среде могут быть записаны в виде:

$$\mathcal{T}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}\rho\frac{\partial u_i}{\partial t}, \quad \mathcal{U}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2}c_{ijkl}\frac{\partial u_i}{\partial x^j}\frac{\partial \bar{v}_k}{\partial x^l}.$$

Для поверхностных волн вида (5) плотности энергии имеют вид:

$$\mathcal{T}(\mathbf{U}, \mathbf{V}) = \frac{1}{2}\rho\epsilon^{-2}U_i\bar{V}_i, \tag{24}$$

$$\mathcal{U}(\mathbf{U},\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\kappa^{-2}c_{i\alpha k\beta}(z)t_\alpha t_\beta U_i \bar{V}_k$$

$$-\frac{1}{2}i\kappa^{-1}t_\alpha\left[c_{i3k\alpha}(z)\frac{\partial U_i}{\partial z}\bar{V}_k + c_{i\alpha k3}(z)U_i\frac{\partial \bar{V}_k}{\partial z}\right] + \frac{1}{2}c_{i3k3}(z)\frac{\partial U_i}{\partial z}\frac{\partial \bar{V}_k}{\partial z}. \quad (25)$$

Среднее значение вдоль вертикальной линии $z > 0$ билинейной формы, соответсвующей функции Лагранжа, задается выражением

$$L(\mathbf{U},\mathbf{V}) = \int\limits_0^\infty (\mathcal{T}(\mathbf{U},\mathbf{V}) - \mathcal{U}(\mathbf{U},\mathbf{V}))dz. \quad (26)$$

Таким же образом могут быть определены средние значения энергетических форм. Заметим, что $\mathbf{U}$, $\mathbf{V}$ соответствуют одному направлению $\mathbf{t}$ и одной скорости.

Для любых решений $\mathbf{U}$ и $\mathbf{V}$ задачи (6) имеется соотношение между билинейной формой функции Лагранжа и граничной формой

$$L(\mathbf{U},\mathbf{V}) = \frac{1}{2}\kappa^{-1}\big(B\mathbf{U},\mathbf{V}\big|_{z=0}\big) = \frac{1}{2}\kappa^{-1}\big(\mathbf{U}\big|_{z=0}, B\mathbf{V}\big). \quad (27)$$

Доказательство. Доказательство основывается на интегрировании по частям среднего значения билинейной формы Лагранжа $L(\mathbf{U},\mathbf{V})$ и использования определения граничного оператора. □

Лемма 4. *Если* $\mathbf{U}_1$ *и* $\mathbf{U}_2$ *решают задачи* (22) *с начальными данными* $\mathbf{D}_1$ *и* $\mathbf{D}_2$*, тогда мы имеем*

$$(Z\mathbf{D}_1, \mathbf{D}_2) = 2\kappa L(\mathbf{U}_1, \mathbf{U}_2) \quad (28)$$

§7. Некоторые свойства импеданса

Основное свойство оператора импеданса может быть выражено следующим образом.

Теорема 2. *Пусть* $(\rho, c_{ijkl}, \phi, v) \in \Pi_0$ *и* $0 < v < v_*(\phi)$ *удовлетворяют одному из уравнений* $\lambda^I(v,\phi) = 0$*, где* $\lambda^I(v,\phi)$, $I = 1,2,3$*, собственные значения оператора* $Z(\phi, v)$*. Тогда* v *является скоростью волны релея вида* (5), $\mathbf{U}(z)$ *представляется в виде:*

$$\mathbf{U}(z) = \sum_{I=1}^{3}\mathbf{X}^I \exp\{i\kappa^{-1}\gamma^I(v)z\}$$

и $\gamma^I(v)$ *есть решения уравнения* (14), $\Im\gamma^I(v) > 0$.

Доказательство. Доказательство следует из определения релеевских волн, множества Π и скоростиа $v_*(\phi)$.

