Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 393, 2011 г.

Ю. Г. Видеман, В. Киадо Пиат, С. А. Назаров

АСИМПТОТИКА ЧАСТОТЫ ПОВЕРХНОСТНОЙ ВОЛНЫ, ЗАХВАЧЕННОЙ СЛЕГКА НАКЛОНЕННЫМ ЭКРАНОМ В СЛОЕ ЖИДКОСТИ

§1. Введение.

1. Постановка задачи. Обозначим

$$\Sigma^0 = \{(y,z) \in \mathbb{R}^2 : \, y = 0, |z+a| \leqslant l\} \tag{1.1}$$

прямой вертикальный экран (сегмент прямой) внутри полосы

$$\Pi = \mathbb{R} \times (-d, 0)$$

шириной $d > 0$ (рис. 1a); здесь $0 < a < d$ и $l < \min\{a, d-a\}$, $l > 0$. Зафиксировав угол[1] $\theta \in (0, \pi/2]$, введем наклонный экран

$$\Sigma^\theta = \{(y,z) : \, |z+a| \leqslant l\cos\theta, y\cos\theta = (z+a)\sin\theta\} \tag{1.2}$$

той же самой длины $2l$. В полосе с препятствием-экраном $\Pi^\theta = \Pi \setminus \Sigma^\theta$ (рис. 1b) рассмотрим задачу о волнах на поверхности весомой жидкости, например, воды

$$-\Delta u^\theta(y,z) + k^2 u^\theta(y,z) = 0, \qquad (y,z) \in \Pi^\theta, \tag{1.3}$$

$$\partial_z u^\theta(y,0) = \lambda^\theta u^\theta(y,0), \qquad y \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

$$-\partial_z u^\theta(y,-d) = 0, \qquad y \in \mathbb{R}, \tag{1.5}$$

$$\partial_n u^\theta(y,z) = 0, \qquad (y,z) \in \Sigma^\theta_\pm, \tag{1.6}$$

где Δ – оператор Лапласа, записанный в декартовой системе координат (y,z), k – волновое число в направлении x, перпендикулярном плоскости $\mathbb{R}^2 \ni (y,z)$, u^θ – потенциал скоростей, $\lambda^\theta = \omega^2/g$ – спектральный параметр, ω – частота гармонических колебаний, $g > 0$ –

Ключевые слова: захваченные волны на поверхности жидкости, дискретный спектр, асимптотика собственного числа.

Работа С. А. Назарова поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 09-01-00759).

[1]Случай $\theta \in (\pi/2, \pi)$ сводится к рассматриваемому зеркальным отражением $(y,z) \mapsto (-y,z)$.

ускорение свободного падения, $\partial_z = \partial/\partial z$ и ∂_n – производная вдоль внешней нормали. Подчеркнем, что $\partial_n = \partial_z$ и $\partial_n = -\partial_z$ на свободной поверхности жидкости $\Gamma = \{(y,z) : y = 0\}$ и на дне водоема $B = \{(y,z) : y = -d\}$ соответственно, и

$$\partial_n = \mp \cos\theta \partial_y \pm \sin\theta \partial_z, \tag{1.7}$$

на поверхностях $\Sigma^\theta_\pm$ экрана (1.2) (знаками плюс и минус отмечаются соответственно правый и левый берега разреза на рис. 1a и 1b). Задача (1.3)–(1.6) отвечает косому набеганию волны

$$e^{-i\omega t} e^{ikx} u^\theta(y,z) \tag{1.8}$$

(t – временной параметр) на жесткую полосу

$$\{(x,y,z) : x \in \mathbb{R}, (y,z) \in \Sigma^\theta\} \tag{1.9}$$

в слое жидкости (подробно постановка двумерных задач линейной теории поверхностных волн описана, например, в монографии [1]).

Вариационная формулировка задачи (1.3)–(1.6) апеллирует к интегральному тождеству [2]

$$(\nabla u^\theta, \nabla v^\theta)_{\Pi^\theta} + k^2 (u^\theta, v^\theta)_{\Pi^\theta} = \lambda^\theta (u^\theta, v^\theta)_\Gamma, \quad v^\theta \in H^1(\Pi^\theta), \tag{1.10}$$

в котором ∇ – оператор-градиент, $(\,,)_{\Pi^\theta}$ и $(\,,)_\Gamma$ – скалярные произведения в пространствах Лебега $L_2(\Pi^\theta)$ и $L_2(\Gamma)$ соответственно, а $H^1(\Pi^\theta)$ – пространство Соболева.

Известно (см. [3] и, например, [1]), что непрерывный спектр $\sigma_c = \sigma_c^\theta$ задачи (1.3)–(1.6) (или (1.10)) совпадает с лучом $[\lambda_\dagger, +\infty)$ и имеет нижнюю грань $\underline{\sigma_c}$ – порог

$$\underline{\sigma_c} = \lambda_\dagger = k \frac{1 - e^{-2kd}}{1 + e^{-2kd}}. \tag{1.11}$$

Основная цель статьи – исследование дискретного спектра σ_d^θ задачи, который может появиться на интервале $(0, \lambda_\dagger)$ вещественной оси ниже непрерывного спектра. Точкам дискретного спектра отвечают захваченные волны – решения $u^\theta \in H^1(\Pi^\theta)$ задачи (1.3)–(1.6), экспоненциально затухающие при $y \to \pm\infty$. Таким образом, волна (1.8) локализована вблизи препятствия (1.9) и бежит вдоль него в положительном направлении оси x.

В статье будут доказаны две следующие теоремы.

Рис. 1. Волновод с вертикальным (a) и наклонным (b) экранами.

Теорема 1.1. *Если $\theta = 0$, то дискретный спектр пуст, но в случае $\theta > 0$ он содержит по крайней мере одно собственное число $\lambda_1^\theta \in (0, \lambda_\dagger)$.*

Теорема 1.2. *Существует такая, зависящая от параметров a, l и d, величина $\theta_0 \in (0, \pi/2)$, что при $\theta \in (0, \theta_0)$ дискретный спектр σ_d^θ состоит из единственного собственного числа*

$$\lambda_1^\theta = \lambda_\dagger - \theta^4 L + O(|\theta|^5), \tag{1.12}$$

где множитель $L > 0$ определен формулами (3.17) *и* (3.45).

Простое доказательство теоремы 1.1 дано в [4, 5] и далее оно воспроизведено в сжатой форме. Например, утверждение для случая $\theta = 0$ получается интегрированием по $y \in \mathbb{R}$ одномерного неравенства

$$\lambda_\dagger |U(0)|^2 \leqslant \int\limits_{-d}^{0} \left(|\partial_z U(z)|^2 + k^2 |U(z)|^2\right) dz, \quad U \in H^1(-d, 0). \tag{1.13}$$

В результате приходим к соотношению

$$\begin{gathered} \lambda_\dagger \|u^0; L_2(\Gamma)\|^2 \leqslant \|\nabla u^0; L_2(\Pi^0)\|^2 + k^2 \|u^0; L_2(\Pi^0)\|^2, \\ u^0 \in H^1(\Pi^0). \end{gathered} \tag{1.14}$$

которое, в свою очередь, устанавливает, что не существует нетривиальной функции $u^0 \in H^1(\Pi^0)$, удовлетворяющей задаче (1.10) с параметрами $\theta = 0$ и $\lambda^0 \in (0, \lambda_\dagger)$. Отметим, что, во-первых, вертикальный экран (1.1), проецирующийся в одну точку $y = 0$ на оси абсцисс, не препятствует интегрированию и, во-вторых, величина (1.11) есть ничто иное как первое (наименьшее) собственное число одномерной спектральной задачи Стеклова

$$\begin{gathered} -\partial_z^2 U(z) + k^2 U(z) = 0, \quad z \in (-d, 0), \\ \partial_z U(0) = \Lambda U(0), \quad -\partial_z U(-d) = 0, \end{gathered} \tag{1.15}$$

а соотношение (1.13) – прямое следствие минимального принципа (см., например, [6, теорема 10.2.1], а также формулу (5.9) с $p = 1$). Первая

собственная функция $U_\dagger$ задачи (1.15) имеет вид

$$U_\dagger(z) = e^{kz} + e^{-k(z+2d)}. \tag{1.16}$$

Окончание проверки теоремы 1.1 проведено в п. 2, §5.

