Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 393, 2011 г.

М. Н. Демченко

О НЕЕДИНСТВЕННОСТИ ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ МАКСВЕЛЛА

§1. Введение

В работе [1] получена карлемановская оценка для стационарной системы Максвелла

$$\begin{aligned}&\operatorname{rot} E = i\omega\mu H, \quad \operatorname{rot} H = -i\omega\varepsilon E,\\ &\operatorname{div}(\varepsilon E) = \operatorname{div}(\mu H) = 0\end{aligned} \tag{1}$$

с положительно определенными матричнозначными функциями ε, μ класса C^1, из которой следует, что система (1) обладает свойством единственности продолжения: из равенства решения нулю в некотором шаре вытекает его равенство нулю всюду. Мы покажем, что в случае

$$\varepsilon, \mu \in \bigcap_{\alpha<1} C^{\alpha}$$

это свойство может нарушаться.

Теорема 1. *Пусть функция φ удовлетворяет следующим условиям:*
(1) *φ положительна и не убывает на некотором промежутке $(0, \delta]$.*
(2) *Интеграл $\int\limits_0^\delta \varphi(s)^{-1} ds$ сходится ($\Rightarrow \lim\limits_{s\to+0}(s\varphi(s)^{-1}) = 0$).*
(3) *Функция $s\varphi(s)^{-1}$ не убывает на $(0, \delta]$.*
Тогда существуют вещественные ненулевое векторное поле $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ и матричное поле ε, такие что для некоторых положительных констант ε_0, ε_1, c выполнено

$$\varepsilon_0 I \le \varepsilon(x) \le \varepsilon_1 I, \tag{2}$$

$$|\,\varepsilon(x) - \varepsilon(x')| \le c\,\varphi(|x - x'|) \quad \forall\, x, x' \in \mathbb{R}^3 \ : \ |x - x'| < \delta, \tag{3}$$

и имеет место равенство

$$\operatorname{rot} u = \varepsilon u. \tag{4}$$

Ключевые слова: система Максвелла, единственность продолжения.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 11-01-00407А.

Если в теореме 1 положить $\varphi(s) = s(\ln s)^2$, то из (3) следует, что ε принадлежит C^α для всех $\alpha < 1$. Положив теперь

$$\omega = 1, \quad \mu = \varepsilon, \quad H = u, \quad E = iu,$$

мы получаем нетривиальное решение системы (1) с компактным носителем.

Отметим еще два следствия теоремы 1.

- У нестационарной системы
$$\partial_t(\varepsilon E) = \operatorname{rot} H, \quad \partial_t(\mu H) = -\operatorname{rot} E$$
может существовать решение
$$E(t,x) = ie^{-it}u(x), \quad H(t,x) = e^{-it}u(x), \quad \mu(x) = \varepsilon(x),$$
пространственный носитель которого компактен и неподвижен.
- Оператор Максвелла во всем пространстве с периодическими матричными коэффициентами ε, μ может иметь бесконечнократное собственное значение. Известно, что в случае скалярных коэффициентов $\varepsilon, \mu \in C^2$ спектр периодического оператора Максвелла абсолютно непрерывен (см. [2]).

Доказательство теоремы 1 следует схеме работ [3, 5, 4]; при этом есть новые технические трудности, вызванные тем, что уравнение (4) – первого порядка.

В п. 2, 3 мы построим решение с носителем в полупространстве.

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 для произвольного $L > 0$ существуют вещественные векторное поле $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ и матричное поле ε, 2π-периодичные по x_1 и x_2, удовлетворяющие условиям* (2), (3), (4), *причем $u(x) = 0$ при $x_3 \le 0$, и*

$$u(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(\omega x_1) \\ \sin(\omega x_1) \end{pmatrix}, \quad x_3 \ge L, \tag{5}$$

$$\varepsilon(x) = \omega I, \quad x_3 \in (-\infty, 0] \cup [L, +\infty), \tag{6}$$

где ω – некоторое положительное число, зависящее от L, I – единичная матрица.

В п. 4 из теоремы 2 будет выведена теорема 1.

Введем некоторые обозначения. Скобки $\langle\cdot,\cdot\rangle$, $|\cdot|$ означают скалярное произведение и норму в $\mathbb{R}^d$, $[\cdot,\cdot]$ – векторное произведение в $\mathbb{R}^3$. Для матрицы A символ A^t означает транспонированную матрицу, норма матрицы определяется следующим образом

$$\|A\| = \left(\sum_{ij} A_{ij}^2 \right)^{1/2}.$$

Для $l = (l_1, ..., l_d)$ положим

$$D_x^l = \frac{\partial^{l_1}}{\partial x_1^{l_1}} \cdots \frac{\partial^{l_d}}{\partial x_d^{l_d}}.$$

$\{e_j\}$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^d$.

Автор благодарен Н. Д. Филонову за постановку задачи и внимание к работе, а также Т. А. Суслиной за полезные обсуждения.

§2. Вспомогательные леммы

При доказательстве теоремы 2 используются следующая лемма, доказанная в [3].

Лемма 1. *Пусть функция φ удовлетворяет условиям теоремы* 1. *Тогда существует убывающая последовательность положительных чисел $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, для которой выполнено*

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n < \infty, \tag{7}$$

и для достаточно больших n справедливо

$$r_n \geq n^{-3/2}, \tag{8}$$

$$\varphi(r_n) \geq n^{-1}. \tag{9}$$

Заметим, что из монотонности $s\varphi(s)^{-1}$ и неравенства (9) следует

$$\frac{s}{nr_n} \leq \varphi(s), \quad s \in (0, r_n]. \tag{10}$$

Нам также понадобится формула преобразования ротора при замене координат. Пусть ξ – диффеоморфизм областей в $\mathbb{R}^3$, u, v – гладкие векторные поля, между которыми есть связь:

$$u(x) = J^t\, v(\xi(x)), \qquad J_{ik} = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k}.$$

Тогда верно равенство

$$\operatorname{rot} u(x) = \det J \cdot J^{-1}(\operatorname{rot} v)(\xi(x)). \tag{11}$$

Положим

$$Z = \{z \in \mathbb{R}^4 \,:\, 0 \le z_3, z_4 \le 1\}$$

и введем вектор-функцию

$$\Phi(y,z) = \begin{pmatrix} y_1 + w_3(1-y_2) + y_3 z_3 \\ w_3(y_1 - y_3 z_3) + z_3^2(y_4 - 1) \\ z_4(1-y_2) - w_4(y_2 z_4 z_1 + y_3) \\ w_4(1 - y_4 - y_3 z_4 z_1) + z_2 - y_3 z_4 + z_1(2 - z_4^2) \end{pmatrix},$$

где $y \in \mathbb{R}^4$, $z \in Z$, $w_3 = \sqrt{1-z_3^2}$, $w_4 = \sqrt{1-z_4^2}$. Нас будет интересовать уравнение

$$\Phi(y,z) = 0 \tag{12}$$

относительно y с параметром z.

