

А. Я. Казаков

ИНТЕГРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ ЭЙЛЕРА И ДЕФОРМИРОВАННОЕ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

§1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство специальных функций математической физики являются решениями линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с полиномиальными коэффициентами – функции Матъе, функции Бесселя, гипергеометрические функции и т.д. В различных приложениях этих функций ключевую роль играет информация о группе монодромии соответствующих дифференциальных уравнений [1]. Эта группа описывает результат аналитического продолжения решений вдоль контуров на комплексной плоскости аргумента. В явном виде эта группа известна для гипергеометрического уравнения и различных его конфлюэнтных форм. Решения этих уравнений могут быть выписаны в интегральной форме и этой информации достаточно для вычисления группы монодромии [2]. Для решений более сложных уравнений класса Гойна не существует интегральных представлений и аналитическое исследование этих функций существенно сложнее. Одна из возможностей в этом направлении – интегральная симметрия Эйлера, которую мы здесь обсудим на примере деформированного гипергеометрического уравнения (ДГУ)

$$\begin{aligned} w''(z) + \left[\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1} - \frac{1}{z-\lambda} \right] w'(z) \\ + \frac{1}{z(z-1)} \left[\frac{\chi}{z-\lambda} + \frac{\sigma}{\lambda(\lambda-1)} \right] w(z) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Это уравнение, как и гипергеометрическое, имеет 3 регулярных особых точки $z = 0, z = 1, z = \infty$, и, вдобавок, ложную особую точку первого порядка при $z = \lambda$. Оно имеет 4 свободных параметра $\alpha, \beta, \lambda, \chi$, величина параметра σ определяется условием: решения не имеют логарифмического поведения в окрестности точки $z = \lambda$. Можно показать,

Ключевые слова: монодромия, матрицы связи, деформированное гипергеометрическое уравнение, интегральное преобразование Эйлера.

что $\sigma = -(\beta\lambda - 2\lambda + \alpha\lambda + 1 + \chi - \alpha)\chi$. Порядок ложной особенности равен 1 в соответствии с вычетом в этой точке коэффициента при $w'(z)$. Это уравнение можно рассматривать как специальный случай уравнения Гойна [3], когда одна из особенностей является ложной, но, как будет показано ниже, с аналитической точки зрения оно "ближе" гипергеометрическому уравнению. В данной работе мы опишем интегральную симметрию Эйлера для этого уравнения и соответствующую симметрию его монодромии. Эти результаты позволяют выписать в явном виде матрицы связи этого уравнения (т.е. получить аналоги формул Куммера) и построить его решения в интегральном виде. Заметим, что решения этого уравнения были ранее получены в [4] в рамках иных подходов.

Напомним некоторые стандартные понятия аналитической теории дифференциальных уравнений [2, 5]. Мы называем решение (1) *нормализованным* в регулярной особой точке $z = z_*$, если его поведение в окрестности этой точки фиксировано соотношением:

$$w(z) \sim 1 \cdot (z - z_*)^\kappa,$$

где κ – характеристический показатель (здесь $z_* = 0$ или $z_* = 1$, для точки $z_* = \infty$ необходима соответствующая замена функции). Уравнение второго порядка (1) имеет 2 характеристических показателя для каждой точки $z_* = 0, 1$. Если $\lambda \neq 0, 1$, один из этих показателей для обеих точек равен 0. Фиксируем пары этих решений в окрестности точек $z_* = 0$ и $z_* = 1$, каждая такая пара – базис в пространстве решений уравнения. Связь между базисами реализует *матрица связи*, с помощью набора этих матриц можно построить группу монодромии уравнения. Вычисление матрицы связи для уравнения (1) является основной целью данной работы. Заметим, что имеется набор элементарных преобразований уравнения, которые сохраняют его вид и только меняют набор параметров. Во-первых, имеются замены переменных, которые переставляют особые точки. Во-вторых, замены функций, которые переставляют между собой решения, голоморфные и ветвящиеся в фиксированной особой точке. Учитывая эти симметрии, следует вычислить лишь один элемент одной из матриц связи – все остальные ее элементы и все другие матрицы связи восстанавливаются с помощью элементарных симметрий. Мы будем вычислять один из элементов матрицы связи, которая описывает разложение функций,

фиксированных в окрестности $z_* = 0$ по базису, фиксированному в окрестности $z_* = 1$.