Из этой теоремы следует, что построение релеевских волн сводится к нахождению значений v для которых одно из собственных значений импеданса $Z(v)$ равно нулю. □

Лемма 5. *Все собственные значения импеданса Z отрицательны для малых v.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{U}^I(z)$ есть решение уравнения (6) со скоростью v и начальными данными $\mathbf{D}$, $\|\mathbf{D}\| = 1$, который является собственным вектором $Z(v)$ соответствующим собственному значению $\lambda^I(v)$. Тогда, согласно формуле (27)

$$\lambda^I(v) = 2\kappa L(\mathbf{U}^I, \mathbf{U}^I).$$

Это означает, что среднее значение кинетической энергии по формуле (24) приблизительно равно $C_T v$ для малых v, $C_T > 0$. С другой стороны, среднее значение потенциальной энергии приблизительно равно $C_V v^{-1}$ для малых v. Тогда $\lambda^I(v)$ отрицательно для малых v. Более того, производная собственного значения по v положительна для таких v. □

Лемма 6. *Все собственные значения импеданса Z являются растущими функциями при малых v.*

Пример 7. Для изотропного случая с импедансом, задаваемым формулой (23) собственные значения $Z(v)$ могут быть легко вычислены

$$\Lambda_2 = -\rho b^2 \sigma_3,$$

$$\Lambda_{1,3} = \widetilde{\Lambda}_{1,3}\left(\frac{\rho}{1-\sigma_1\sigma_3}\right), \tag{29}$$

где

$$\widetilde{\Lambda}_{1,3} = \Lambda^{\pm} = -\frac{\sigma_1+\sigma_3}{2}v^2 \pm \sqrt{\frac{(\sigma_1-\sigma_3)^2}{4}v^4 + b^4(2\sigma_1\sigma_3 - (1+\sigma_3^2))^2}. \tag{30}$$

Легко видеть, что $\Lambda_2 \neq 0$ и $\Lambda_3 \neq 0$ для всех v, $0 < v <= v_* = b$. Элементарные вычисления показывают, что $\Lambda_2, 3$ возрастающие функции и $\Lambda_1 = 0$ в том и только том случае, если $v = c_R$, где c_R – это стандартная скорость волны Релея изотропной среды, т.е. корень уравнения

$$\frac{4}{c_R^2}\sqrt{\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{a^2}}\,\sqrt{\frac{1}{c_R^2}-\frac{1}{b^2}}-\left(\frac{2}{c_R^2}-\frac{1}{b^2}\right)^2=0. \tag{31}$$

Заметим, что $\Lambda_1'(c_R)>0$. Нетрудно видеть также, что при $v=b$ имеется обобщенная волна Релея, которая совпадает с плоской волной, соответствующей собственному вектору $(0,1,0)$ импеданса $Z(b)$. Собственное число $\Lambda_2(b)=0$.

§8. Возмущение изотропной среды

Рассмотрим теперь анизотропную упругую среду с параметрами $(\rho, c_{ijkl})\in\Pi_0$, которая близка к изотропной среде с параметрами (ρ_0, c^0_{ijkl}),

$$\rho=\rho_0,\quad c_{ijkl}=c^0_{ijkl}+\delta c^1_{ijkl}, \tag{32}$$

где (ρ_0, c^0_{ijkl}) параметры изотропной упругой среды. Вследствие непрерывности собственных значений $Z(v)$ по v и параметров упругой среды, имеется единственная релеевская волна, которая соответствует скорости, близкой к c_R в этой анизотропной упругой среде. Некоторые вычисления сделаны, например, в [3]. Проблема в том. что может появиться дополнительная релеевская волна со скоростью, близкой к скорости обобщенной волны релея изотропной упругой среды. Ниже мы докажем, что такой волны нет.

Теорема 3. *Пусть (ρ, c_{ijkl}) – анизотропная упругая среда близкая к изотропной среде. Тогда существует единственная релеевская волна, которая близка к релеевской волне изотропной упругой среды.*

Доказательство. Нам нужно доказать, что в этом случае нет релеевской волны со скоростью близкой к b.