Замечание 1. При $z_1 = z_2 = 0$ вектор

$$y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

является решением (12).

Определим компакт

$$K = \{z \in Z \,:\, z_1 = z_2 = 0,\, z_3 = z_4\},$$

а также компакт

$$K_\sigma = \{z \in Z : \operatorname{dist}(z, K) \le \sigma\}$$

для $\sigma > 0$.

Лемма 2. *Найдется достаточно малое $\sigma > 0$, такое что для каждого $z \in K_\sigma$ существует единственный вектор $y = y(z)$, удовлетворяющий равенству (12), причем*

$$D_z^l y(z) \in C(K_\sigma) \qquad \forall\, l = (l_1, l_2, 0, 0). \tag{13}$$

Кроме того, при $z \in K$ выполнено

$$\frac{\partial y_1}{\partial z_1}(z) \le 0. \tag{14}$$

Доказательство. Можно записать $\Phi(y,z)$ по-другому:

$$\Phi(y,z) = A(z)\,y - F(z),$$

где $A(z)$ – матрица-функция, а $F(z)$ – вектор-функция. Тогда (12) – линейная неоднородная система уравнений относительно y, и для ее разрешимости достаточно $d(z) \equiv \det A(z) \neq 0$. Для $z \in K$ имеем

$$A(z) = \begin{pmatrix} 1 & -w_3 & z_3 & 0 \\ w_3 & 0 & -z_3 w_3 & z_3^2 \\ 0 & -z_3 & -w_3 & 0 \\ 0 & 0 & -z_3 & -w_3 \end{pmatrix}. \tag{15}$$

В этом случае $d(z) = 1$. Тогда при достаточно малом $\sigma > 0$ для $z \in K_\sigma$ будет выполнено $d(z) \neq 0$. Поэтому на K_σ однозначно определено решение $y(z)$:

$$y(z) = A(z)^{-1} F(z).$$

Очевидно, что для $l = (l_1, l_2, 0, 0)$ верно

$$D_z^l A,\ D_z^l F \in C(Z),$$

поэтому

$$D_z^l \left(A(z)^{-1}\right) \in C(K_\sigma),$$

а тогда верно и (13).

Вычилим производную y_1 по z_1:

$$\frac{\partial y}{\partial z_1}(z) = -A(z)^{-1} \frac{\partial \Phi}{\partial z_1}\left(y(z), z\right).$$

Для $z \in K$ с учетом замечания 1 справедливо

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_1}(y(z), z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -w_4 z_4 \\ 2 - z_4^2 \end{pmatrix}.$$

Поэтому из матрицы $A(z)^{-1}$ нам понадобятся лишь третий и четвертый элементы первой строки, которые соответственно равны: $-w_4 z_4$, z_4^2. Окончательно для $z \in K$ получаем

$$\frac{\partial y_1}{\partial z_1}(z) = -w_4^2 z_4^2 - z_4^2(2 - z_4^2) \leq 0.$$

Неравенство (14) доказано. □

Сопоставим функции φ в условии теоремы 2 последовательность $\{r_n\}$ из леммы 1. Всюду далее предполагается, что $n \geq N$, а целое положительное N таково, что для $n \geq N$ выполнены оценки (8), (9). Константы, зависящие от N, мы будем обозначать одним символом $C(N)$.

Введем убывающую последовательность

$$a_n = \sum_{m=n}^{\infty} r_m.$$

Положим также

$$\alpha_{n,N} = \frac{N^3}{n^3}, \quad \beta_{n,N} = \sqrt{1-\alpha_{n,N}^2},$$
$$p_{n,N} = \frac{\sqrt{(n+1)^6 - N^6} - \sqrt{n^6 - N^6}}{(n+1)^3}\, r_n.$$

Очевидно, что

$$p_{n,N} \leq \frac{C(N)}{n}\, r_n. \tag{16}$$

Нам еще понадобится оценка, не зависящая от N:

$$p_{n,N} \leq \frac{(n+1)^6 - n^6}{(n+1)^3\sqrt{(n+1)^6 - N^6}} r_n$$
$$\leq \frac{\sqrt{(n+1)^6 - n^6}}{(n+1)^3} r_n \leq \frac{\sqrt{6(n+1)^5}}{(n+1)^3} r_n \leq \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{n}} r_n. \tag{17}$$

Зафиксируем невозрастающую функцию

$$f \in C^\infty[0,1], \quad \operatorname{supp} f' \subset (1/3,\, 2/3), \quad f(1/3) = 0, \quad f(2/3) = -1.$$

Введем функции $f_{n,N}$, определенные на интервалах $[a_{n+1}, a_n]$:

$$f_{n,N}(t) = 2p_{n,N} \cdot f\left(\frac{t - a_{n+1}}{r_n}\right).$$

Лемма 3. *Если N достаточно велико, то для всех $n \geq N$ существуют гладкие функции $\psi_{n,N}$, $\eta_{n,N}$, $\theta_{n,N}$, $\tau_{n,N}$, определенные на интервалах $[a_{n+1}, a_n]$, такие что:*

(1) *выполнено равенство*

$$\Phi\left(\begin{pmatrix} \psi_{n,N} \\ \eta_{n,N} \\ \theta_{n,N} \\ \tau_{n,N} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} f'_{n,N} \\ g_{n,N} \\ \alpha_{n,N} \\ \alpha_{n+1,N} \end{pmatrix}\right) = 0, \tag{18}$$

где $g_{n,N} = (f'_{n,N})^2 \beta_{n+1,N} + f''_{n,N}\,\beta_{n+1,N}/(n+1)^3$*;*

(2) *справедливы неравенства*

$$|\psi'_{n,N}| + |\eta'_{n,N}| + |\theta'_{n,N}| + |\tau'_{n,N}| \le \frac{C(N)}{2nr_n}, \tag{19}$$

$$\psi_{n,N} \ge \frac{1}{8}\, f'_{n,N} - Cp_{n,N}, \tag{20}$$

$$|\eta_{n,N} - 1|, |\,\theta_{n,N}|, |\tau_{n,N} - 1| \le 1/3; \tag{21}$$

(3) *для каждого целого* $k \ge 0$ *найдутся числа* $C(N,k)$, $p(k)$, *такие что для любого* $n \ge N$ *выполнено*

$$\max_{t\in[a_{n+1},\,a_n]} |\,\psi^{(k)}_{n,N}, \eta^{(k)}_{n,N}, \theta^{(k)}_{n,N}, \tau^{(k)}_{n,N}| \le C(N,k)\, n^{p(k)}.$$

Доказательство. Обозначим второй столбец в (18) $z(t)$. Имеем

$$|z_3 - z_4| = \alpha_{n,N} - \alpha_{n+1,N} = N^3\left(\frac{1}{n^3} - \frac{1}{(n+1)^3}\right)$$
$$\le \frac{N^3}{(n+1)^3}\frac{(n+1)^3 - n^3}{n^3} \le \frac{3n^2+3n+1}{n^3} \le \frac{7}{n}. \tag{22}$$