Основным техническим средством у нас будет интегральная симметрия Эйлера. Она связывает решения гипергеометрических систем и зависит от свободного параметра μ . Редукция такой системы приводит к ДГУ, так что интегральная симметрия для решений систем приводит к интегральной симметрии для решений уравнения. Аналитическое продолжение решений ведет к соответствующей симметрии матриц связи. Выбирая подходящее значение μ , можно избавиться от ложной особой точки и выразить решения ДГУ через решения гипергеометрического уравнения. Эти соображения дают возможность вычислить матрицу связи для уравнения (1). Этот подход обсуждался ранее в [6, 7].

§2. ИНТЕГРАЛЬНАЯ СИММЕТРИЯ ЭЙЛЕРА

Пусть A, B, C – постоянные $m \times m$ -матрицы, $W(z)$ – m -векторзначная функция на комплексной плоскости. Рассмотрим линейную систему уравнений

$$(Az + B)W'(z) = CW(z), \quad (2)$$

такая система называется гипергеометрической [8]. Корни $\det(Az + B)$ и, возможно, бесконечная точка являются регулярными особыми точками этой системы. В окрестности такой точки z_* эта система имеет ветвящееся решение $W(z) \sim (z - z_*)^\kappa W_0$, где κ – соответствующий характеристический показатель, W_0 – подходящий постоянный вектор. Исключая компоненты вектор-функции $W(z)$, можно свести (2) к линейному дифференциальному уравнению m -го порядка. Если $m = 2$ эта редукция приводит к ДГУ (1). Начальная точка наших рассмотрений – следующее утверждение.

Предложение 1. Пусть $V(t)$ будет решением системы

$$(At + B)V'(t) = [C - (\mu + 1)A]V(t), \quad (3)$$

ветвящимся в окрестности регулярной особой точки $t = t_*$ и контур L – двойная петля на комплексной плоскости (контур Похгаммера, см. рис. 1) вокруг точек $t = z$ и $t = t_*$. Тогда $W(z)$, определенная выражением

$$W(z) = \int_L (z - t)^\mu V(t) dt, \quad (4)$$

является решением системы (2), ветвящимся в той же точке $z = t_*$.

Если $t_* = 0$ ($t_* = 1$) мы обозначим соответствующий контур L_0 (L_1 соответственно). Доказательство. Подставляя интеграл из правой

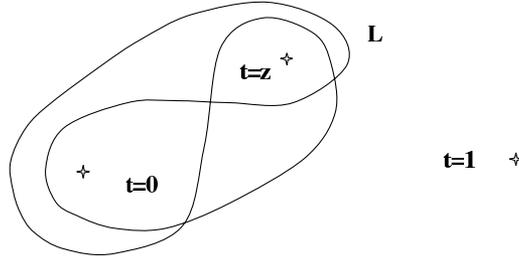


Рис. 1. Контур интегрирования L_0 на комплексной плоскости.

части (4) в равенство $(Az + B)W'(z) - CW(z) = 0$, получаем:

$$\begin{aligned}
 P(z) &= \int_L (z-t)^\mu \left[\mu \frac{Az+B}{z-t} - C \right] V(t) dt \\
 &= \int_L (z-t)^\mu \left[\mu \frac{A(z-t) + Az + B}{z-t} - C \right] V(t) dt \\
 &= \int_L (z-t)^\mu \left[\mu \frac{At+B}{z-t} + (\mu A - C) \right] V(t) dt \\
 &= \int_L \left[-(At+B)V(t) \frac{\partial}{\partial t} (z-t)^\mu + (z-t)^\mu (\mu A - C)V(t) \right] dt.
 \end{aligned}$$

Интегрируя по частям и полагая, что внеинтегральные члены пропадают (это обеспечивается выбором решения $V(t)$ и контура интегрирования), приходим к соотношению:

$$P = \int_L (z-t)^\mu [(At+B)V'(t) + ((\mu+1)A - C)V(t)] dt.$$

Отсюда следует: если $V(t)$ – решение системы (3), то $W(z)$ – решение системы (2). Нетрудно показать, что ветвящееся в окрестности точки $t = t_*$ решение $V(t)$ порождает (при соответствующем контуре интегрирования) ветвящееся в той же точке решение $W(z)$.