Шаг 1. Прежде всего, используя формулу (15), найдем $v_*(\phi)$. Заметим, что фактически мы должны вычислить эту скорость только для $\phi=0$, поскольку начальная среда изотропна и мы используем общее возмущение.

Скорости плоских волн в анизотропной среде есть решения уравнения $\det M(\psi,v)=0$, где матрица $M(\psi,v)$ дана формулой

$$M_{ik}(\psi,v)=\rho^{-1}\left[\lambda\delta_{ij}\delta_{kl}+\mu\left(\delta_{ik}\delta_{jl}+\delta_{il}\delta_{jk}\right)\right]t_jt_l-v^2(\psi)\delta_{ik}+m_{ik}(\psi)\delta,$$
$$m_{ik}(\psi)=\rho^{-1}\left[c^1_{i1k1}\cos^2\psi+(c_{i1k3}+c_{i3k1})cos\psi\sin\psi+c_{i3k3}\sin^2\psi\right].$$

Вводя новую переменную $y = b^2 - v^2$ мы можем переписать уравнение для y в виде:

$$\det M(\psi, v) = y^3 + P(\psi)y^2 + Q(\psi)y + R(\psi) = 0, \tag{33}$$

где

$$\begin{aligned} P(\psi) &= (a^2 - b^2)P_0(\psi) + P_1(\psi)\delta, \\ Q(\psi) &= (a^2 - b^2)Q_1(\psi)\delta + Q_2(\psi)\delta^2, \\ R(\psi) &= (a^2 - b^2)R_2(\psi)\delta^2 + R_3(\psi)\delta^3 \end{aligned} \tag{34}$$

и

$$\begin{gathered} P_0(\psi) = 1, \\ P_1(\psi) = \operatorname{tr} m = m_{11} + m_{22} + m_{33}, \\ Q_1(\psi) = m_{11}\sin^2\psi + m_{33}\cos^2\psi + m_{22} - 2m_{13} cos\psi \sin\psi, \\ Q_2(\psi) = I_2(m) = m_{22}m_{33} + m_{11}m_{33} + m_{11}m_{22} - m_{23}^2 - m_{13}^2 - m_{12}^2, \\ R_2(\psi) = (m_{11}m_{22} - m_{12}^2)\sin^2\psi + (m_{22}m_{33} - m_{23}^2)\cos^2\psi \\ +2(m_{12}m_{23} - m_{22}m_{13})\cos\psi\sin\psi, \\ R_3(\psi) = \det m. \end{gathered} \tag{35}$$

Возмущение для продольной волны может быть записано в виде степенного ряда

$$y = Y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n \delta^n, \quad y_0 = -(a^2 - b^2), \quad y_1 = Q_1 - P_1,$$

$$y_2 = [Q_1^2 - P_1Q_1 + q_2 - R_2]/(a^2 - b^2), \quad y_n = S_n(y_1, y_2, \dots y_{n-1}), n \geq 3,$$

и y_n – это тригонометрические многочлены по ψ.

Нахождение возмущения для скоростей возмущенных поперечных волн несколько труднее. Прежде всего мы построим дифференциальное уравнение второго порядка для соответствующего y

$$y^2 + \widetilde{P}(\psi)y + \widetilde{Q}(\psi) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} \widetilde{P}(\psi) &= Q_1(\psi)\delta + Y_2, \\ \widetilde{Q}(\psi) &= R_2(\psi)\delta^2 + Y_2(Y_1 + Q_1\delta) - (a^2 - b^2)Y_3 = -R(\psi)/Y, \end{aligned} \tag{36}$$