Пусть $C_k = \max|f^{(k)}(\cdot)|$, где k – целое неотрицательное число. Тогда

$$\max|f^{(k)}_{n,N}(\cdot)| = 2p_{n,N}C_k r_n^{-k} \qquad \forall n \ge N, \tag{23}$$

и для $f'_{n,N}$ и $g_{n,N}$ можно написать оценки, используя (17) и (8),

$$\max|f'_{n,N}(\cdot)| \le \frac{2\sqrt{6}\,C_1}{\sqrt{n}}, \tag{24}$$
$$\max|g_{n,N}(\cdot)| \le \left(\frac{2\sqrt{6}\,C_1}{\sqrt{n}}\right)^2 + \frac{2p_{n,N}}{(n+1)^3}\frac{C_2}{r_n^2} \le \frac{24\,C_1^2}{n} + \frac{2\sqrt{6}\,C_2}{n^2}.$$

Из этих оценок, неравенств $0 \le z_3, z_4 \le 1$ и оценки (22) следует, для что любого наперед заданного $\sigma > 0$ можно выбрать достаточно большое N, такое что для любого $n \ge N$ выполнено

$$z(t) \in K_\sigma \quad \forall\, t \in [a_{n+1}, a_n]. \tag{25}$$

Выберем число σ так, чтобы было выполнено утверждение леммы 2. Тогда функции $\psi_{n,N}$, $\eta_{n,N}$, $\theta_{n,N}$, $\tau_{n,N}$, удовлетворяющие уравнению (18), существуют и единственны. Более того, эти функции являются гладкими по t, так как по лемме 2 решение уравнения (18) гладко зависит от z_1, z_2 (в нашем случае последние гладко зависят от t, а z_3, z_4 постоянны).

Перейдем к пункту 2. Через $y(z)$ мы обозначим решение уравнения (12). В силу (13) на компакте K_σ справедливо

$$|D_z^l y| \;\le\; R_{|l|} \qquad \forall\, l = (l_1, l_2, 0, 0). \tag{26}$$

Отсюда

$$\begin{aligned}\left|\frac{d}{dt}\, y(z(t))\right| &= \left| f''_{n,\,N}(t)\cdot \frac{\partial y}{\partial z_1}(z(t)) + g'_{n,\,N}(t)\cdot\frac{\partial y}{\partial z_2}(z(t))\right| \\ &\le R_1(|f''_{n,\,N}(t)| + |g'_{n,\,N}(t)|).\end{aligned} \tag{27}$$

Теперь нам нужно оценить f''_n и g'_n. Воспользуемся для этого неравенствами (23) и (16):

$$|f''_{n,\,N}(t)| \le 2p_{n,\,N}\frac{C_2}{r_n^2} \le \frac{C(N)}{n r_n},$$

$$|g'_{n,\,N}(t)| \le 2|f'_{n,\,N}(t)\cdot f''_{n,\,N}(t)| + \frac{|f^{(3)}_{n,\,N}(t)|}{n^3} =$$

$$8p^2_{n,\,N}\frac{C_1C_2}{r_n^3} + 2p_{n,\,N}\frac{C_3}{n^3 r_n^3} \le \frac{C(N)}{n^2 r_n} + \frac{C(N)}{n^4 r_n^2} \le \frac{C(N)}{n r_n}.$$

Из этих оценок и (27) следует (19).

Докажем неравенство (20). Выберем число σ в (25) настолько малым, чтобы на K_σ было выполнено

$$\frac{\partial y_1}{\partial z_1} \le \frac{1}{9}$$

(это возможно в силу (13) и (14)). Тогда в силу замечания 1 имеем

$$\psi(t) = y_1(z(t))$$

$$= \int\limits_0^{f'_{n,\,N}(t)} \frac{\partial y_1}{\partial z_1}(s, 0, \alpha_{n,N}, \alpha_{n+1,N})\, ds + \int\limits_0^{g_{n,\,N}(t)} \frac{\partial y_1}{\partial z_2}(f'_{n,\,N}(t), s, \alpha_{n,N}, \alpha_{n+1,N})\, ds.$$

Отсюда по (26) с учетом $f'_{n,\,N} \le 0$ вытекает

$$\begin{aligned}\psi(t) &\ge \frac{1}{9} f'_{n,\,N}(t) - R_1|g_{n,\,N}(t)| \ge \frac{1}{9} f'_{n,\,N}(t) - R_1\left(f'^{\,2}_{n,\,N}(t) + \frac{|f''_{n,\,N}(t)|}{(n+1)^3}\right) \\ &\ge \frac{1}{9} f'_{n,\,N}(t)\cdot\big(1 - 9R_1 f'_{n,\,N}(t)\big) - R_1\frac{2p_{n,\,N}C_2}{r_n^2(n+1)^3}.\end{aligned}$$

Согласно (24) при достаточно большом N слагаемое $9R_1 f'_{n,N}$ при $n \geq N$ будет существенно меньше единицы. Кроме того, по (8) выполнено $r_n^2(n+1)^3 > 1$. Поэтому оценка (20) справедлива при $C = 2R_1C_2$.

По лемме 2 решение $y(z)$ непрерывно зависит от z на K_σ. Учитывая замечание 1, если σ в (25) достаточно мало (чего можно добиться выбором достаточно большого N), то выполнено (21).

Перейдем к пункту 3. Производная порядка k по t от $y_i(z(t))$ – это полином от

$$D_z^l y(z), \quad l = (l_1, l_2, 0, 0), \quad l_1 + l_2 \leq k$$

и производных $f_{n,N}^{(j)}$, $j \leq k+2$. Первые ограничены по n в силу (25) и (26). Вторые растут степенным образом по n в силу (23), (16) и 8. $\square$

Замечание 2. Согласно замечанию 1 в окрестности интервалов

$$[a_{n+1}, a_{n+1} + r_n/3], \quad [a_n - r_n/3, a_n]$$

выполнено

$$\psi_{n,N} = \theta_{n,N} = 0, \quad \eta_{n,N} = \tau_{n,N} = 1. \tag{28}$$

Это следует из того, что на этом множестве $f'_{n,N} = g_{n,N} = 0$.

Пусть N таково, что выполнено утверждение леммы 3. Введем функции $\widetilde{f}_{n,N}$ на интервалах $[a_{n+1}, a_n]$, такие что

$$\widetilde{f}'_{n,N} = \psi_{n,N}, \quad \widetilde{f}_{n,N}(a_n) = 0.$$

Из (20) следует, что

$$-\widetilde{f}'_{n,N}(t) = \int\limits_t^{a_n} \widetilde{f}'_{n,N}(s)ds \geq \int\limits_t^{a_n} \left(f'_{n,N}(s)/8 - Cp_{n,N}\right) ds$$
$$\geq -p_{n,N}/4 - Cp_{n,N}r_n.$$

Так как $r_n \to 0$ при $n \to \infty$, при достаточно большом N выполнено

$$\widetilde{f}_{n,N} \leq p_{n,N}/3. \tag{29}$$

Замечание 3. Далее мы будем рассматривать только такие N, для которых выполнено утверждение леммы 3 и оценка (29).