Теорема 1.2 оказывается намного более сложной, и ее доказательство в статье разбито на несколько этапов. В §2 исследуется предельная ($\theta = 0$ и $\lambda^\theta = \lambda_\dagger$) задача с пороговым значением (1.11) спектрального параметра

$$-\Delta u(y,z) + k^2 u(y,z) = f(y,z), \quad (y,z) \in \Pi^0, \tag{1.17}$$

$$\partial_z u(y,0) = \lambda_\dagger u(y,0), \quad -\partial_z u(y,-d) = 0, \ y \in \mathbb{R}, \tag{1.18}$$

$$\mp\partial_y u(\pm 0, z) = g_\pm(z), \quad z \in (-a-l, -a+l). \tag{1.19}$$

В §3 представлен формальный асимптотический анализ спектральной задачи (1.3)–(1.6), причем используются два подхода – возмущение области рассматривается как регулярное и как сингулярное. Первый позволяет без особых хлопот построить несколько членов асимптотических разложений, но только второй дает приемлемую форму для одного из коэффициентов разложений, используемого при выводе соотношения (1.12). Отметим также, что формальный асимптотический анализ, даже порядок θ^4 основной поправки, и схема обоснования, представленная в §4, существенно отличаются от случая спектральных краевых задач в ограниченных областях (ср. п. 1, §5).

2. Существование захваченных волн и асимптотика собственных чисел для волноводов. В классических работах Ф. Урселла [7, 8] было установлено, что любое погруженное тело $\overline{\Theta} \subset \Pi$ положительного объема приводит к возникновению собственного числа задачи (1.3)–(1.6) в области $\Pi \setminus \overline{\Theta}$, расположенного ниже непрерывного спектра. Сначала [7] результат был получен для круга Θ_ϱ (малого) радиуса $\varrho > 0$, а затем [8] при помощи принципа сравнения, утверждающего, что в случае тела $\Theta \supset \Theta_\varrho$ собственное число разве лишь уменьшается и потому остается на интервале $(0, \lambda_\dagger)$, результат установлен в полном объеме. Другой подход применен в работе [9] для аналогичного вывода в случае “подводного хребта” (множество Θ примыкает ко дну B водоема). Тем не менее, оба подхода непригодны для полосы с экраном (1.2), имеющим нулевую площадь. В то же время новый метод, разработанный в [4, 5], основанный на понятии следового оператора [10] и привлекающий элементы теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве, при помощи

достаточно простых выкладок приводит к результату, сформулированному в теореме 1.1 (см. п. 2, §5).

Исследованию задач дифракции поверхностных волн на препятствиях в виде экранов и тонких пластин, полупогруженных и погруженных, прямых и искривленных, вертикальных, горизонтальных и наклоненных, посвящено большое количество публикаций, инициированных работами Ф. Урселла [11] и Ф. Йона [12] (см. [13–19], а также список литературы в обзоре [20]). Они, в основном, относятся к двумерным задачам или к трехмерным в случае бесконечной протяженности экрана в одном из горизонтальных направлений. Наиболее близкой по постановке является задача [15] о двумерном полупогруженном экране, полученным симметричным возмущением одномерного отрезка $\{(y,z):\ y=0, z\in[-b,0]\}$, однако цель и метод исследования в статье [15] (описание дифракционной картины и анализ интегральных уравнений) отличаются от представленных в данной работе. Численные результаты о существовании волн, захваченных тонкими пластинами-экранами, приведены в [21–24]. Основанное на вариационном методе [25] (см. также [26]) строгое доказательство появление дискретного спектра в случае наклонного экрана приведено в [5, 27] при различных постановках задачи о поверхностных волнах (ср. теорему 1.1 и ее проверку в п. 2,§5).

Асимптотический анализ спектральных задач в ограниченных областях с регулярно и сингулярно возмущенными границами интенсивно развивался в 60–80 годы последнего столетия (см., например, монографии [28, гл. 7], [29], [30, гл. 9, 10] и др.). Однако разработанные методы существенно используют дискретность спектра задач в ограниченных областях с гладкими или липшицевыми границами, и их непосредственное обобщение на бесконечные волноводы, в частности, на задачи о поверхностных волнах в неограниченных водоемах, весьма проблематично.

Известные результаты об асимптотике собственных чисел относятся в основном к квантовым волноводам, описываемым спектральным уравнением Гельмгольца с краевыми условиями Дирихле[2] (см., например, [31–33] по поводу цилиндров с локальными регулярными возмущениями поверхностей, [34, 35] и [36] по поводу слабо искривленных

[2]Список публикаций по этой тематике можно значительно расширить – см. литературу в указанных работах.

и изломанных цилиндров, а также [37, 38] по поводу возмущений оператора Гельмгольца малым дифференциальным оператором второго порядка). Во всех исследованиях предельная задача ставится на прямом (невозмущенном) цилиндре, и эта простая геометрическая форма используется как в асимптотических конструкциях, так и при обосновании асимптотики, основанном на применении принципа Бирмана–Швингера или изучении полюсов функций Грина.

В рассматриваемой задаче (1.3)–(1.6) о поверхностных волнах, захваченных погруженным наклонным экраном, предельная задача (1.17)–(1.19) формулируется в полосе Π с вертикальным экраном Σ^0 и поэтому не допускает явных решений, что делает сложным применение упомянутых выше методов. Мы применяем иной подход [26], предложенный изначально для смешанной краевой задачи в цилиндре с малой полостью, совмещающий методы составных и сращиваемых асимптотических разложений (ср. книги [30] и [39] соответственно) и привлекающий теорию спектральной меры (ср. [6, гл. 5 и 6]) для обоснования асимптотических формул.

§2. Предельная задача на пороге.

1. Предварительное обсуждение. В этом параграфе будет проверено, что задача (1.17)–(1.19) с любыми правыми частями f, $g_\pm$, обладающими, например, компактными носителями, имеет решение $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Pi^0)$, представимое в виде

$$u(y,z) = \sum_{\pm} \chi_\pm(y)(b^0_\pm + b^1_\pm y)U_\dagger(z) + \widetilde{u}(y,z). \tag{2.1}$$

При этом линеал $H^1_{\mathrm{loc}}(\Pi^0)$ составлен из функций, которые попадают в пространство $H^1(\Xi)$ на любом ограниченном подмножестве $\Xi \subset \Pi^0$, $\chi_\pm$ – гладкие срезающие функции,

$$\chi_\pm(y) = 0 \quad \text{при} \quad \pm\, y < l, \qquad \chi_\pm(y) = 1 \quad \text{при} \quad \pm\, y > 2l, \tag{2.2}$$

$b^p_\pm$ – некоторые коэффициенты, а остаток $\widetilde{u}(y,z)$ экспоненциально затухает при $y \to \pm\infty$. Напомним, что $U_\dagger$ – первая собственная функция (1.16) задачи Стеклова (1.15).

Кроме того, будет проверено, что у однородной задачи (1.17)–(1.19) есть только два линейно независимых решения, а именно, функция $u^0_\dagger(y,z) = U_\dagger(z)$, не зависящая от продольной переменной y и потому

удовлетворяющая однородным условиям Неймана (1.19) на сторонах $\Sigma^0_\pm$ вертикального экрана (1.1), а также функция

$$u^1_\dagger(y,z) = \sum_\pm \chi_\pm(y)(y \pm b_\dagger)U_\dagger(z) + \widetilde{u}^1_\dagger(y,z), \tag{2.3}$$

в которой $b_\dagger$ – величина, зависящая только от геометрических параметров a, l и d, а $\widetilde{u}^1_\dagger(y,z)$ – экспоненциально затухающий остаток. Подчеркнем, что функция (2.3) нечетна относительно переменной y. Отметим также, что решение (2.1) определено с точностью до линейной комбинации $c^0_\dagger u^0_\dagger + c^1_\dagger u^1_\dagger$, а значит, частное решение u задачи (1.17)–(1.19) может быть подчинено условиям

$$b^1 := b^1_+ = -b^1_-, \quad b^0 := b^0_+ = -b^0_-. \tag{2.4}$$

Ограничение (2.4) делает решение единственным.

Все перечисленные факты будут использованы при построении асимптотики в §3. Весьма вероятно, их можно получить при помощи метода Фурье, однако мы воспользуемся результатами теории эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность (см. ключевые работы [40–43], а также, например, монографию [44]) – применение этих результатов не требует объемистых вычислений. Несмотря на то, что эта теория обычно имеет дело с задачами в классической постановке, переход к обобщенным решениям (ср. интегральное тождество (1.10)) не встречает сколь-нибудь заметных препятствий (см. обзор [45]).