Отметим, что интегральное соотношение (4) имеет скалярный характер, т.е. оно связывает однименные компоненты вектор-функций $V(t)$ и $W(z)$. Далее, при $m = 2$ редукция систем (2) и (3) к уравнениям приводит к ДГУ. Для описания этой связи в явных терминах необходимо выразить параметры (1) в терминах параметров (2) и затем вычислить параметры ДГУ, порожденного системой (3). Эти громоздкие вычисления были реализованы с помощью пакета Maple, результаты суммированы в Предложении 2. Приведем прежде необходимые обозначения.

Пусть $w_h^{(0)}(z)$ – нормализованное при $z = 0$ голоморфное решение уравнения (1), $w_b^{(0)}(z)$ – нормализованное ветвящееся при $z = 0$ решение этого уравнения, $w_h^{(0)}(z) \sim 1$, $w_b^{(0)}(z) \sim 1 \cdot z^{1-\alpha}$ при $z \sim 0$, $w_h^{(1)}(z)$, $w_b^{(1)}(z)$ – нормализованные голоморфное и ветвящееся при $z = 1$ решения, $w_h^{(1)}(z) \sim 1$, $w_b^{(1)}(z) \sim 1 \cdot (z-1)^{1-\beta}$ при $z-1 \sim 0$.

Предложение 2. Пусть $v_b^{(0,1)}(t)$ – нормализованные ветвящиеся решения уравнения

$$v''(t) + \left[\frac{\tilde{\alpha}}{t} + \frac{\tilde{\beta}}{t-1} - \frac{1}{t-\tilde{\lambda}} \right] v'(t) + \frac{1}{t(t-1)} \left[\frac{\tilde{\chi}}{t-\tilde{\lambda}} + \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\lambda}(\tilde{\lambda}-1)} \right] v(t) = 0, \quad (5)$$

фиксированные своим поведением в особых точках $t = 0$ или $t = 1$ соответственно, контур $L = L_{0,1}$ – двойная петля, охватывающая точку $t = z$ и $t = 0$ (для L_0), либо $t = 1$ (для L_1), и

$$\tilde{\alpha} = \alpha + \mu + 1, \tilde{\beta} = \beta + \mu + 1, \quad (6)$$

$$\tilde{\lambda} = \frac{\lambda(\alpha\lambda - \lambda - \alpha + \mu\lambda - \mu + \beta\lambda + \chi)}{-2\lambda + \beta\lambda + \alpha\lambda + 1 - \alpha + \chi} \quad (7)$$

$$\tilde{\chi} = -\frac{1}{-2\lambda + \beta\lambda + \alpha\lambda + 1 - \alpha + \chi} (-\chi^2 - \alpha\mu\lambda - \beta\mu\lambda - \alpha\chi\lambda + \quad (8)$$

$$\alpha\lambda^2 + \beta\lambda^2 - \lambda^2 - \beta\lambda + \lambda + \beta\mu\lambda^2 - \chi + \alpha\lambda^2\mu + \alpha\chi - \alpha\lambda + \mu^2\lambda^2 - \mu^2\lambda - \beta\lambda\chi + 2\chi\lambda).$$

Тогда функция $w(z)$, определенная соотношением

$$w(z) = (\nu_{0,1})^{-1} \int_{L_{0,1}} (z-t)^\mu v_b^{(0,1)}(t) dt, \quad (9)$$

совпадает с $w_b^{(0,1)}(z)$. Здесь

$$\nu_{0,1} = [1 - \exp(2\pi i\mu)] [1 - \exp(2\pi i(\kappa_{0,1}))] B(\mu + 1, 1 + \kappa_{0,1}),$$

$\kappa_{0,1}$ – характеристические показатели для решений $v_b^{(0,1)}(t)$ в соответствующих особых точках.

Отметим, что параметр μ , присутствующий в соотношении (9), может принимать любые значения на комплексной плоскости. Аналогичный результат для решений гипергеометрического уравнения можно найти в [1]. Далее, при $\mu = -1$ соотношения (6)–(8) превращаются в тождества. Если применить описанное преобразование дважды (сначала с параметром μ , а затем с параметром ν) то мы получим соотношение (9) с параметром $\mu + \nu + 1$.