Замечание 4. Из пункта 3 леммы 3, а также из оценки (8), следует, что для каждого целого $k \geq 0$ величины

$$\max_{t \in [a_{n+1},\, a_n]} |\widetilde{f}_{n,N}^{(k)}(t)|$$

при $n \to \infty$ растут не быстрее степени n.

Положим

$$E_{n,N}(t)=\exp\left((n+1)^3(f_{n,N}(t)+\beta_{n+1,N}(t-a_{n+1}))\right),$$
$$\widetilde{E}_{n,N}(t)=\exp\left(n^3(\widetilde{f}_{n,N}(t)+\beta_{n,N}(t-a_n))\right).$$

Введем следующие подмножества $\mathbb{R}^3$:

$$\Omega_n=\{x\in\mathbb{R}^3\,:\,x_3\in[a_{n+1},a_n]\},$$
$$\Omega_n^-=\{x\in\mathbb{R}^3\,:\,x_3\in[a_{n+1},a_{n+1}+r_n/3]\},$$
$$\Omega_n^0=\{x\in\mathbb{R}^3\,:\,x_3\in[a_{n+1}+r_n/3,a_n-r_n/3]\},$$
$$\Omega_n^+=\{x\in\mathbb{R}^3\,:\,x_3\in[a_n-r_n/3,a_n]\}.$$

Лемма 4. *В слоях Ω_n зададим поля*

$$\widetilde{U}_{n,N}(x)=\begin{pmatrix}\beta_{n,N}\cos(n^3x_1)\\ -\alpha_{n,N}\cos(n^3x_1)\\ \sin(n^3x_1)\end{pmatrix}\widetilde{E}_{n,N}(x_3),$$

$$U_{n,N}(x)=\begin{pmatrix}\alpha_{n+1,N}(f'_{n,N}(x_3)\beta_{n+1,N}+1)\cos((n+1)^3x_2)\\ \beta_{n+1,N}\cos((n+1)^3x_2)\\ (f'_{n,N}(x_3)\beta_{n+1,N}+1)\sin((n+1)^3x_2)\end{pmatrix}E_{n,N}(x_3)$$

и матрицу

$$\varepsilon^0_{n,N}(x)=N^3\begin{pmatrix}\eta_{n,N}(x_3)&\theta_{n,N}(x_3)&0\\ \theta_{n,N}(x_3)&\tau_{n,N}(x_3)&0\\ 0&0&1\end{pmatrix}. \tag{30}$$

Имеют место равенства

$$\operatorname{rot}\widetilde{U}_{n,N}=\varepsilon^0_{n,N}\,\widetilde{U}_{n,N},\qquad \operatorname{rot}U_{n,N}=\varepsilon^0_{n,N}\,U_{n,N}. \tag{31}$$

Доказательство. Непосредственными вычислениями равенства (31) сводятся к системе уравнений (18). □

Замечание 5. Матрица $\varepsilon^0_{n,N}$ равна N^3I в слоях Ω_n^-, Ω_n^+, а также в окрестности множества $\partial\Omega_n^0$. Это следует из (28). Кроме того, справедлива оценка

$$\left\|\frac{\partial\varepsilon^0_{n,N}}{\partial x_j}\right\|\le\frac{C(N)}{2nr_n}. \tag{32}$$

Для $j=1,2$ это верно, поскольку $\varepsilon^0_{n,N}$ зависит только от x_3, а для $j=3$ эта оценка следует из формулы (30) и неравенства (19). Также в силу (21) для $\varepsilon^0_{n,N}$ выполнена оценка вида (2).

Введем еще одну числовую последовательность: положим

$$q_{n,N} = \exp\left(-\sum_{m=N}^{n-1}\left(r_m\sqrt{m^6-N^6} - p_{m,N}(m+1)^3/2\right)\right)$$

при $n > N$ и $q_{N,N} = 1$. Также нам понадобятся гладкие монотонные функции на интервале $[0,1]$:

$$\operatorname{supp} h' \subset (2/3,1), \quad h(2/3) = 1, \quad h(1) = 0,$$

$$\operatorname{supp} \widetilde{h}' \subset (0,1/3), \quad \widetilde{h}(0) = 0, \quad \widetilde{h}(1/3) = 1.$$

Введем еще функции на интервалах $[a_{n+1}, a_n]$:

$$h_n(t) = h\left(\frac{t-a_{n+1}}{r_n}\right), \quad \widetilde{h}_n(t) = \widetilde{h}\left(\frac{t-a_{n+1}}{r_n}\right).$$

В слое Ω_n зададим поле

$$u_{n,N}(x) = q_{n+1,N}\, h_n(x_3)\, U_{n,N}(x) + q_{n,N}\, \widetilde{h}_n(x_3)\, \widetilde{U}_{n,N}(x).$$

Для доказательства следующих двух лемм нам понадобится элементарная оценка для произвольных целых $n \geq N \geq 1$:

$$\sqrt{(n+1)^6-N^6} - \sqrt{n^6-N^6} \geq \frac{(n+1)^6-n^6}{2\sqrt{(n+1)^6-N^6}} \geq \frac{3n^5}{(n+1)^3} \geq \frac{3n^2}{8}.$$

Лемма 5. *Если N достаточно велико, то для любого $n \geq N$ поле $u_{n,N}$ отлично от нуля всюду в слое Ω_n^+. Для матрицы*

$$\varepsilon_{n,N}^+ = N^3 I + \begin{pmatrix} \gamma_1 w_1 - \gamma_2 w_2 & \gamma_1 w_2 + \gamma_2 w_1 & \gamma_1 w_3 \\ \gamma_1 w_2 + \gamma_2 w_1 & \gamma_2 w_2 - \gamma_1 w_1 & \gamma_2 w_3 \\ \gamma_1 w_3 & \gamma_2 w_3 & -\gamma_1 w_1 - \gamma_2 w_2 \end{pmatrix}, \quad (33)$$

где

$$\gamma(x) = [h_n'(x_3)e_3, U_{n,N}(x)], \quad w = q_{n+1,N}\, u_{n,N}/|u_{n,N}|^2,$$

в том же слое выполнено равенство

$$\operatorname{rot} u_{n,N} = \varepsilon_{n,N}^+\, u_{n,N}, \quad (34)$$

а также соотношение вида (2) *и оценка вида* (32).