2. Весовые пространства и обобщенные решения задачи на пороге. Следуя [40], введем весовое пространство Соболева $W^1_\beta(\Pi^0)$, которое состоит из функций $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Pi^0)$, обладающих конечной весовой нормой

$$\begin{aligned} \|u; W^1_\beta(\Pi^0)\| &= \|e^{\beta|y|}u; H^1(\Pi^0)\| \\ &= \big(\|e^{\beta|y|}\nabla w; L_2(\Pi^0)\|^2 + \|e^{\beta|y|}w; L_2(\Pi^0)\|^2\big)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Здесь $\beta \in \mathbb{R}$ – показатель веса. Если $\beta > 0$, все функции в $W^1_\beta(\Pi^0)$ экспоненциально затухают на бесконечности, но при $\beta < 0$ пространство $W^1_\beta(\Pi^0)$ включает функции с некоторым экспоненциальным ростом. Понятно, что $W^1_0(\Pi^0) = H^1(\Pi^0)$.

Обобщенная формулировка задачи (1.17)–(1.19) выглядит так: требуется найти функцию $u \in W^1_\beta(\Pi^0)$, удовлетворяющую интегральному

тождеству [2]

$$(\nabla u, \nabla v)_{\Pi^0} + k^2 (u, v)_{\Pi^0} - \lambda_\dagger (u, v)_\Gamma = F(v), \quad v \in W^1_{-\beta}(\Pi^0). \tag{2.6}$$

Здесь $F \in W^1_{-\beta}(\Pi^0)^*$ – линейный непрерывный функционал на пространстве $W^1_{-\beta}(\Pi^0)$. Например, функционал

$$F(v) = \int\limits_{\Pi^0} f(y,z)\overline{v(y,z)}\, dydz + \sum_{\pm} \int\limits_{-a-l}^{-a+l} g_\pm(z)\overline{v(\pm 0, z)}\, dz \tag{2.7}$$

приобретает нужное свойство, если подчинить данные задачи (1.17)–(1.19) требованиям

$$e^{\beta|y|} f \in L_2(\Pi^0), \quad g_\pm \in L_2(-a-l, -a+l),$$

которые, впрочем, можно ослабить.

Задаче (2.6) поставим в соответствие непрерывное отображение

$$W^1_\beta(\Pi^0) \ni u \quad \mapsto \quad A_\beta u = F \in W^1_{-\beta}(\Pi^0)^*. \tag{2.8}$$

Благодаря определению нормы (2.5) оператор A_β – сопряженный для $A_{-\beta}$.

3. Свойства оператора A_β**.** Прежде всего, покажем, что при $\beta > 0$ оператор A_β – мономорфизм, т.е. ядро оператора $\ker A_\beta$ тривиально. Пусть $u \in W^1_\beta(\Pi^0)$ – решение однородной ($F = 0$) задачи (2.6), т.е. $u \in \ker A_\beta$. Поскольку $W^1_\beta(\Pi^0) \subset W^1_{-\beta}(\Pi^0)$, можно подставить u в тождество (2.6) как пробную функцию v и при учете неравенства (1.14) получить, что

$$-\|\partial_y u; L_2(\Pi^0)\|^2 = \|\partial_z u; L_2(\Pi^0)\|^2 + k^2 \|u; L_2(\Pi^0)\|^2 - \lambda_\dagger \|u; L_2(\Gamma)\|^2 \geqslant 0.$$

Таким образом, $\partial_y u = 0$ и $u = 0$ ввиду затухания на бесконечности.

Очередное утверждение – непосредственное следствие упомянутой выше теории эллиптических краевых задач в областях с цилиндрическими выходами на бесконечность.

Теорема 2.1. (см., например, теорему 5.1.4 [44]) 1) *Найдется такое число* $\gamma_0 > 0$, *что при всяком* $\gamma \in (0, \gamma_0)$ *операторы* $A_{\pm\gamma}$ *фредгольмовы, и их индексы связаны соотношением*

$$\operatorname{Ind} \mathrm{A}_{-\gamma} = \operatorname{Ind} \mathrm{A}_\gamma + 4, \tag{2.9}$$

где $\operatorname{Ind} \mathrm{A}_\gamma = \dim \ker \mathrm{A}_\gamma - \dim \operatorname{coker} \mathrm{A}_\gamma$.

2) *Пусть* $u \in W^1_{-\gamma}(\Pi^0)$ *– решение задачи* (2.6) *с весовым показателем* $\beta = -\gamma$ *и правой частью* $F \in W^1_{-\gamma}(\Pi^0)^* \subset W^1_\gamma(\Pi^0)^*$. *Тогда справедливо разложение* (2.1), *в котором* $\widetilde{u} \in W^1_\gamma(\Pi^0)$, *и верна оценка*

$$\|\widetilde{u}; W^1_\gamma(\Pi^0)\| + \sum_{\pm} \sum_{p=0,1} |b^p_\pm| \leqslant c_\gamma \left(\|F; W^1_{-\gamma}(\Pi^0)^*\| + \|u; W^1_{-\gamma}(\Pi^0)\|\right)$$

с множителем c_γ, *не зависящим от функционала* F *и функции* u.

Отметим, что согласно теореме об индексе (см. [44, теорема 3.3.3] число четыре в правой части (2.9) есть ничто иное, как количество асимптотических членов, отделенных в асимптотике (2.1). Поскольку $\operatorname{Ind} A_\gamma = -\operatorname{Ind} A_{-\gamma}$ и по доказанному ранее

$$\dim\ker A_\gamma = \dim\operatorname{coker} A_{-\gamma} = 0, \tag{2.10}$$

выводим из формул (2.1) и (2.10) соотношение

$$\dim\ker A_{-\gamma} = \operatorname{Ind} A_{-\gamma} = 2.$$

Другими словами, однородная задача (2.6) имеет только два линейно независимых решения. Одно из них, а именно, $u^0_\dagger = U_\dagger$, очевидно по указанным выше причинам. Второе решение $u^1_\dagger$ по теореме 2.1, (2) допускает разложение (2.1), и для подтверждения формулы (2.3) достаточно убедиться в том, что

$$b^1_+ = -b^1_- \neq 0. \tag{2.11}$$

С этой целью подставим функции $u^1_\dagger$ и $U_\dagger$ в формулу Грина на усеченной области $\Pi^0(R) = \{(y,z) \in \Pi^0 : |y| < R\}$. Все интегралы, за исключением одномерных интегралов по усекающим сегментам $I_\pm(R) = \{(y,z) : y = \pm R, z \in (-d,0)\}$, аннулируются. Следовательно, разложение (2.1) функции $u^1_\dagger$ обеспечивает соотношение

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\pm} \pm \int\limits_{I_\pm(R)} U_\dagger(z)\partial_y u^1_\dagger(\pm R, z)\, dz \\ &= \sum_{\pm} b^1_\pm \int\limits_{-d}^{0} |U_\dagger(z)|^2 dz + o(1). \end{aligned} \tag{2.12}$$

Устремляя R к бесконечности, выводим первое равенство в (2.11). Если $b^1_\pm = 0$, мы опять используем формулу интегрирования по частям

в $\Pi^0(R)$ и получаем, что

$$0 = \|\nabla u_\dagger^1; L_2(\Pi^0(R))\|^2 + k^2\|u_\dagger^1; L_2(\Pi^0(R))\|^2 - \lambda_\dagger\|u_\dagger^1; L_2(-R,R)\|^2$$

$$= \sum_{\pm} \pm \int\limits_{I_\pm(R)} u_\dagger^1(\pm R, z)\partial_y u_\dagger^1(\pm R, z)\, dz = o(1) \quad \text{при} \quad R \to +\infty. \tag{2.13}$$

Согласно оценке (1.14) левая часть (2.13) больше $\|\partial_y u_\dagger^1; L_2(\Pi^0(R))\|^2$, т.е. $\|\partial_y u_\dagger^1; L_2(\Pi^0)\|^2 = 0$ и $\partial_y u_\dagger^1 = 0$. Таким образом, $u_\dagger^1$ не зависит от переменной y, и нетрудно убедиться в том, что $u_\dagger^1 = c\,U_\dagger$. Последнее противоречит линейной независимости функций $u_\dagger^1$ и $u_\dagger^0$. Итак, соотношение (2.11) установлено, и осталось, разделив на $\pm b_\pm^1$, нормировать решение так, как указано в (2.3).