и

$$Y_N = \sum_{n=N}^{\infty} y_n \delta^n.$$

Таким образом, выражения для возмущенного y имеют вид:

$$y^I = -\frac{1}{2}\left[\widetilde{P}(\psi) \pm \sqrt{\widetilde{P}^2(\psi) - 4\widetilde{Q}(\psi)}\right], \quad I = 2,3.$$

Главный член выражения по δ может быть написан как

$$y^I \asymp -\frac{1}{2}\left[Q_1(\psi) \pm \sqrt{Q_1^2(\psi) - 4R_2(\psi)}\right]\delta, \quad I = 2,3,$$

где

$$\begin{aligned} Q_1^2 - 4R_2 &= 4(m_{12}\sin\psi - m_{23})\cos\psi)^2 \\ &\quad + (m_{11}\sin^2\psi + m_{33}\cos^2\psi - m_{22} - 2m_{13}\cos\psi\sin\psi)^2 \end{aligned} \tag{37}$$

– неотрицательная величина.

Лемма 7. *Пусть* $c^1_{1213} \neq 0$ *или* $c^1_{1212} \neq c^1_{1313}$. *Тогда*

$$Q_1^2(0) - 4R_2(0) = \frac{1}{\rho^2}\left[4(c^1_{1213})^2 + \left((c^1_{1212} - c^1_{1313}\right)^2\right] \neq 0.$$

В условиях леммы 7 простые вычисления показывают, что направление ψ^*, в котором имеет место скорость, равная $v_*(0)$ есть $O(\delta)$. Таким образом,

$$v_*(0) \asymp b - \sup_{I=2,3}\frac{1}{2}y^I(\psi^*)/b \asymp b - \sup_{I=2,3}\frac{1}{2}y^I(0)/b.$$

Вычисляя выражения для $y^I(0)$, мы получим окончательное выражение для $v_*(0)$

$$v_*(0) \asymp b + \frac{\delta}{4b\rho}\left[(c^1_{1212} + c^1_{1313}) - \sqrt{(c^1_{1212} - c^1_{1313})^2 + 4(c^1_{1213})^2}\right]. \tag{38}$$

Замечание 2. Без потери общности мы можем предположить, что, например, $c^1_{1212} = 0$, так что случай, когда условия теоремы 3 и леммы 7 не выполняются ($c^1_{1212} = c^1_{1313} = c^1_{1213} = 0$) имеет $\operatorname{codim} = 2$ в пространстве всех упругих сред близких к изотропной. Следовательно, он может быть исследован по непрерывности.

Замечание 3. Скорости упругих волн не разделяются в том и только том случае, если $c^1_{1111} = c^1_{3333} = c^1_{1133} = c^1_{1212} = c^1_{1313} = c^1_{2323} = c^1_{1213} = c^1_{1223} = c^1_{1323} = c^1_{1123} = c^1_{1233} = c^1_{1112} = c^1_{1113} = c^1_{1333} = c^1_{2333} = 0$. В этом случае скорости волн, близких к поперечным, равны b для всех ψ, так что $v_* = b$. В противоположном случае эти скорости могут совпадать лишь в конечном числе углов ψ.

Шаг 2. Теперь мы можем вычислить определитель импеданса $Z(v)$ для возмущенной среды в случае $v = b+\alpha\delta$, где α стремится к $(v_*-b)/\delta$ слева. Заметим, что возмущенные элементарные волны и соответствующие нормальные напряжения на границе имеют разные представления для продольных и поперечных волн. Возмущение продольной волны представляется рядом по степеням δ. Напротив, возмущение поперечных волн разлагается в ряды по степеням $\delta^{1/2}$. Тогда возмущение $Z(v)$ для скоростей, близких к b есть матричный ряд по степеням $\delta^{1/2}$

$$Z = \rho \begin{pmatrix} -\sigma_0 b^2 + z^1_{11}\delta^{1/2}, & z^1_{12}\delta^{1/2}, & ib^2 + z^1_{13}\delta^{1/2} \\ z^1_{21}\delta^{1/2}, & z^1_{22}\delta^{1/2}, & z^1_{23}\delta^{1/2} \\ -ib^2 + z^1_{31}\delta^{1/2}, & z^1_{32}\delta^{1/2}, & z^1_{33}\delta^{1/2} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Следовательно, определитель возмущенного импеданса будет

$$\det Z(b+\alpha\delta) = -\rho^3 z^1_{22}|z^0_{13}|^2\delta^{1/2} + O(\delta) = -z^1_{22}\rho^3 b^4\delta^{1/2} + O(\delta). \tag{40}$$