Доказательство. В Ω_n^+ выполнено

$$f_{n,N}(x_3) = -2p_{n,N}, \quad \widetilde{f}_{n,N}(x_3) = 0. \quad (35)$$

Используя, что

$$q_{n+1,N}/q_{n,N} = \exp\left(-r_n\sqrt{n^6-N^6} + p_{n,N}(n+1)^3/2\right),$$

получаем

$$\frac{q_{n+1,\,N}E_{n,\,N}(x_3)}{q_{n,\,N}\widetilde{E}_{n,\,N}(x_3)} = \exp\Big(\sqrt{(n+1)^6-N^6}\,(x_3-a_{n+1})-3p_{n,\,N}(n+1)^3/2 \\ -\sqrt{n^6-N^6}\,(x_3-a_n+r_n)\Big).$$

Показатель экспоненты линеен по x_3, поэтому он максимален в точке $x_3=a_n$, когда $x\in\Omega_n$. Для его максимального значения имеем:

$$-\frac{1}{2}\Big(\sqrt{(n+1)^6-N^6}-\sqrt{n^6-N^6}\Big)\,r_n\le-\frac{3}{16}\,n^2r_n\le-\frac{3}{16}\sqrt{n}$$

(мы воспользовались (2), а затем (8)), поэтому

$$\frac{q_{n+1,\,N}E_{n,\,N}}{q_{n,\,N}\widetilde{E}_{n,\,N}}\le\exp\big(-3\sqrt{n}/16\big). \tag{36}$$

Нетрудно проверить, что

$$|U_{n,\,N}(x)|=E_{n,\,N}(x_3),\quad |\widetilde{U}_{n,\,N}(x)|=\widetilde{E}_{n,\,N}(x_3)$$

(в первом равенстве используется постоянство функции $f_{n,\,N}(x_3)$ в Ω_n^+ – см. (35)), поэтому с учетом (36)

$$\frac{q_{n+1,\,N}|U_{n,\,N}|}{q_{n,\,N}|\widetilde{U}_{n,\,N}|}\le\exp\big(-3\sqrt{n}/16\big). \tag{37}$$

Из этой оценки и равенства $\widetilde{h}_n(x_3)=1$ следует, что

$$|u_{n,\,N}(x)|\ge q_{n,\,N}|\widetilde{U}_{n,\,N}(x)|-h_n(x_3)\,q_{n+1,\,N}|U_{n,\,N}(x)| \\ \ge\big(1-\exp(-3\sqrt{n}/16)\big)\,q_{n,\,N}|\widetilde{U}_{n,\,N}(x)|\ge\lambda\,q_{n,\,N}|\widetilde{U}_{n,\,N}(x)| \tag{38}$$

(здесь $\lambda=1-\exp(-3/16)>0$), а эта величина положительна в Ω_n^+.

Из (31) и замечания 5 следует, что в Ω_n^+ выполнено

$$\operatorname{rot}U_{n,\,N}=N^3U_{n,\,N},\quad \operatorname{rot}\widetilde{U}_{n,\,N}=N^3\widetilde{U}_{n,\,N},$$

поэтому с учетом $\widetilde{h}_n(x_3)=1$

$$\operatorname{rot}u_{n,\,N}-N^3u_{n,\,N}=\operatorname{rot}\big(q_{n+1,\,N}h_n(x_3)U_{n,\,N}\big)-q_{n+1,\,N}h_n(x_3)U_{n,\,N} \\ =q_{n+1,\,N}[h_n'(x_3)e_3,U_{n,\,N}]=q_{n+1,\,N}\,\gamma.$$

Из формулы для γ легко следует, что $\gamma_3=0$, а значит,

$$\langle\operatorname{rot}u_{n,\,N}-N^3u_{n,\,N},e_3\rangle=0.$$

С использованием этих двух равенств можно непосредственным вычислением проверить (34).

Перейдем к условию (2) для $\varepsilon^+_{n,N}$. В силу (8) имеем

$$|\gamma| = |[h'_n e_3, U_{n,N}]| \le C r_n^{-1} |U_{n,N}| \le C n^{3/2} |U_{n,N}|.$$

Воспользуемся этим неравенством, а также (38) и (37):

$$\frac{q_{n+1,N}|\gamma_i (u_{n,N})_k|}{|u_{n,N}|^2} \le \frac{q_{n+1,N}|\gamma|}{|u_{n,N}|} \le \frac{q_{n+1,N}|U_{n,N}|}{|u_{n,N}|} \cdot C n^{3/2}$$

$$\le \frac{q_{n+1,N}|U_{n,N}|}{\lambda\, q_{n,N}|\widetilde{U}_{n,N}|} \cdot C n^{3/2} \le \frac{1}{\lambda} \cdot C n^{3/2} \exp(-3\sqrt{n}/16). \tag{39}$$

Отсюда следует, что выбором достаточно большого N можно сделать второе слагаемое в (33) сколь угодно малым при всех $n \ge N$, что дает (2) для $\varepsilon^+_{n,N}$. Аналогично для производных матрицы $\varepsilon^+_{n,N}$ по любой из координат можно получить оценку вида (39) с более высокой степенью n. Это дает ограниченность по n этих производных, чего более чем достаточно для оценки (32) для $\varepsilon^+_{n,N}$. □

Замечание 6. В окрестности множества $\partial\Omega^+_n$, лежащей в Ω_n, матрица $\varepsilon^+_{n,N}$ равна $N^3 I$. Это следует из того, что в окрестностях точек $a_n - r_n/3$ и a_n функция h_n постоянна.

Лемма 6. *Если N достаточно велико, то для любого $n \ge N$ поле $u_{n,N}$ отлично от нуля всюду в слое Ω^-_n. Для матрицы*

$$\varepsilon^-_{n,N} = N^3 I + \begin{pmatrix} \widetilde{\gamma}_1\widetilde{w}_1 - \widetilde{\gamma}_2\widetilde{w}_2 & \widetilde{\gamma}_1\widetilde{w}_2 + \widetilde{\gamma}_2\widetilde{w}_1 & \widetilde{\gamma}_1\widetilde{w}_3 \\ \widetilde{\gamma}_1\widetilde{w}_2 + \widetilde{\gamma}_2\widetilde{w}_1 & \widetilde{\gamma}_2\widetilde{w}_2 - \widetilde{\gamma}_1\widetilde{w}_1 & \widetilde{\gamma}_2\widetilde{w}_3 \\ \widetilde{\gamma}_1\widetilde{w}_3 & \widetilde{\gamma}_2\widetilde{w}_3 & -\widetilde{\gamma}_1\widetilde{w}_1 - \widetilde{\gamma}_2\widetilde{w}_2 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

где

$$\widetilde{\gamma}(x) = [\widetilde{h}'_n(x_3)e_3, \widetilde{U}_{n,N}(x)], \quad \widetilde{w} = q_{n,N}\, u_{n,N}/|u_{n,N}|^2,$$

в том же слое выполнено равенство

$$\operatorname{rot} u_{n,N} = \varepsilon^-_{n,N}\, u_{n,N},$$

а также соотношение вида (2) и оценка вида (32).