Поскольку функция $(y,z) \mapsto -u_\dagger^1(-y,z)$ также является решением задачи, можно зафиксировать $u_\dagger^1$ как нечетную функцию переменной y.

4. Разрешимость задачи. По существу мы проверили следующее утверждение.

Теорема 2.2. *Задача* (2.6) *с любой правой частью* $F \in W^1_{-\gamma}(\Pi^0)^*$ *имеет решение* $u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Pi^0)$, *представимое в виде* (2.1). *Ограничение* (2.4) *делает это решение единственным и обеспечивает оценку*

$$\|\widetilde{u}; W^1_\gamma(\Pi^0)\| + |b^1| + |b^0| \leqslant c_\gamma\|F; W^1_{-\gamma}(\Pi^0)^*\|.$$

Постоянная c_γ *не зависит от функционала* F. *Коэффициенты* b^p *находятся по формулам*

$$\begin{aligned} b^1 &= -\frac{1}{2}\|U_\dagger; L_2(-d,0)\|^{-2}F(U_\dagger), \\ b^0 &= -\frac{1}{2}\|U_\dagger; L_2(-d,0)\|^{-2}F(u_\dagger^1). \end{aligned} \tag{2.14}$$

Доказательство. Осталось проверить равенства (2.14). Согласно методу [41] это делается при помощи незначительного изменения выкладок (2.12) и (2.13). Именно, подставив функции u и $U_\dagger$ в формулу

Грина на области $\Pi^0(R)$, получаем

$$F(U_\dagger) = \lim_{R\to+\infty} \sum_{\pm} \mp \int\limits_{I_\pm(R)} U_\dagger(z)\partial_y u(\pm R, z)\, dz = -2b^1 \int\limits_{-d}^{0} |U_\dagger(z)|^2\, dz.$$

Второе равенство (2.14) выводится аналогично. Отметим, что

$$\int\limits_{-d}^{0} |U_\dagger(z)|^2\, dz = \frac{1}{2k}\left(1 - e^{-4kd}\right) + 2de^{-2kd}. \tag{2.15}$$

□

§3. Формальная асимптотика.

1. Замена переменных. Если угол θ мал, область Π^θ трансформируется в область Π^0 при помощи почти тождественной замены координат. Пусть $\xi = (y, z+a)$ – декартова система координат с началом в центре $(0, -a)$ сегмента Σ^0 и

$$\xi = \xi^\theta(1 - \chi(\xi^\theta)) + \Theta^\theta \xi^\theta \chi(\xi^\theta) = \xi^\theta + \left(\Theta^\theta - \mathbb{I}\right)\xi^\theta \chi(\xi^\theta).$$

Здесь χ – гладкая срезающая функция, четная относительно переменной y и имеющая малый носитель, причем $\chi = 1$ в окрестности экрана Σ^0 и $\chi = 0$ вблизи боковых сторон полосы Π, $\mathbb{I}$ – единичная матрица размером 2×2, а Θ^θ – ортогональная матрица,

$$\Theta^\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Положив

$$(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = (\xi_1^\theta, \xi_2^\theta - a), \tag{3.1}$$

заметим, что замена координат

$$(y, z) \mapsto (\mathbf{y}, \mathbf{z}), \tag{3.2}$$

поворачивая экран, переводит Π^θ в Π^0. При этом $(y, z) = (\mathbf{y}, \mathbf{z})$ вне конечной части волновода – будем считать, что при $|y| > R > l$. Кроме того,

$$J^\theta(\mathbf{y}, \mathbf{z}) = \frac{\partial(y, z)}{\partial(\mathbf{y}, \mathbf{z})} = \mathbb{I} + \nabla_{\xi^\theta}\left(\chi(\xi^\theta)(\Theta^\theta - \mathbb{I})\xi^\theta\right)^\top, \tag{3.3}$$

где $\top$ – знак транспонирования. Наконец, замена (3.2) неособенная для малого θ, и

$$|\mathbf{y}-y|+|\mathbf{z}-z|\leqslant c\theta,\quad \|J^\theta(\mathbf{y},\mathbf{z})-\mathbb{I};\mathbb{R}^{2\times 2}\|\leqslant c\theta \ \text{ при } \ \theta\in(0,\theta_0),\quad \theta_0>0.$$

В переменных (3.1) интегральное тождество (2.6) с весовым показателем $\beta=-\gamma$, т.е. обобщенная формулировка задачи (1.17)–(1.19) в классе $W^1_{-\gamma}(\Pi^0)$), выглядит следующим образом:

$$\begin{gathered}\big((\det J^\theta)(J^\theta)^{-1}\nabla_{(\mathbf{y},\mathbf{z})}\mathbf{u},(J^\theta)^{-1}\nabla_{(\mathbf{y},\mathbf{z})}\mathbf{v}\big)_{\Pi^0}\\ +k^2\left((\det J^\theta)\mathbf{u},\mathbf{v}\right)_{\Pi^0}-\lambda_\dagger(\mathbf{u},\mathbf{v})_\Gamma=\mathbf{F}(\mathbf{v}),\quad \mathbf{v}\in W^1_\gamma(\Pi^0),\end{gathered}\tag{3.4}$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ – функции u и v, записанные в координатах (3.1). Аналогично (2.8) введем оператор $\mathbf{A}^\theta_{-\gamma}$ задачи (3.4). Поскольку J^θ – гладкая матрица-функция переменной θ, справедливо разложение

$$\mathbf{A}^\theta_{-\gamma}=\mathbf{A}^0_{-\gamma}+\theta\mathbf{A}^1_{-\gamma}+\theta^2\mathbf{A}^2_{-\gamma}+\theta^3\mathbf{A}^3_{-\gamma}+\dots,\tag{3.5}$$

причем $\mathbf{A}^0_{-\gamma}=A_{-\gamma}$ – оператор, изученный в §2, а остальные слагаемые $\mathbf{A}^k_{-\gamma}$ осуществляют непрерывные отображения: $W^1_{-\gamma}(\Pi^0)\to W^1_{-\gamma}(\Pi^0)^*$; они определены билинейными формами

$$\left(\mathbf{Q}^k\nabla_{(\mathbf{y},\mathbf{z})}\mathbf{u},\nabla_{(\mathbf{y},\mathbf{z})}\mathbf{v}\right)_{\Pi^0}+k^2\left(\mathbf{q}^k\mathbf{u},\mathbf{v}\right)_{\Pi^0},\tag{3.6}$$

в которых $\mathbf{Q}^k$ и $\mathbf{q}^k$ – гладкие (2×2)-матрица и скаляр с компактными носителями; матрица $\mathbf{Q}^k$ симметрична. Величины $\mathbf{Q}^k(\mathbf{y},\mathbf{z})$ и $\mathbf{q}^k(\mathbf{y},\mathbf{z})$ получаются в результате разложения в ряд по степеням малого параметра θ выражений $(J^\theta(\mathbf{y},\mathbf{z})^\top)^{-1}J^\theta(\mathbf{y},\mathbf{z})^{-1}\det J^\theta(\mathbf{y},\mathbf{z})$ и $\det J^\theta(\mathbf{y},\mathbf{z})$, возникших соответственно в первых двух интегралах из (3.4). В силу формулы (3.3) находим:

$$\begin{gathered}J^\theta(\mathbf{y},\mathbf{z})=\mathbb{I}+\theta J'(\mathbf{y},\mathbf{z})+O(\theta^2),\\ J'=\begin{pmatrix}\partial_1(\chi\xi^\theta_2) & -\partial_1(\chi\xi^\theta_1)\\ \partial_2(\chi\xi^\theta_2) & -\partial_2(\chi\xi^\theta_1)\end{pmatrix}.\end{gathered}\tag{3.7}$$

Следовательно,

$$\begin{gathered}J^\theta(\mathbf{y},\mathbf{z})^{-1}=\mathbb{I}-\theta J'(\mathbf{y},\mathbf{z})+O(\theta^2),\\ \det J^\theta(\mathbf{y},\mathbf{z})=1+\theta j'(\mathbf{y},\mathbf{z})+O(\theta^2),\quad j'=\partial_1(\chi\xi^\theta_2)-\partial_2(\chi\xi^\theta_1).\end{gathered}\tag{3.8}$$