Интегральное преобразование (9) обладает определенным “вырезающим” свойством. А именно, пусть контур интегрирования L_0 . Если в качестве решения подставить $v(t) = \text{const} \cdot v_h^{(0)}(t)$, соответствующий контурный интеграл сводится к нулю. Аналогичный факт имеет место и для контура L_1 .

§3. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ

Пусть $W^{(0)}(z) = (w_b^{(0)}(z), w_h^{(0)}(z))^T$, $W^{(1)}(z) = (w_b^{(1)}(z), w_h^{(1)}(z))^T$, тогда, в соответствии с аналитической теорией линейных дифференциальных уравнений [2, 5], $W^{(0)}(z) = RW^{(1)}(z)$, где R – соответствующая матрица связи для уравнения (1). Эта матрица аналитически зависит от параметров $\alpha, \beta, \chi, \lambda$, в последующем мы опускаем указание на эту зависимость. Заметим, что эта матрица зависит от пути аналитического продолжения; мы полагаем в дальнейшем, что оно соответствует пути, указанном на рис. 2.



Рис. 2. Путь аналитического продолжения при определении матрицы связи R .

Рассмотрим аналитическое продолжение $w_b^{(0)}(z)$ вдоль контура C на комплексной плоскости, см. рис. 3. В наших обозначениях получаем:

$$w_b^{(0)}(z) = R_{11}w_b^{(1)}(z) + R_{12}w_h^{(1)}(z). \quad (10)$$

При обходе точки $z = 1$ в положительном направлении, решение $w_b^{(1)}(z)$ приобретает фазовый множитель $\exp(2\pi i(1 - \beta))$, голоморфное решение $w_b^{(1)}(z)$ не меняется. Применяя (10) еще раз, получаем в результате аналитического продолжения вдоль контура C :

$$w_b^{(0)}(z) \rightarrow w_b^{(0)}(z) + [\exp(-2\pi i\beta) - 1] R_{11} w_b^{(1)}(z). \quad (11)$$

Интегральное соотношение (9) дает иную возможность реализовать

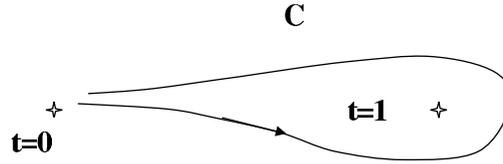


Рис. 3. Путь аналитического продолжения C .

аналитическое продолжение $w_b^{(0)}(z)$ — с помощью подходящей деформации контура интегрирования. При таком аналитическом продолжении (соответствующем обходу точки z по контуру C) исходный контур интегрирования L_0 преобразуется в контур \tilde{L}_0 , см. рис. 4. Вставим дополнительные петли AME и JKF , тогда деформированный контур $ABCDEFGHIJ$ (здесь порядок букв соответствует порядку прохождения контура) мы представим как объединение контуров $ABCDEMA$, $FGHJKF$, $AMEFKJ$. Результат аналитического продолжения подинтегрального выражения вдоль петель $ABCE$ и AME совпадает, то же верно и для петель $FGHJ$ и FKJ и т.д. Итак, можно разбить интеграл на три интеграла по контурам:

$$\begin{aligned} w_b^{(0)}(z) &= (\nu^{(0)})^{-1} \int_{L_0} (z-t)^\mu v_b^{(0)}(t) dt \rightarrow (\nu^{(0)})^{-1} \int_{\tilde{L}_0} (z-t)^\mu v_b^{(0)}(t) dt \\ &= \left[\int_{ABCDEMA} + \int_{FGHJKF} + \int_{AMEFKJ} \right] (z-t)^\mu v_b^{(0)}(t) dt. \end{aligned} \quad (12)$$

Отметим, что контура $ABCDEMA$ и $FGHJKF$ гомотопны контуру L_1 , контур $AMEFKJ$ гомотопен контуру L_0 . При вычислении значений соответствующих интегралов следует учитывать результат аналитического продолжения подинтегрального выражения. Интеграл по