Доказательство. В Ω^-_n, в отличие от (35), выполнено $f_{n,N}(x_3) = 0$, а $\widetilde{f}_{n,N}(x_3)$ постоянна и удовлетворяет неравенству (29). Рассмотрим отношение

$$\frac{q_{n,N}\widetilde{E}_{n,N}(x_3)}{q_{n+1,N}E_{n,N}(x_3)} = \exp\Big(n^3 \widetilde{f}_n(x_3) + \sqrt{n^6 - N^6}\,(x_3 - a_n + r_n)$$

$$- \sqrt{(n+1)^6 - N^6}\,(x_3 - a_{n+1}) - p_{n,N}(n+1)^3/2\Big).$$

С помощью (29) напишем оценку для максимального значения показателя экспоненты в слое Ω_n, которое достигается в точке $x_3 = a_{n+1}$:

$$\begin{aligned} &n^3 \widetilde{f}_n(a_{n+1}) - p_{n,N}(n+1)^3/2 \le -p_{n,N}(n+1)^3/6 \\ &= -\left(\sqrt{(n+1)^6 - N^6} - \sqrt{n^6 - N^6}\right) r_n/6 \le -n^2 r_n/16 \le -\sqrt{n}/16 \end{aligned}$$

(мы воспользовались (2), а затем (8)). Таким образом, мы получаем оценку, аналогичную (36):

$$\frac{q_{n,N}\widetilde{E}_{n,N}}{q_{n+1,N}E_{n,N}} \le \exp(-\sqrt{n}/16).$$

Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству леммы 5. □

Сделаем замечание, вполне аналогичное замечанию 6.

Замечание 7. В окрестности множества $\partial\Omega_n^-$, лежащей в Ω_n, матрица ε равна $N^3 I$.

Лемма 7. *Пусть N таково, что выполнены утверждения лемм* 5, 6 *(см. также замечание* 3*). Матрица*

$$\varepsilon_{n,N}(x) = \begin{cases} \varepsilon^0_{n,N}(x), & x \in \Omega^0_n, \\ \varepsilon^+_{n,N}(x), & x \in \Omega^+_n, \\ \varepsilon^-_{n,N}(x), & x \in \Omega^-_n. \end{cases}$$

является гладкой в слое Ω_n, и имеет место равенство

$$\operatorname{rot} u_{n,N} = \varepsilon_{n,N}\, u_{n,N}. \tag{41}$$

Доказательство. Гладкость $\varepsilon_{n,N}$ следует из замечаний 5–7. Из лемм 5 и 6 следует, что равенство (41) выполнено в $\Omega^+_n \cup \Omega^-_n$. При $x \in \Omega^0_n$ имеем $h_n(x_3) = \widetilde{h}_n(x_3) = 1$, тогда (41) следует из равенств (31) и формулы для $u_{n,N}$. □

Нам также понадобится

Лемма 8. *Для любого мультииндекса l при $n \to \infty$ выполнено*

$$\max_{x\in\Omega_n} |D^l_x u_{n,N}(x)| \to 0.$$

Доказательство. Оценим показатель экспоненты $E_{n,\,N}$:

$$(n+1)^3(f_{n,\,N}+\beta_{n+1,\,N}(x_3-a_{n+1}))\le(n+1)^3r_n\le 8Cn^2, \qquad (42)$$

Здесь мы воспользовались тем, что $f_{n,\,N}\le 0$, $\beta_{n+1,\,N}<1$, а также неравенством

$$r_n\le Cn^{-1}, \qquad (43)$$

что следует из (7). Для показателя $\widetilde{E}_{n,\,N}$ имеем

$$n^3(\widetilde{f}_{n,\,N}+\beta_{n,\,N}(x_3-a_n))\le n^3p_{n,\,N}/3\le C(N)\,n \qquad (44)$$

(мы воспользовались (29), (16) и (43)).

Пусть M – минимальное целое число, такое что

$$M\ge\max\{2N,6\,C(N)\}$$

(здесь $C(N)$ – константа из оценки (16)). Оценим снизу слагаемые суммы, входящей в определение $q_{n,\,N}$, при $m\ge M$:

$$\begin{aligned}r_m\sqrt{m^6-N^6}-p_{m,\,N}(m+1)^3/2&\ge r_m\left(m^3/2-C(N)m^2\right)\\&\ge r_m m^3/3\ge m^{3/2}/3.\end{aligned}$$

Здесь мы применили неравенства (16) и (8), а также определение M. Отсюда (при $n>M$)

$$\begin{aligned}&\sum_{m=N}^{n-1}\Bigl(r_m\sqrt{m^6-N^6}-p_{m,\,N}(m+1)^3/2\Bigr)\\&\ge\sum_{m=N}^{M-1}\Bigl(r_m\sqrt{m^6-N^6}-p_{m,\,N}(m+1)^3/2\Bigr)+\sum_{m=M}^{n-1}m^{3/2}/3\\&=A(N)+\sum_{m=1}^{n-1}m^{3/2}/3.\end{aligned}$$

Из условия $n>M\ge 2$ следует, что для некоторой константы $c>0$ верно

$$\sum_{m=1}^{n-1}m^{3/2}/3\ge c\,n^{5/2}.$$

Вместе с предыдущей оценкой это означает, что при $n>M$

$$q_{n,\,N}\le\exp\left(-A(N)-c\,n^{5/2}\right),$$

а значит, в силу (42) и (44), для достаточно больших n верно

$$q_{n+1,\,N}E_{n,\,N},\ q_{n,\,N}\widetilde{E}_{n,\,N} \le \exp(-c\,n^{5/2}/2). \tag{45}$$

Положим

$$G_{n,\,N}(t) = \ln E_{n,\,N}(t), \quad \widetilde{G}_{n,\,N}(t) = \ln \widetilde{E}_{n,\,N}(t).$$

Легко проверить, что верна оценка

$$|E^{(k)}_{n,\,N}(t)| \le C(k)\,E_{n,\,N}(t)\sum_{j\le k}|G^{(j)}_{n,\,N}(t)|$$

и аналогичная оценка для $\widetilde{E}^{(k)}_{n,\,N}$. Однако, из формул для $E_{n,\,N}$, $\widetilde{E}_{n,\,N}$ и из замечания 4 видно, что для каждого j величины

$$\max|G^{(j)}_{n,\,N}(\cdot)|, \quad \max|\widetilde{G}^{(j)}_{n,\,N}(\cdot)|$$

при $n\to\infty$ растут не быстрее степени n. Но тогда оценку (45) можно обобщить следующим образом

$$q_{n+1,\,N}E^{(k)}_{n,\,N},\ q_{n,\,N}\widetilde{E}^{(k)}_{n,\,N} \le \widetilde{C}(k)\,n^{P(k)}\exp(-c\,n^{5/2}/2). \tag{46}$$

Рассмотрим первое слагаемое в формуле для u. Если записать $U_{n,\,N}(x)$ как $W_{n,\,N}(x)E_{n,\,N}(x)$, то это слагаемое представляется в виде произведения $q_{n+1,\,N}E_{n,\,N}(x_3)$ и $h_n(x_3)W_{n,\,N}(x)$. Ясно, что

$$\max_{x\in\Omega_n}\left|D^l_x\,(h_n(x_3)W_{n,\,N}(x))\right| \le C(N,l)\,r_n^{-|l|-1}\,n^{3|l|},$$

что вместе с (8) приводит к степенной оценке. Тогда в силу (46) максимумы в Ω_n абсолютных величин всех производных произведения

$$q_{n+1,\,N}h_n(x_3)\,U_{n,\,N}(x)$$

стремятся к нулю при $n\to\infty$. Повторив это рассуждение для слагаемого $q_{n,\,N}\,\widetilde{h}_n(x_3)\,\widetilde{U}_{n,\,N}(x)$, мы получим утверждение леммы. □

§3. Доказательство теоремы 2

Здесь мы определим поле u и матрицу ε с помощью конструкций из предыдущего параграфа. Мы зафиксируем *четное* число N, удовлетворяющее условию леммы 7, а также неравенству $a_N \le L$.