Таким образом, нам осталось вычислить только z^1_{22}. Эта компонента зависит только от компонент векторов смещения, относящимся к элементарным волнам с точностью до $O(\delta^{1/2})$. Мы будем искать элементарные волны в виде:

$$\mathbf{u}^I(\mathbf{x},t) = \mathbf{X}^I \exp\{= i\epsilon^{-1}(t-(x+\gamma^I z)/v)\}, \tag{41}$$

где $v = b + \alpha\delta^{1/2}$

$$\gamma^1 = i\sigma_0 + O(\delta), \quad \gamma^I = \gamma^I_{(1)}\delta^{1/2} + O(\delta), \quad I = 2,3. \tag{42}$$

Для волны, близкой к продольной волне, $\mathbf{X}^1$ есть $(1,0,i\sigma_0)^t + O(\delta)$. Для волн, близких к поперечным волнам ($I = 2,3$),

$$\mathbf{X}^I = (m^I_2\mathbf{e}_2 + m^I_3\mathbf{e}_3) + \mathbf{X}^I_{(1)}\delta^{1/2} + \cdots . \tag{43}$$

Подстановка выражений для $I = 2,3$ в уравнения анизотропной теории упругости приводит к последовательности уравнений при различных степенях $\delta^{1/2}$. Нулевое приближение очевидно выполняется. Компоненты при $i = 1$ первого приближения (по $\delta^{1/2}$) дают нам первое приближение первой компоненты вектора смещения

$$\mathbf{X}^I_{(1)1} = -\gamma^I_{(1)} m^I_3. \tag{44}$$

Другие компоненты уравнений первого приближения удовлетворяются автоматически.

Первые компоненты уравнений второго приближения дают нам выражения для $X^I_{(2)1}$. Другие два уравнения второго приближения, используя (43), могут быть преобразованы к двум парам однородных уравнений по отношению к m^I_2 и m^I_3.

$$\begin{aligned}&[b^2(\gamma^I_{(1)})^2+\rho^{-1}c^1_{1212}-2b\alpha]m^I_2+\rho^{-1}c^1_{1213}m^I_3=0\\&\rho^{-1}c^1_{1213}m^I_2+[b^2(\gamma^I_{(1)})^2+\rho^{-1}c^1_{1313}-2b\alpha]m^I_3=0.\end{aligned}\tag{45}$$

Условия их разрешимости приводят к квадратичному уравнению для $y=(\gamma^I_{(1)})^2$. Решая эти уравнения, мы получим

$$y_\pm=\frac{2}{b}\left(\alpha-v_{*\pm}(0)\right),\tag{46}$$

где $v^*_-(0)$ определяется по формуле (38) и $v^*_+(0)$ получается заменой $-$ на $+$ перед корнем в этой формуле. Заметим, что оба выражения для $y_\pm$, отрицательны, согласно неравенству для α. Таким образом, мы можем взять

$$\gamma^2_{(1)}=i\sqrt{|y_+|},\quad \gamma^3_{(1)}=i\sqrt{|y_-|}.\tag{47}$$

Соответствующие собственные вектора с точностью до постоянных n^I, которые мы можем взять произвольными, могут быть записаны, как

$$\begin{aligned}&m^2_2=-\rho^{-1}c^1_{1213}n^2,\\&m^2_3=[b^2(\gamma^I_{(1)})^2+\rho^{-1}c^1_{1212}-2b\alpha]n^2=rn^2\\&m^3_3=-\rho^{-1}c^1_{1213}n^3,\\&m^3_2=[b^2(\gamma^I+(1))^2+\rho^{-1}c^1_{1313}-2b\alpha]n^3=-rn^3\end{aligned}\tag{48}$$