Сравнивая формулы (3.4)–(3.6) и принимая во внимание разложения (3.8), обнаруживаем, что

$$\begin{gathered}\mathbf{Q}^1(\mathbf{y},\mathbf{z}) = -J'(\mathbf{y},\mathbf{z}) - J'(\mathbf{y},\mathbf{z})^\top + j'(\mathbf{y},\mathbf{z})\mathbb{I},\\ \mathbf{q}^1(\mathbf{y},\mathbf{z}) = j'(\mathbf{y},\mathbf{z}).\end{gathered} \tag{3.9}$$

2. Построение асимптотики – первый вариант. Разложение (3.5) подразумевает следующий асимптотический анзац для решения однородной задачи (1.10):

$$u^\theta(y,z) = \mathbf{u}_0(\mathbf{y},\mathbf{z}) + \theta\mathbf{u}_1(\mathbf{y},\mathbf{z}) + \theta^2\mathbf{u}_2(\mathbf{y},\mathbf{z}) + \theta^3\mathbf{u}_3(\mathbf{y},\mathbf{z}) + \dots \tag{3.10}$$

При этом $\mathbf{u}_0 \in \ker A_{-\gamma}$, а остальные слагаемые определяются из рекуррентной последовательности уравнений

$$A_{-\gamma}\mathbf{u}_p = -\sum_{j=1}^{p}\mathbf{A}^j_{-\gamma}\mathbf{u}_{p-j} \quad \text{в } W^1_{-\gamma}(\Pi^0). \tag{3.11}$$

Для выбора начального члена $\mathbf{u}_0$ анзаца (3.10) в распоряжении имеются две функции $u^0_\dagger = U_\dagger$ и $u^1_\dagger$ (см. комментарии к теореме 2.1). Обе не затухают на бесконечности, и мы, разумеется, выбираем ограниченную, т.е.

$$\mathbf{u}_0(\mathbf{y},\mathbf{z}) = U_\dagger(\mathbf{z}). \tag{3.12}$$

С самого начала становится понятно, что из-за отсутствия затухания даже у главного асимптотического члена (3.12) разложение (3.10) нуждается в исправлении на бесконечности. В рамках метода сращиваемых асимптотических разложений (ср. монографии [46, 39] и др.) анзац (3.10) следует интерпретировать как *внутреннее* разложение, а на удалении от экрана еще предстоит построить два (по количеству выходов на бесконечность) *внешних* разложения.

Уравнение (3.11) с индексом $p = 1$ представляет собой задачу (2.6) с весовым показателем $\beta = -\gamma$ и правой частью

$$F^1(v) = -(\mathbf{Q}^1\nabla U_\dagger, \nabla v)_{\Pi^0} - k^2(\mathbf{q}^1 U_\dagger, v)_{\Pi^0}.$$

Поскольку носители у $\mathbf{Q}^1$ и $\mathbf{q}^1$ компактные, F^1 – непрерывный функционал на пространстве $W^1_{-\beta}(\Pi^0)$ с любым $\beta \in \mathbb{R}$, в частности, при $\beta = \gamma$. По теореме 2.2 такая задача имеет единственное решение $\mathbf{u}_1 \in W^1_{-\gamma}(\Pi^0)$, подчиненное требованиям (2.1), (2.4), т.е. при $p = 1$ верны разложения

$$\mathbf{u}_p(\mathbf{y},\mathbf{z}) = U_\dagger(\mathbf{z})(\mathbf{b}^1_p|\mathbf{y}| \pm \mathbf{b}^0_p) + \dots \quad \text{при } \mathbf{y} \to \pm\infty \tag{3.13}$$

с коэффициентами

$$\mathbf{b}_1^1 = -\frac{1}{2}\|U_\dagger; L_2(-d,0)\|^{-2}F^1(U_\dagger), \quad \mathbf{b}_1^0 = -\frac{1}{2}\|U_\dagger; L_2(-d,0)\|^{-2}F^1(u_\dagger^1)$$

(ср. представления (2.14)). Согласно формулам (3.7)–(3.9) получаем, что

$$\begin{aligned} &2\|U_\dagger; L_2(-d,0)\|^2\,\mathbf{b}_1^1 \\ &= -2k^2\int\limits_{\Pi^0}|U_\dagger(\mathbf{z})|^2\left(\frac{\partial}{\partial\xi_1^\theta}\left(\chi(\xi^\theta)\xi_2^\theta\right) - \frac{\partial}{\partial\xi_2^\theta}\left(\chi(\xi^\theta)\xi_1^\theta\right)\right)d\mathbf{y}d\mathbf{z} = 0, \end{aligned} \tag{3.14}$$

так как благодаря выбору срезающей функции подынтегральное выражение нечетно относительно переменной $\mathbf{y}$.

В следующем пункте будет показано что коэффициент $\mathbf{b}_2^1$ в представлении (3.13) решения $\mathbf{u}_2$ уравнения (3.11) с $p=2$ отличен от нуля. Этот самый важный для предпринимаемого асимптотического анализа результат позволяет предложить следующие внешние разложения:

$$\begin{aligned} u^\theta(y,z) &= (1+\theta c_\pm^1+\theta^2c_\pm^2+\theta^3c_\pm^3+\dots)e^{-\theta^2(M+\theta M^1)|y|} \\ &\quad\times\left(e^{z(k-\theta^4K)}+e^{-(z+2d)(k-\theta^4K)}\right)+\dots \end{aligned} \tag{3.15}$$

Здесь $c_\pm^j$ и $M>0$, $K>0$ – числа, подлежащие определению. Прежде всего, правая часть (3.15) должна удовлетворять уравнению Гельмгольца (1.3) с точностью θ^5, а значит,

$$\theta^4(M+\theta M^1)^2+(k-\theta^4K)^2 = k^2+O(\theta^5) \quad\Rightarrow\quad M=2kK. \tag{3.16}$$

Во-вторых, краевое условие Стеклова (1.4) соблюдено с той же точностью в том случае, если

$$\begin{aligned} L &= \frac{K}{1+e^{-2dk}}\left(2d\lambda_\dagger e^{-2dk}+1-e^{-2dk}+2dke^{-2dk}\right) \\ &= \frac{M}{1+e^{-2dk}}\left(\frac{d}{k}\,\lambda_\dagger e^{2dk}+\frac{1-e^{-2dk}}{2k}+de^{-2dk}\right). \end{aligned} \tag{3.17}$$

При помощи формулы Тейлора по переменной θ переписываем правую часть (3.15) в виде

$$\begin{aligned} &(1+\theta c_\pm^1+\theta^2(c_\pm^2-M|y|) \\ &+\theta^3(c_\pm^3-c_\pm^1M|y|-M^1|y|))U_\dagger(z)+\dots \end{aligned} \tag{3.18}$$

Теперь согласно стандартной процедуре сращивания (см. [46, 39] и др.) коэффициенты при θ^p в выражении (3.18) описывают поведение функции $\mathbf{u}_p$ при $\mathbf{y} \to \pm\infty$ (напоминаем, что координаты y и $\mathbf{y}$ совпадают на большом расстоянии от экрана). Подчеркнем, что первое слагаемое 1 зафиксировано в соответствии с формулой (3.12). Учитывая разложение (3.13), в котором $p = 1$ и $\mathbf{b}_1^1 = 0$ в силу выкладки (3.18), видим, что

$$c_\pm^1 = \pm\mathbf{b}_1^0. \tag{3.19}$$

Аналогично, рассматривая множители при θ^2, находим:

$$c_\pm^2 = \pm\mathbf{b}_2^0, \quad -M = \mathbf{b}_2^1. \tag{3.20}$$

Подчеркнем, что выражение в правой части (3.15) затухает на бесконечности в том и только в том случае, когда коэффициент $\mathbf{b}_2^1$ отрицателен. Проверка этого ключевого факта будет предпринята в следующем пункте.