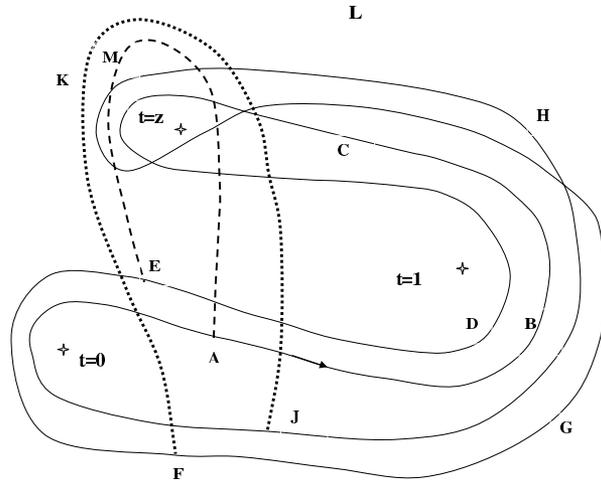


Рис. 4. Деформированный контур интегрирования \widetilde{L}_0 и вставленные петли.

контур $AMEFKJ$ равен $w_b^{(0)}(z)$. При рассмотрении интегралов по контурам $ABCDEMA$ и $FGHJKF$ учтем, что степенной множитель подинтегрального выражения при аналитическом продолжении генерирует (при обходе соответствующей точки ветвления) фазовый множитель, а аналитическое продолжение решения $v_b^{(0)}(t)$ может быть описано с помощью соотношения

$$v_b^{(0)}(t) \rightarrow T_{11}v_b^{(1)}(t) + T_{12}v_h^{(1)}(t). \quad (13)$$

Здесь T – соответствующая матрица связи для уравнения (5). Благодаря ”вырезающему” свойству интегрального соотношения (9), вклад от $v_h^{(1)}(t)$ пропадает. Интегралы по контурам $ABCDEMA$ и $FGHJKF$ $\operatorname{ch} v_b^{(1)}(t)$ в подинтегральном выражении порождают $w_b^{(1)}(z)$ с точностью до фазового множителя. Суммируя эти соображения, получаем: аналитическое продолжение вдоль пути C приводит к следующему результату:

$$w_b^{(0)}(z) \rightarrow w_b^{(0)}(z) + \frac{\nu_1}{\nu_0} [\exp(2\pi i \kappa_0) - 1] T_{11}w_b^{(1)}(z), \quad (14)$$

где κ_0 – характеристический показатель $v_b^{(0)}(t)$. Сравнивая соотношения (11) и (14), получаем:

$$R_{11} = \frac{\exp(2\pi i \kappa_1) - 1}{\exp(-2\pi i \beta) - 1} \frac{\Gamma(\kappa_1 + 1)\Gamma(\kappa_0 + \mu + 2)}{\Gamma(\kappa_0 + 1)\Gamma(\kappa_1 + \mu + 2)} T_{11} \quad (15)$$

(здесь мы учли явные выражения для $\nu_{0,1}$).

§4. МАТРИЦЫ СВЯЗИ ДЛЯ ДГУ

4.1. Вычисление элемента матрицы связи. Как упоминалось выше, интегральное преобразование (9) зависит от свободного параметра μ . При изменении этого параметра меняются и параметры уравнения (5) в соответствии с (6)–(8). Зафиксируем значение параметра μ условием: ложная особая точка уравнения (5) $t = \tilde{\lambda}$ совпадает с регулярной особой точкой $t = 0$. Отсюда $\mu = -(\alpha\lambda - \alpha + \beta\lambda - \lambda + \chi)/(\lambda - 1)$, и уравнение (5) приобретает вид:

$$v''(t) + \left[\frac{-\alpha\lambda - 1 + \alpha - \beta + 2\lambda - \chi}{(t-1)(\lambda-1)} + \frac{-\beta\lambda + \lambda - \chi}{t(\lambda-1)} \right] v'(t) \quad (16)$$

$$+ \frac{(\beta\lambda - \lambda + \chi)(-\lambda^2 + t\lambda\alpha + t\beta\lambda + \lambda - 2t\lambda + t - t\alpha + t\chi)}{(\lambda-1)^2\lambda t^2(t-1)} v(t) = 0.$$