Для четных n в слое Ω_n положим

$$u = u_{n,\,N}, \quad \varepsilon = \varepsilon_{n,\,N}. \tag{47}$$

Лемма 7 гарантирует равенство (4).

Далее мы определим поле u и матрицу ε в Ω_n для нечетных n. Положим

$$P = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = (\pi/n^3)\, e_1,$$

и определим u и ε следующим образом:

$$u(x) = P^t\, u_{n,\,N}(Px+y), \quad \varepsilon(x) = P^t \varepsilon_{n,\,N}(Px+y)\, P. \tag{48}$$

Это определение корректно, поскольку $Px + y \in \Omega_n$, если $x \in \Omega_n$. С помощью леммы 7 и формулы (11) проверим, что выполнено равенство (4):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} u(x) &= P^t\, (\operatorname{rot} u_{n,\,N})(Px+y) = P^t \varepsilon_{n,\,N}(Px+y)\, u_{n,\,N}(Px+y) \\ &= P^t \varepsilon_{n,\,N}(Px+y)\, Pu(x) = \varepsilon(x)\, u(x) \end{aligned}$$

(здесь используется ортогональность матрицы P).

Поле u в окрестности плоскости $\{x_3 = a_n\}$ имеет вид

$$\begin{aligned} u(x) &= q_{n,\,N} \widetilde{U}_{n,\,N}(x) \\ &= q_{n,\,N} P^t \begin{pmatrix} -\beta_{n,\,N} \cos(n^3 x_2) \\ \alpha_{n,\,N} \cos(n^3 x_2) \\ \sin(n^3 x_2) \end{pmatrix} \widetilde{E}_{n,\,N}(x_3) \\ &= q_{n,\,N} \begin{pmatrix} \alpha_{n,\,N} \cos(n^3 x_2) \\ \beta_{n,\,N} \cos(n^3 x_2) \\ \sin(n^3 x_2) \end{pmatrix} \widetilde{E}_{n,\,N}(x_3), \end{aligned}$$

а в окрестности $\{x_3 = a_{n+1}\}$ имеем

$$\begin{aligned} u(x) &= q_{n+1,\,N} U_{n,\,N}(x) \\ &= q_{n+1,\,N} P^t \begin{pmatrix} \alpha_{n+1,\,N} \cos((n+1)^3 x_1) \\ \beta_{n+1,\,N} \cos((n+1)^3 x_1) \\ \sin((n+1)^3 x_1) \end{pmatrix} E_{n,\,N}(x_3) \\ &= q_{n+1,\,N} \begin{pmatrix} \beta_{n+1,\,N} \cos((n+1)^3 x_1) \\ -\alpha_{n+1,\,N} \cos((n+1)^3 x_1) \\ \sin((n+1)^3 x_1) \end{pmatrix} E_{n,\,N}(x_3). \end{aligned}$$

Сопоставляя эти формулы с определением u для четных n, получаем, что значения u справа и слева от плоскости $\{x_3 = a_n\}$ согласованы при всех $n > N$. Согласованность значений матрицы ε следует из того, что в окрестности каждой такой плоскости она равна $N^3 I$ (см. замечания 6, 7).

Замечание 8. В каждом слое Ω_n для матрицы ε справедлива оценка вида (32):

$$\left\| \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right\| \le \frac{C(N)}{2nr_n}, \tag{49}$$

а также оценка вида (2). В самом деле, замечание 5 и леммы 5, 6 позволяют написать эти оценки для матрицы $\varepsilon_{n,N}$ на всем слое Ω_n. Поэтому (49) и (2) справедливы при четных n в силу (47). Для нечетных n оценка (2) следует из самой формулы (48), а (49) следует из равенств

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_1}(x) = P^t \left(\frac{\partial \varepsilon_{n,N}}{\partial x_2} \right) (Px + y)\, P,$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_2}(x) = -P^t \left(\frac{\partial \varepsilon_{n,N}}{\partial x_1} \right) (Px + y)\, P,$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x_3}(x) = P^t \left(\frac{\partial \varepsilon_{n,N}}{\partial x_3} \right) (Px + y)\, P,$$

и ортогональности матрицы P.

Так как мы выбрали число N четным, поле u можно гладко продолжить на полупространство $\{x_3 > a_N\}$, положив

$$u(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos(N^3 x_1) \\ \sin(N^3 x_1) \end{pmatrix}.$$

Это видно из формулы для $u_{n,N}$. Таким образом, имеет место (5). В полупространстве $\{x_3 < 0\}$ положим $u = 0$. Проверим, что это продолжение является гладким полем. Из леммы 8 следует, что

$$\max_{x \in \Omega_n} |D_x^l u(x)| \to 0 \tag{50}$$

при четных $n \to \infty$. Рассмотрим нечетные n. Имеем

$$D_x^{(l_1, l_2, l_3)} u(x) = (-1)^{l_2} P^t \left(D_x^{(l_2, l_1, l_3)} u_{n,N} \right) (Px + y)$$

Поскольку матрица P ортогональна, а отображение $x \mapsto Px + y$ однозначно отображает слой Ω_n в себя, получаем

$$\max_{x \in \Omega_n} |D_x^l u(x)| = \max_{x \in \Omega_n} |D_x^l u_{n,N}(x)|.$$

Тогда по лемме 8, соотношение (50) верно и для нечетных n. Таким образом, все производные поля u стремятся к нулю при $x_3 \to 0+$ равномерно по x_1, x_2, что и доказывает гладкость u.

Доопределим ε вне слоя $\{0 \le x_3 \le a_N\}$ значением $N^3 I$, что согласуется с (6). Нужно убедиться в непрерывности нашего продолжения ε, что представляет сложность лишь при $x_3 \to +0$. С учетом равенства

$$\varepsilon(x_1, x_2, a_n) = N^3 I$$

имеем

$$|\varepsilon(x_1, x_2, x_3) - N^3 I| = |\,\varepsilon(x_1, x_2, x_3) - \varepsilon(x_1, x_2, a_n)| \le \frac{C(N)}{2n},$$

так как во всем n-ом слое выполнено (49). Следовательно, $\varepsilon \to N^3 I$ при $x_3 \to +0$ (или при $n \to \infty$).