Последний член $\mathbf{u}_3$ анзаца (3.10), востребованный в § 4 при обосновании асимптотики, принимает вид

$$\mathbf{u}_3 = \mathbf{c}u_\dagger^1 + \mathbf{u}_3^\circ, \tag{3.21}$$

где слагаемое $\mathbf{u}_3^\circ$ допускает представления (3.13) с $p = 3$ и коэффициентами $\mathbf{b}_3^{p\circ}$, а слагаемое $\mathbf{c}u_\dagger^1$ с множителем

$$\mathbf{c} = \mathbf{b}_1^0\mathbf{b}_2^1 \tag{3.22}$$

нужно для того, чтобы коэффициентам при $U_\dagger$ в разложении функции (3.21) придать вид, предписанный формулой (3.18) (равенство (3.22) получено при учете соотношений (3.19), (3.20) и (2.3)). В результате находим, что

$$M^1 = -\mathbf{b}_3^{1\circ}, \quad c_\pm^3 = \pm\mathbf{b}_3^{0\circ} \pm b_\dagger\mathbf{c}. \tag{3.23}$$

Последнее наблюдение заканчивает построение нужных асимптотических членов. Осталось убедиться в том, что

$$\mathbf{b}_2^1 < 0. \tag{3.24}$$

3. Построение асимптотики – второй вариант. Почти тождественная замена координат, переводящая возмущенную область в фиксированную, – стандартный прием в асимптотическом анализе эллиптических краевых задач в регулярно (гладко) возмущенных областях, восходящий к ставшей уже классической работе [47]. Такой метод принес множество полезных и красивых формул в разнообразных

задачах. Вместе с тем, такие асимптотические формулы в основном относятся к главным поправочным членом: из-за наличия естественного произвола в выборе замены координат (срезающая функция χ в нашем случае) вычисление поправок второго порядка малости во многих ситуациях затруднено. И в рассматриваемой задаче авторы не знают, как можно найти явное выражение для коэффициента $\mathbf{b}_2^1$ при помощи операторного разложения (3.5). Поэтому вместо аппарата классической теории возмущений (ср. [28, п. 7.6.6, стр. 527]) воспользуемся методом, приспособленным к сингулярно возмущенным областям. Этот метод более сложен технически и имеет свои ограничения, однако в рассматриваемой задаче дает приемлемую формулу для $\mathbf{b}_2^1$. Связь двух применяемых подходов обсуждается, например, в [30, §5.5].

В конечной части волновода назначим такой асимптотический анзац в исходных координатах (y, z):

$$u^\theta(y,z) = u_0(y,z) + \theta u_1(y,z) + \theta^2 u_2(y,z) + \dots \tag{3.25}$$

Здесь по-прежнему $u_0(y,z) = U_\dagger(z)$. Поскольку системы координат (y,z) и $(\mathbf{y},\mathbf{z})$ совпадают на удалении от экрана, получаем, что

$$u_1(y,z) = \mathbf{u}_1(\mathbf{y},\mathbf{z}),\ u_2(y,z) = \mathbf{u}_2(\mathbf{y},\mathbf{z}) \quad \text{при} \quad |y| > R, \tag{3.26}$$

а значит, для членов u_1 и u_2 нового анзаца (3.25) справедливы прежние разложения (3.13).

Вычислим невязки первого члена $u_0 = U_\dagger$ в условиях Неймана (1.6) на поверхностях $\Sigma_\pm^\theta$ экрана. В силу формулы (1.7) для производной вдоль нормали, имеем

$$\begin{aligned} &\partial_n(u_0(y,z) + \theta u_1(y,z))\Big|_{y=(z+a)\operatorname{tg}\theta\pm 0} \\ &= \mp\partial_y U_\dagger(z) \mp \theta\left(\partial_y u_1(\pm 0, z) - \partial_z U_\dagger(z)\right) + \dots \end{aligned} \tag{3.27}$$

Первое слагаемое справа, конечно же, равно нулю. Для того чтобы аннулировать второе, назначим в краевой задаче (1.17)–(1.19) для члена u_1 такие правые части:

$$f^1 = 0, \quad g_\pm^1(z) = \mp\partial_z U_\dagger(z). \tag{3.28}$$

Обобщенная формулировка (2.6) такой задачи включает следующий функционал (ср. определение (2.7)):

$$\begin{aligned} F^1(v) &= \sum_{\pm} \mp \int\limits_{-a-l}^{-a+l} \overline{v(\pm 0, z)} g^1_{\pm}(z)\, dz \\ &= \sum_{\pm} \mp \int\limits_{-a-l}^{-a+l} \overline{v(\pm 0, z)} \partial_z U_{\dagger}(z)\, dz. \end{aligned} \tag{3.29}$$

Понятно, что $F^1(U_{\dagger}) = 0$, т.е. по теореме 2.2 поставленная задача имеет ограниченное решение $u_1 \in H^1_{\mathrm{loc}}(\Pi^0)$, которое к тому же нечетно относительно переменной y. Верна формула

$$u_1(y,z) = \sum_{\pm} \pm \chi_{\pm}(y) b_1 U_{\dagger}(z) + \widetilde{u}_1(y,z), \quad \widetilde{u}_1 \in W^1_{\gamma}(\Pi^0). \tag{3.30}$$

Более того, решение u_1 гладкое всюду в Π^0 вплоть до границы $\partial\Pi \cup \Sigma^0_+ \cup \Sigma^0_-$ за исключением концов $P^0_{\pm}$ экрана Σ^0. Информацию о поведении решения u_1 около угловых точек $P^0_{\pm}$ можно легко получить на основании теории эллиптических краевых задач в областях с кусочно-гладкими границами (см. ключевые работы [40–43], а также, например, монографию [44]), причем все используемые далее факты о решении задачи Неймана для уравнения Гельмгольца в области в угловыми точками раствором 2π можно почерпнуть из вводной главы 2 книги [44].

Справедливо представление

$$u_1(y,z) = \sum_{\pm} X(r^0_{\pm}) k^{\pm}_1 (r^0_{\pm})^{1/2} \cos\left(\frac{\vartheta^0_{\pm}}{2}\right) + \widehat{u}_1(y,z), \tag{3.31}$$

причем $(r^0_{\pm}, \vartheta^0_{\pm})$ – система полярных координат с центром $(a \pm l, 0)$, X – гладкая срезающая функция с малыми носителями, $X(r) = 1$ вблизи точки $r = 0$, $k^{\pm}_1 \in \mathbb{R}$ – так называемые коэффициенты интенсивности, а остаток $\widehat{u}_1$ принадлежит пространству $H^2_{\mathrm{loc}}(\Pi^0)$, т.е. обладает дополнительной гладкостью по сравнению с самой функцией u_1. Наконец, поскольку данные задачи для u_1 бесконечно дифференцируемы,

в окрестностях точек $P^0_\pm$ выполнены соотношения

$$|\nabla^q(u_1(y,z)-u_1(P^0_\pm))| \leqslant c_q(r^0_\pm)^{-q+1/2},$$

$$|\nabla^q(\widehat{u}_1(y,z)-u_1(P^0_\pm)-y\partial_y u_1(P^0_\pm) \tag{3.32}$$

$$-(z+a\pm l)\partial_z u_1(P^0_\pm))| \leqslant c_q(r^0_\pm)^{-q+3/2},$$

где $q=1,2,3\dots$ и $\nabla^q u_1$ – совокупность всех производных функции u_1 порядка q.

Для того чтобы найти асимптотический член u_2, продолжим выкладку (3.27) при учете равенства нулю коэффициента при θ. При помощи соотношения (1.7) и формулы Тейлора

$$\partial_y u_1((z+a)\operatorname{tg}\theta\pm 0,z)=\partial_y u_1(\pm 0,z)+(z+a)\operatorname{tg}\theta\,\partial_y^2 u_1(\pm 0,z)+\cdots$$

выводим:

$$\partial_n(u_0(y,z)+\theta u_1(y,z)+\theta^2 u_2(y,z))\Big|_{y=(z+a)\operatorname{tg}\theta\pm 0}$$

$$=\mp\theta^2\left(\partial_y u_2(\pm 0,z)-\partial_z u_1(\pm 0,z)+(z+a)\partial_y^2 u_1(\pm 0,z)\right)+\cdots$$

Заметив, что согласно однородному уравнению Гельмгольца (1.17) для u_1 выполнено равенство

$$\partial_y^2 u_1(\pm 0,z)=-\partial_z^2 u_1(\pm 0,z)+k^2 u_1(\pm 0,z),$$

находим окончательно, что u_2 – решение задачи (1.17)–(1.19) с правыми частями

$$f^2=0,\quad g^2_\pm(z)=\mp\big(\partial_z u_1(\pm 0,z) \tag{3.33}$$

$$+(z+a)(\partial_z^2 u_1(\pm 0,z)-k^2 u_1(\pm 0,z))\big).$$

Обратим внимание на возникшую неприятность: согласно представлению (3.31) функции $g^2_\pm$ приобретают особенности $O((r^0_\pm)^{-3/2})$ в концевых точках экрана. Эти особенности слишком сильные для того, чтобы аналогичный (3.29) функционал, построенный по функциям (3.33), попал в пространство $W^1_{-\gamma}(\Pi^0)^*$. Тем не менее, в соответствии с общей процедурой[3] [40] построения разложений решений эллиптических

[3]Упрощенное изложение этой процедуры в случае краевых задач для оператора Лапласа можно опять-таки найти во вводной главе 2 книги [44].