Коэффициент при $v(t)$ в уравнении (16) имеет полюс второго порядка при $t = 0$, так что это уравнение отличается от гипергеометрического простой подстановкой. А именно, если $v(t) = t^r u(t)$, $r = (\beta\lambda - \lambda + \chi)/(\lambda - 1)$, то $u(t)$ – решение уравнения:

$$u''(t) + \left[\frac{-\alpha\lambda - 1 + \alpha - \beta + 2\lambda - \chi}{(t-1)(\lambda-1)} + \frac{\beta\lambda - \lambda + \chi}{t(\lambda-1)} \right] u'(t) \quad (17)$$

$$- \frac{(\beta\lambda - \lambda + \chi)(-\lambda + \alpha\lambda + \chi + 1 - \alpha)}{t(t-1)\lambda(\lambda-1)} u(t) = 0.$$

Заметим, что при этом соотношение (9) обращается в интегральное представление для решений ДГУ (1).

Приведем необходимую информацию о гипергеометрическом уравнении. Мы будем использовать следующую его параметризацию [1]:

$$t(t-1)u''(t) + [(a+b+1)t - c]u'(t) + abu(t) = 0. \quad (18)$$

Описание стандартных наборов нормализованных решений и соотношения между ними (соотношения Куммера, матрицы связи) можно найти в [1]. Отметим, что наша нормализация решений в точке $t = 1$

отличается от нормализации в [1]: мы фиксировали соответствующее ветвящееся решение как $1 \cdot (t-1)^{\kappa_1}$, нормализация в [1] задается как $1 \cdot (1-t)^{\kappa_1}$. Мы получаем, что

$$u_h^{(0)}(t) = K_{21}u_h^{(1)}(t) + K_{22}u_b^{(1)}(t), \quad (19)$$

где

$$K_{22} = \exp(-\pi i \kappa_1) \frac{\Gamma(c)\Gamma(a+b-c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)}. \quad (20)$$

Сравнивая (17) и (18), имеем:

$$c = \frac{\beta\lambda - \lambda + \chi}{\lambda - 1}, \quad (21)$$

$$a = \frac{\beta - \alpha}{2} + \Delta, \quad (22)$$

$$b = \frac{\beta - \alpha}{2} - \Delta, \quad (23)$$

$$\Delta = \sqrt{\frac{(\alpha - \beta)^2}{4} + \frac{(\beta\lambda - \lambda + \chi)(-\lambda + \alpha\lambda + \chi + 1 - \alpha)}{\lambda(\lambda - 1)}}. \quad (24)$$

Нам следует определить величины $\kappa_{0,1}$, характеристические показатели уравнения (5), входящие в соотношение (15). Характеристические показатели в точке $t = 1$ не меняются при переходе от уравнения (5) к уравнению (16) и затем к уравнению (17),

$$\kappa_1 = 1 - \tilde{\beta} = \alpha + \frac{\chi + \beta - \lambda}{\lambda - 1}.$$

Величина κ_0 может быть определена из следующего условия: нам необходимо решение $v_b^{(0)}(t)$, которое после интегрального преобразования (9) обращается в ветвящееся при $z = 0$ решение уравнения (1) с характеристическим показателем $1 - \alpha$. Это решение $v_b^{(0)}(t) = t^r u_h^{(0)}(t)$, так что

$$\kappa_0 = r = \frac{\beta\lambda - \lambda + \chi}{\lambda - 1}. \quad (25)$$

При переходе от уравнения (17) к уравнению (16) нормализованное решение $u_h^{(0)}(t)$ переходит в нормализованное ветвящееся решение $v_b^{(0)}(t) = t^r u_h^{(0)}(t)$, а нормализованные решения $u_h^{(1)}(t), u_b^{(1)}(t)$ обращаются в нормализованные решения $v_h^{(1)}(t) = t^r u_h^{(1)}(t), v_b^{(1)}(t) = t^r u_b^{(1)}(t)$. Умножая соотношение (19) на t^r , находим:

$$v_b^{(0)}(t) = K_{21}v_h^{(1)}(t) + K_{22}v_b^{(1)}(t). \quad (26)$$

Отметим, что мы обсуждаем матрицу связи уравнения (5), которое в данном случае совпадает с уравнением (16). Следовательно $T_{11} = K_{22}$, и значение K_{22} определено соотношениями (20)–(24). В итоге получаем:

$$R_{11} = -\frac{(\lambda - 1) \exp(i\pi\beta) \Gamma(\beta - 1) \Gamma(2 - \alpha)}{(\beta\lambda + \chi - \lambda) \Gamma(\frac{\beta - \alpha}{2} + \Delta) \Gamma(\frac{\beta - \alpha}{2} - \Delta)}. \quad (27)$$