Докажем неравенство (3). Ясно, что достаточно рассмотреть слой $\{0 < x_3 < a_N\}$. Для определенности будем считать, что $x_3' \le x_3$, а также $x_3 \in [a_{n+1}, a_n]$, $x_3' \in [a_{m+1}, a_m]$. Положим

$$\widetilde{x} = (x_1, x_2, a_{n+1}), \quad \widetilde{x}' = (x_1', x_2', a_m).$$

По (49) и (10) имеем

$$|\,\varepsilon(x) - \varepsilon(\widetilde{x})| \le \frac{C(N)}{2nr_n}\,|\,x - \widetilde{x}| \le \frac{C(N)}{2}\,\varphi(|x - \widetilde{x}|).$$

То же верно для пары $x', \widetilde{x}'$. Пусть $m > n$. Докажем (3), опираясь на полученную оценку и монотонность φ:

$$\begin{aligned}
|\,\varepsilon(x) - \varepsilon(x')| &\le |\,\varepsilon(x) - N^3 I| + |\,\varepsilon(x') - N^3 I| \\
&= |\,\varepsilon(x) - \varepsilon(\widetilde{x})| + |\,\varepsilon(x') - \varepsilon(\widetilde{x}')| \\
&\le C(N)(\varphi(x_3 - a_{n+1}) + \varphi(a_m - x_3'))/2 \\
&\le C(N)\,\varphi(|x - x'|).
\end{aligned}$$

Пусть теперь $m = n$. Если $|x - x'| > r_n$, то

$$\begin{aligned}
|\,\varepsilon(x) - \varepsilon(x')| &\le |\,\varepsilon(x) - N^3 I| + |\,\varepsilon(x') - N^3 I| \\
&= |\,\varepsilon(x) - \varepsilon(\widetilde{x})| + |\,\varepsilon(x') - \varepsilon(\widetilde{x}')| \\
&\le C(N)\,\varphi(r_n) \le C(N)\varphi(|x - x'|).
\end{aligned}$$

Наконец, неравенство (3) для случая $|x - x'| \le r_n$ прямо следует из (49) и (10).

§4. Доказательство теоремы 1

Мы можем считать, что константа L в теореме 2 меньше 1/2. Положим

$$Q = \operatorname{diag}(1,-1,-1), \quad b = \frac{\pi}{\omega}e_1 + \frac{3}{2}e_3,$$
$$\widetilde{u}(x) = Q\,u(Qx+b), \quad \widetilde{\varepsilon}(x) = Q\,\varepsilon(Qx+b)\,Q.$$

С помощью формулы (11) легко проверить равенство

$$\operatorname{rot}\widetilde{u} = \widetilde{\varepsilon}\widetilde{u}.$$

Далее

$$v(x) = \begin{cases} u(x-e_3/2), & x_3 \le 1, \\ \widetilde{u}(x), & x_3 > 1, \end{cases}$$
$$\varkappa(x) = \begin{cases} \varepsilon(x-e_3/2), & x_3 \le 1, \\ \widetilde{\varepsilon}(x), & x_3 > 1. \end{cases}$$

Из соотношений (5), (6) следует, что поля $u(x-e_3/2)$ и $\widetilde{u}(x)$, а также матрицы $\varepsilon(x-e_3/2)$ и $\widetilde{\varepsilon}(x)$ гладко сшиваются на плоскости $\{x_3=1\}$. При этом $\varkappa$ удовлетворяет условиям (2), (3), и выполнены соотношения

$$\begin{aligned} &\operatorname{rot} v = \varkappa v, \\ &\operatorname{supp} v \subset \{x \,:\, 1/2 \le x_3 \le 3/2\}. \end{aligned} \tag{51}$$

Введем отображение

$$\widehat{x}(x) = \begin{pmatrix} \cos x_1\,(2 - x_3\sin x_2) \\ \sin x_1\,(2 - x_3 \sin x_2) \\ x_3\cos x_2 \end{pmatrix}.$$

В слое

$$\Omega = \{x \,:\, x_3 \in (1/4, 7/4)\}$$

это отображение не имеет критических точек. Образом Ω является (ограниченный) тороидальный слой, который мы обозначим $\widehat{\Omega}$. Поле $\widehat{v}$ в $\widehat{\Omega}$, заданное соотношением

$$\widehat{v}(\widehat{x}(x)) = \left(J^{-1}\right)^t v(x), \quad J_{ik} = \frac{\partial \widehat{x}_i}{\partial x_k},$$

является гладким в $\widehat{\Omega}$, поскольку v и отображение $\widehat{x}(x)$ 2π-периодичны по x_1, x_2. Кроме того, v финитно в $\widehat{\Omega}$ в силу (51). Можно проверить, что для матрицы $\widehat{\varkappa}$, заданной соотношением

$$\widehat{\varkappa}(\widehat{x}(x)) = (\det J)^{-1} \cdot J\varkappa(x)J^t$$

(корректность определения следует из 2π-периодичности $\varkappa$ по переменным x_1, x_2), в области $\widehat{\Omega}$ выполнены условия вида (2), (3). По формуле (11) имеет место равенство

$$\operatorname{rot}\widehat{v} = \widehat{\varkappa}\widehat{v}.$$

Если продолжить поле $\widehat{v}$ нулем вне $\widehat{\Omega}$ и положить

$$\widehat{\varepsilon} = f\widehat{\varkappa} + (1-f)I, \quad f \in C_0^\infty(\widehat{\Omega}), \quad f\big|_{\operatorname{supp}\widehat{v}} = 1,$$

то, очевидно, выполнено равенство $\operatorname{rot}\widehat{v} = \widehat{\varepsilon}\widehat{v}$ и условия вида (2), (3) для $\widehat{\varepsilon}$. Построение матрицы $\widehat{\varepsilon}$ и поля $\widehat{v}$ завершает доказательство теоремы 1.

Литература

1. M. Eller, M. Yamamoto, *A Carleman inequality for the stationary anisotropic Maxwell system.* — J. Math. Pures Appl. **86** (2006), 449–462.
2. Т. Суслина, *Абсолютная непрерывность спектра периодического оператора Максвелла в слое.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **288** (2002), с. 232–255.
3. Н. Филонов, *Эллиптическое уравнение второго порядка в дивергентной форме, имеющее решение с компактным носителем.* — Проблемы мат. анализа **22** (2001), 246–257.
4. K. Miller, *Nonunique continuation for uniformly parabolic and elliptic equations in self-adjoint divergence form with Hölder continuous coefficients.* — Arch. Rat. Mech Anal. **54** (1974), No. 2, 105–117.
5. A. Pliŝ, *On non-uniqueness in Cauchy problem for an elliptic second order equation.* — Bull. de l'Acad. Polon. Sc., série Sc., Math., Astr., Phys. **11** (1963), No. 3, 95–100.

Demchenko M. N. Nonunique continuation for the Maxwell system.

We give an example of the stationary Maxwell system, which has nontrivial smooth solution with compact support; the coefficients ε, μ belong to C^α for all $\alpha < 1$. Our example shows that the stationary Maxwell system does not possess the unique continuation property in case of nonsmooth coefficients.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 28 сентября 2011 г.