краевых задач вблизи конических и угловых точек следует положить

$$u_2(y,z) = \sum_{\pm} X(r^0_{\pm})\Big\{ \mp \frac{lk_1^{\pm}}{2\pi}(r^0_{\pm})^{-1/2}\Big((\pi-\vartheta^0_{\pm})\sin\Big(\frac{\vartheta^0_{\pm}}{2}\Big) \\ - \ln r^0_{\pm}\cos\Big(\frac{\vartheta^0_{\pm}}{2}\Big)\Big) + +k_2^{\pm}(r^0_{\pm})^{-1/2}\cos\Big(\frac{\vartheta^0_{\pm}}{2}\Big)\Big\} + u_2^{\#}(y,z). \tag{3.34}$$

Первое слагаемое в фигурных скобках служит для компенсации сингулярных составляющих функций $g^2_{\pm}$ из (3.33), а во втором слагаемом, удовлетворяющем однородным условиям Неймана (1.19), коэффициент $k_2^{\pm}$ пока произволен. Таким образом в задаче (2.6) для остатка $u_2^{\#}$ появляется функционал $F^{\#} \in W^1_{-\gamma}(\Pi^0)^*$, и теорема 2.2 доставляет ее единственное решение в форме (2.1), (2.2).

Возникновение сингулярностей в правых частях (3.33) краевых условий (1.19) и в самом решении (3.34) происходит исключительно из-за того, что при предельном переходе $\theta \to +0$ концевые точки $P^{\theta}_{\pm}$ экрана Σ^{θ} смещаются на расстояние $O(\theta)$. В результате сингулярность $O((r^{\theta}_{\pm})^{1/2})$, присущая решению u^{θ} из "энергетического" класса $H^1_{\mathrm{loc}}(\Pi^{\theta})$, после применения формулы Тейлора по переменной θ распадается в сумму

$$O((r^0_{\pm})^{1/2}) + O(\theta\,(r^0_{\pm})^{-1/2}) + O(\theta^2\,(r^0_{\pm})^{-3/2}) + \dots \tag{3.35}$$

Такой формальный ряд по степеням малого параметра θ оказывается асимптотическим только на удалении от точки $P^0_{\pm}$, но в случае $r^0_{\pm} = O(\theta)$ все его члены имеют один и тот же порядок $\theta^{1/2}$.

Способ построения асимптотики, учитывающий сингулярное разложение (3.35) и предоставляющий поправочные слагаемые, которые возвращают решению u^{θ} "правильную" особенность $O((r^{\theta}_{\pm})^{1/2})$ в концах наклонного экрана, подробно изложен в работе [48], имеющей дело с более сложной задачей теории упругости о слабо изогнутой трещине. В частности, в [48] показано, как следует зафиксировать коэффициенты $k_2^{\pm}$ для того, чтобы, во-первых, обеспечить единственность решения (3.34) и, во-вторых, сформировать правильную особенность. Мы могли бы применить соответствующую асимптотическую процедуру и указать выражения для $k_2^{\pm}$, однако по счастливому стечению обстоятельств в данной работе делать это не нужно, так как интерес представляет только коэффициент при $|y|U_{\dagger}(z)$, а очередная выкладка убедит в том, что он не зависит от $k_2^{\pm}$.

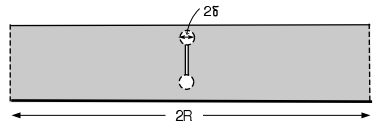

Рис. 2. Область интегрирования.

Подставим функции u_2 и $U_\dagger$ в формулу Грина на области $\Pi^0_\delta(R) = \Pi^0(R) \setminus (\mathbb{B}^+_\delta \cup \mathbb{B}^-_\delta)$ (рис. 2), представляющей собой прямоугольник с разрезом Σ^0 и двумя исключенными кругами $\mathbb{B}^\pm_\delta = \{(y,z) : r^0_\pm \leqslant \delta\}$. Собираясь выполнить предельные переходы $R \to +\infty$ и $\delta \to +0$, заметим, что ненулевыми в этой формуле остаются только следующие линейные интегралы:

$$J_R = \sum_\pm \pm \int\limits_{-d}^{0} U_\dagger(z)\partial_y u_2(\pm R, z)\,dz, \tag{3.36}$$

$$J_\delta(\Sigma) = \sum_\pm \mp \int\limits_{-a-l+\delta}^{-a+l-\delta} U_\dagger(z)\partial_y u_2(\pm 0, z)\,dz, \tag{3.37}$$

$$J^\pm_\delta = \int\limits_{\partial\mathbb{B}^\pm_\delta} \Big(u_2(y,z)\partial_{r^0_\pm} U_\dagger(z) - U_\dagger(z)\partial_{r^0_\pm} u_2(y,z)\Big)\,dz. \tag{3.38}$$

Сумма интегралов (3.36)–(3.38) равна нулю. Рассмотрим их по отдельности. Прежде всего, в соответствии с формулами (3.26) и (3.13) имеем

$$J_R = 2\mathbf{b}^1_2 \|U_\dagger(z); L_2(-d,0)\|^2 + o(1) \quad \text{при} \quad R \to +\infty.$$

При учете разложения (3.34) получаем соотношение

$$J^\pm_\delta = \delta^{-1/2}(c^\pm_0 + c^\pm_1 \ln\delta) + o(1) \quad \text{при} \quad \delta \to +0. \tag{3.39}$$

При этом $c^\pm_0$ и $c^\pm_1$ – коэффициенты, которые нетрудно вычислить (в частности, заведомо $c^\pm_1 = 0$, и $c^\pm_2$ не зависит от $k^\pm_2$, так как интеграл от $\cos(\vartheta/2)$ по отрезку $(0, 2\pi)$ равен нулю), однако конкретные выражения для этих коэффициентов востребованы не будут. Наконец,

принимая во внимание данные Неймана (3.33) в задаче для u_2, видим, что

$$J_\delta(\Sigma) = \sum_{\pm} \mp \int\limits_{-a-l+\delta}^{-a+l-\delta} U_\dagger(z)\Big(\partial_z u_1(\pm 0, z)$$

$$+(z+a)\big(\partial_z^2 u_1(\pm 0, z) - k^2 u_1(\pm 0, z)\big)\Big)\, dz$$

$$= \sum_{\pm} \mp \int\limits_{-a-l+\delta}^{-a+l-\delta} \Big(U_\dagger(z)\partial_z u_1(\pm 0, z) - U_\dagger(z)\partial_z u_1(\pm 0, z)\partial_z(z+a) \tag{3.40}$$

$$-(z+a)\big(\partial_z u_1(\pm 0, z)\partial_z U_\dagger(z) + k^2 u_1(\pm 0, z) U_\dagger(z)\big)\Big)\, dz +$$

$$+ \sum_{\pm} \mp \big((z+a)\partial_z u_1(\pm 0, z) U_\dagger(z)\big)\Big|_{-a-l+\delta}^{-a+l-\delta}.$$

Согласно разложению (3.30) и оценкам (3.32) подынтегральные выражения в двух (отвечающих знакам плюс и минус) последних интегралах суть $O((r_\pm^0)^{-1/2})$, а значит, в них можно положить $\delta = 0$, совершив при этом незначительную ошибку $O(\delta^{1/2})$. То же разложение показывает, что подстановка в правой части (3.40) равна

$$c_2 \delta^{-1/2} + o(1) \quad \text{при} \quad \delta \to +0. \tag{3.41}$$

Поскольку все слагаемые кроме названной подстановки и интеграла (3.38) имеют конечные пределы при $\delta \to +0$ и $R \to +\infty$, можно осуществить предельные переходы, так как растущие слагаемые в (3.39) и (3.41) обязаны взаимно уничтожиться. В результате обсуждаемая формула Грина дает соотношение

$$0 = 2\mathbf{b}_2^1 \|U_\dagger; L_2(-d, 0)\|^2 + J, \tag{3.42}$$

где

$$J = \sum_{\pm} \pm \int\limits_{-a-l}^{-a+l} (z+a)\big(\partial_z u_1(\pm 0, z)\partial_z U_\dagger(z)$$

$$+k^2 u_1(\pm 0, z)U_\dagger(z)\big)\,dz = \sum_{\pm} \mp \int\limits_{-a-l}^{-a+l} \Big(u_1(\pm 0, z)\partial_z U_\dagger(z)$$

$$+(z+a)\big(\partial_z U_\dagger(z) - k^2 U_\dagger(z)\big)u_1(\pm 0, z)\Big)\,dz \tag{3.43}$$

$$= \sum_{\pm} \mp \int\limits_{-a-l}^{-a+l} u_1(\pm 0, z)\partial_z U_\dagger(z)\,dz$$

$$= \sum_{\pm} \pm \int\limits_{-a-l}^{-a+l} u_1(\pm 0, z)\partial_y u_1(\pm 0, z)\,dz.$$