Для стандартной нормализации [1] имеем:

$$\tilde{R}_{11} = \frac{(\lambda - 1) \Gamma(\beta - 1) \Gamma(2 - \alpha)}{(\beta\lambda + \chi - \lambda) \Gamma(\frac{\beta - \alpha}{2} + \Delta) \Gamma(\frac{\beta - \alpha}{2} - \Delta)}. \quad (28)$$

4.2. Матрицы связи. Соотношение (28) описывает только один элемент матрицы связи уравнения (1), эта матрица связи соответствует паре особых точек $z = 0, z = 1$. Другие элементы этой матрицы могут быть вычислены с помощью элементарных симметрий этого уравнения. А именно, подстановки $w(z) = z^{1-\alpha} w_1(z)$, $w(z) = (z - 1)^{1-\beta} w_2(z)$, и замена переменной $z = 1 - s$ приводят к тому же уравнению для функций $w_1(z), w_2(z), w(s)$, меняя только его параметры, причем нормализация решений сохраняется (стандартная, фиксированная в [1]). Например, первая подстановка преобразует уравнение с параметрами $[\alpha, \beta, \lambda, \chi]$ в уравнение с параметрами $[2 - \alpha, \beta, \lambda, 1 + \chi + \lambda\alpha - \lambda - \alpha]$, и "переставляет" ветвящееся и голоморфное в точке $z = 0$ решения, а решения, фиксированные поведением в точке $z = 1$, не меняют свой характер. Таким образом,

$$\tilde{R}_{21}(\alpha, \beta, \lambda, \chi) = \tilde{R}_{11}(2 - \alpha, \beta, \lambda, 1 + \chi + \lambda\alpha - \lambda - \alpha). \quad (29)$$

Аналогично

$$\tilde{R}_{12}(\alpha, \beta, \lambda, \chi) = \tilde{R}_{11}(\alpha, 2 - \beta, \lambda, \chi - \lambda + \beta\lambda). \quad (30)$$

Комбинируя,

$$\tilde{R}_{22}(\alpha, \beta, \lambda, \chi) = \tilde{R}_{11}(2 - \alpha, 2 - \beta, \lambda\alpha + \beta\lambda - 2\lambda + 1 + \chi - \alpha). \quad (31)$$

Эти соотношения описывают матрицу связи \tilde{R} , которая соответствует паре особых точек $z_* = 0, 1$. Уравнение (1) имеет еще одну регулярную особую точку $z_* = \infty$. Однако замена переменных $z = s^{-1}$ (которая переставляет точки 0 и ∞) преобразует уравнение (1) в уравнение, которое приводится к (1) (с другим набором параметров) элементарной заменой функции. Эта симметрия дает возможность вычислить матрицу связи для пары особых точек $z_* = \infty, z_* = 1$.

4.3. Предельный переход к гипергеометрическому уравнению. ДГУ (1) может быть редуцировано к гипергеометрическому уравнению. Такая редукция может быть реализована с помощью предельного перехода: $\chi = \gamma\lambda$, $\lambda \rightarrow \infty$. После такого перехода уравнение (1) преобразуется в гипергеометрическое уравнение

$$w''(z) + \left(\frac{\alpha}{z} + \frac{\beta}{z-1} \right) w'(z) + \frac{\gamma(1-\alpha-\beta-\gamma)}{z(z-1)} w(z) = 0. \quad (32)$$

Сравнивая уравнения (32) и (18) получаем следующий набор параметров: $\hat{a} = \alpha + \beta + \gamma - 1$, $\hat{b} = -\gamma$, $\hat{c} = \alpha$. В этом предельном случае уравнение (17) имеет решение $u(t) = (t-1)^{\alpha+\gamma-1}$, которое голоморфно в точке $t = 0$ и ветвится в точке $t = 1$. При этом соответствующий элемент матрицы связи уравнения (17) равен 1. Далее, $v(t) = t^{\beta+\gamma-1}(t-1)^{\alpha+\gamma-1}$, и интегральное соотношение (9) становится интегральным представлением решения гипергеометрического уравнения (14).