где

$$r=\frac{1}{2\rho}\left\{(c^1_{1212}-c^1_{1313})+\sqrt{(c^1_{1212}-c^1_{1313})^2+4(c^1_{1213})^2}\right\}\tag{49}$$

После вычисления главных членов асимптотических разложений волн, близких к поперечным, мы можем вычислить ZX^I, $I=1,2,3$, и, следовательно, основные члены асимптотического разложения для Z

для скоростей, близких к b могут быть записаны, как $Z = YX^{-1}$,

$$X = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & m_2^2, & m_2^3 \\ i\sigma_0, & m_3^2, & m_3^3 \end{pmatrix} + O(\delta^{1/2}), \tag{50}$$

$$Y = \rho b^2 \begin{pmatrix} -2\sigma_0, & im_3^2, & im_3^3 \\ 0, & ,0, & 0 \\ -i, & 0, & 0 \end{pmatrix} + Y_{(1)}\delta^{1/2} + O(\delta), \tag{51}$$

Нам нужны лишь компоненты $Y_{(1)2i}$ матрицы $Y_{(1)}$. Они задаются выражениями

$$Y_{(1)21} = 0, \quad Y_{(1)2I} = i\rho b^2 m_2^I \gamma_{(1)}^I, \quad i = 2, 3. \tag{52}$$

Объединяя эти формулы, легко найти формулу для z_{22}^1:

$$z_{22}^1 = i\rho b^2 \left(m_2^2 m_3^3 \gamma_{(1)}^2 - m_2^3 m_3^2 \gamma_{(1)}^3 \right) / \left(m_2^2 m_3^3 - m_2^3 m_3^2 \right). \tag{53}$$

Рассматривая эту формулу вместе с формулами (39), (40), мы можем получить основной член асимптотического разложения при $v = b + \alpha\delta$, где α стремится к $(v_* - b)/\delta$ слева

$$\det Z|_{\alpha \to (v_* - b)/\delta} \asymp \rho^3 b^6 \sigma_0 \delta^{1/2} > 0. \tag{54}$$

Это означает, что здесь нет второго корня $\det Z(v)$ или волны Релея для $v \in (0, v_*)$. Лемма доказана. □

Благодарность. Хочу выразить благодарность профессору Chi-Sing Man за привлечение моего интереса к релеевским волнам в анизотропной упругой среде, предварительно напряженной среде и соответствующим обратным задачам.

Литература

1. Chi-Sing Man, W. Y. Lu, *Towards an acoustoelastic theory for measurements of residual stress.* — J. of Elasticity **17** (1982), 159–182.
2. Kazumi Tanumi, Chi-Sing Man, Mojia Huang, Gen Nakamura, *Surface imprdance tensors of textured polycristals.* Academic J. **67(2)** (2002), 131–147.
3. Kazumi Tanuma, Chi-Sing Man, Gen Nakamura, Shengzhang Wang, *Perturbation and dispersion of Rayleigh waves in prestressed anisotropic elastic media.* — Taiwan-Japan Joint Workshop on Inverse Problem. Inst. Math., Academia Sinca, Taipei, 2008.

Kachalov A. P. Rayleigh waves in an anisotropic elastic medium and impedance.

In the paper, the impedance operator, its properties and relationships with the Rayleigh waves in anisotropic media are considered. Zero eigenvalues of the impedance operator determine the Rayleigh waves in the anisotropic media. This property give us a possibility to prove the uniqueness theorem for the Rayleigh wave in any anisotropic medium close to isotropic one.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kachalov@pdmi.ras.ru

Поступило 28 октября 2011 г.