Из соотношений Куммера [1] для гипергеометрического уравнения (32) следует, что элемент его матрицы связи

$$\tilde{R}_{11} = \frac{\Gamma(2-\hat{c})\Gamma(\hat{a}+\hat{b}-\hat{c})}{\Gamma(\hat{a}+1-\hat{c})\Gamma(\hat{b}+1-\hat{c})} = \frac{\Gamma(2-\alpha)\Gamma(\beta-1)}{\Gamma(\beta+\gamma)\Gamma(1-\alpha-\gamma)}.$$

Нетрудно проверить, что этот результат совпадает с предельной формой соотношения (28) при $\chi = \gamma\lambda$, $\lambda \rightarrow \infty$.

§5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы обсуждали деформированное гипергеометрическое уравнение (1). Оно имеет три регулярные особые точки и одну ложную особую точку. Это уравнение может быть получено в результате редукции гипергеометрической системы уравнений (2). Для решений такой системы имеется интегральная симметрия Эйлера со свободным параметром μ , она связывает решения системы с матричными коэффициентами $\{A, B, C\}$ с решениями системы с коэффициентами $\{A, B, C - (\mu + 1)A\}$. Соответственно, аналогичная симметрия существует для решений ДГУ. Интегральная симметрия влечет соответствующее соотношение для матриц связи уравнений. Выбирая значение параметра μ , можно одно из ДГУ свести к гипергеометрическому, для которого матрицы связи известны. Эти соображения дают

возможность получить явные выражения для матрицы связи ДГУ, соотношения (28)–(31). При этом интегральная связь обращается в интегральное представление решений ДГУ. Как упоминалось выше, ранее решения ДГУ были построены в [4], в принципе полученные в [4] результаты дают возможность вычислить матрицы связи ДГУ. Здесь мы предпочли использовать в этих целях интегральную симметрию Эйлера.

Отметим, что мы обсуждаем случай $m = 2$, когда гипергеометрическая система (2) не имеет акцессорного параметра. Близкие (и более общие) сюжеты обсуждались в [9], где было показано, что системы в нормальной форме Окубо без акцессорного параметра имеют решения, представимые в интегральной форме.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. Bateman, A. Erdelyi, *Higher Transcendental functions*, Vol. 1. McCraw-Hill Book Company Inc., New York, 1953.
2. K. Iwasaki, H. Kimura, S. Shimomura, M. Yoshida, *From Gauss to Painlevé: a modern theory of special functions*. Braunschweig, Vieweg, 1991.
3. S. Yu. Slavyanov, W. Lay, *Special functions: A unified theory based on singularities*. Oxford university press, Oxford, New York, 2000.
4. A. V. Shanin, R. V. Craster, *Removing false singular points as a method of solving ordinary differential equations*. — Euro.J. Appl. Math. **13** (2002), 617–639.
5. Y. Sibuya, *Linear differential equations in the complex domain: problem of analytic continuation*. AMS, Providence, 1985.
6. A. Ya. Kazakov, *Integral symmetry, integral invariants and monodromy of ordinary differential equations*. — Theor. Math. Phys. **116** (1998), no. 3, 991–1000.
7. A. Ya. Kazakov, *The central two-point connection problem for the reduced confluent Heun equation*. — J. Phys. A: Math. Gen. **39** (2006), 2339–2347.
8. M. Kohno, K. Tsurumaru, H. Haruki, *Monodromy groups for certain hypergeometric systems*. — Kumamoto J. Math. **8** (1995), 101–145.
9. Y. Haraoka, *Integral representations of solutions of differential equations free from accessory parameters*. — Adv. Math. **169** (2002), 187–240.

Kazakov A. Ya. Euler integral symmetry and deformed hypergeometric equation.

Euler integral symmetry for the hypergeometric system of linear differential equations is described. Reduction of the hypergeometric system leads to integral symmetry for the deformed hypergeometric equation. Analytic continuation of the corresponding contour integral is used to obtain the corresponding symmetry of the connection matrix. These results give

the possibility to calculate the connection matrix of the deformed hypergeometric equation.

С. Петербургский университет
аэрокосмического приборостроения,
Б.Морская 67, С. Петербург 190000, Россия
E-mail: a_kazak@mail.ru

Поступило 22 сентября 2011 г.