В этом преобразовании были учтены правые части (3.28) краевых условий Неймана (1.19) в задаче для u_1 и дифференциальное уравнение в задаче (1.15) для $U_\dagger$, а также применена формула интегрирования по частям на отрезке $(-a-l, -a+l)$, причем внеинтегральные члены $\pm l u_1(P^0_\pm)U_\dagger(-a\pm l)$, возникающие от двух интегралов со знаками плюс и минус, взаимно уничтожаются. Применив еще раз формулу Грина, теперь уже в усеченном волноводе $\Pi^0(R)$, выводим из соотношений (3.42) и (3.43) равенство

$$\mathbf{b}_2^1 = -\frac{1}{2}\|U_\dagger; L_2(-d,0)\|^{-2} \lim_{R\to\infty} \Bigg(\int\limits_{\Pi^0(R)} |\nabla u_1(y,z)|^2 dydz$$

$$-\lambda_\dagger \int\limits_{-R}^{R} |u_1(y,0)|^2 dy + \sum_{\pm} \pm \int\limits_{-d}^{0} u_1(\pm R, z)\partial_y u_1(\pm R, z)\,dz \Bigg)$$

$$= -\frac{1}{2}\|U_\dagger; L_2(-d,0)\|^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}} \Bigg(\int\limits_{-d}^{0} |\nabla u_1(y,z)|^2 dz - \lambda_\dagger |u_1(y,0)|^2 \Bigg) dy.$$

Первый сомножитель указан в (2.15), а производная $\partial_y u_1(y,z)$ и подынтегральное выражение в последнем интеграле по $\mathbb{R} \ni y$ экспоненциально затухают на бесконечности благодаря представлению (3.30) и очевидному равенству

$$\lambda_\dagger |U_\dagger(0)|^2 = \int\limits_{-d}^{0} (|\partial_z U_\dagger(z)|^2 + k^2 |U_\dagger(z)|^2)\, dz. \tag{3.44}$$

Для завершения проверки требуемого соотношения (3.24) осталось убедиться в том, что упомянутый интеграл положителен. В силу неравенства (1.13) имеем

$$\int\limits_{-d}^{0} |\partial_z u_1(y,z)|^2 dz - \lambda_\dagger |u_1(y,0)|^2 \geqslant 0 \quad \text{при} \quad y \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, интеграл неотрицательный, причем он обращается в нуль лишь при условии

$$\int\limits_{-d}^{0} |\partial_y u_1(y,z)|^2 dz = 0 \quad \text{при} \quad y \in \mathbb{R}.$$

В этом случае функция u_1 не зависит от переменной y, что невозможно ввиду ее нечетности и нетривиальности. Итак, желанная формула (3.24) установлена, причем согласно прежнему выводу (3.20) имеем

$$M = \frac{1}{2} \|U_\dagger; L_2(-d,0)\|^{-2} \int\limits_{\mathbb{R}} \Bigl(\int\limits_{-d}^{0} |\nabla u_1(y,z)|^2 dz - \lambda_\dagger |u_1(y,0)|^2 \Bigr) dy. \tag{3.45}$$

§4. Обоснование асимптотики.

1. Операторная формулировка задачи о поверхностных волнах. Следуя [10], введем следовой оператор T^θ,

$$\langle T^\theta u, v \rangle = (u,v)_\Gamma, \quad u, v \in \mathcal{H}^\theta, \tag{4.1}$$

в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^\theta = H^1(\Pi^\theta)$, снабженном скалярным произведением

$$\langle u, v \rangle = (\nabla u, \nabla v)_{\Pi^\theta} + k^2 (u,v)_{\Pi^\theta}. \tag{4.2}$$

Ясно, что оператор T^θ положительный, симметричный и непрерывной, а значит, самосопряженный. Более того, в согласии с определениями (4.1) и (4.2) вариационная задача (1.10) эквивалентна абстрактному уравнению

$$T^\theta u^\theta = \tau^\theta u^\theta \quad \text{в} \quad \mathcal{H}^\theta$$

с новым спектральным параметром

$$\tau^\theta = (\lambda^\theta)^{-1}. \tag{4.3}$$

Формула (4.3) показывает, что оператор T^θ наследует непрерывный спектр $(0, \lambda_\dagger^{-1}]$ от задачи (1.10). Отметим, что $\tau = 0$ – собственное число оператора с бесконечной кратностью и собственным подпространством, состоящим из функций $u \in \mathcal{H}^\theta$, обращающихся в нуль на свободной поверхности жидкости Γ. Другими словами, точка $\tau = 0$ попадает на существенный спектр оператора T^θ, который, следовательно, представляет собой сегмент $[0, \lambda_\dagger^{-1}]$.

В силу спектральной теоремы (см. [6, теорема 6.1.1]) самосопряженный оператор T^θ порождает спектральную меру E_T^θ, которая в свою очередь ставит в соответствие каждой паре элементов $u, v \in \mathcal{H}^\theta$ скалярную комплексную меру $\mu_{u,v}^\theta = \langle E_T^\theta u, v\rangle$ на прямой $\mathbb{R}$, вещественную в случае $u = v$. Все эти меры локализованы на сегменте $[0, \|T^\theta\|]$, где $\|T^\theta\|$ – норма оператора T^θ. Более того, на полуинтервале $(\lambda_\dagger^{-1}, \|T^\theta\|]$ меры становятся линейными комбинациями функций Дирака, сосредоточенными в точках дискретного спектра оператора.

Далее понадобятся простые формулы (см., например, доказательство теоремы 6.1.3 в книге [6]), а именно,

$$\langle u, v\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} d\mu_{u,v}^\theta(t), \quad u, v \in \mathcal{H}^\theta, \tag{4.4}$$

и

$$\|T^\theta \mathcal{U}^\theta - \tau^\theta \mathcal{U}^\theta; \mathcal{H}^\theta\|^2 = \int\limits_{\mathbb{R}} (t - \tau^\theta)^2 d\mu_{\mathcal{U}^\theta, \mathcal{U}^\theta}^\theta(t), \quad \mathcal{U}^\theta \in \mathcal{H}^\theta, \tau^\theta \in \mathbb{R}. \tag{4.5}$$

2. Схема обоснования. Предположим, что при некотором $C > 0$ интервал

$$\triangle_\theta = \left[(\lambda_\dagger - \theta^4 L)^{-1} - C\theta^5, (\lambda_\dagger - \theta^4 L)^{-1} + C\theta^5\right] \tag{4.6}$$

свободен от спектра оператора T^θ, т.е.

$$\mu_{\mathcal{U}^\theta, \mathcal{U}^\theta}^\theta(\triangle_\theta) = 0.$$

Положив $\tau^\theta = (\lambda_\dagger - \theta^4 L)^{-1}$ и выбрав некоторую функцию $\mathcal{U}^\theta \in \mathcal{H}^\theta$, выводим из формул (4.4) и (4.5) соотношение

$$\begin{aligned}\|T^\theta \mathcal{U}^\theta - \tau^\theta \mathcal{U}^\theta; \mathcal{H}^\theta\|^2 &= \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\triangle_\theta} (t-\tau^\theta)^2 d\mu^\theta_{\mathcal{U}^\theta,\mathcal{U}^\theta}(t) \\ &\geqslant C^2\theta^{10} \int\limits_{\mathbb{R}\setminus\triangle_\theta} d\mu^\theta_{\mathcal{U}^\theta,\mathcal{U}^\theta}(t) \\ &= C^2\theta^{10} \int\limits_{\mathbb{R}} d\mu^\theta_{\mathcal{U}^\theta,\mathcal{U}^\theta}(t) = C^2\theta^{10}\|\mathcal{U}^\theta; \mathcal{H}^\theta\|^2.\end{aligned} \tag{4.7}$$

В следующем пункте из асимптотических конструкций, найденных в предыдущем параграфе, мы соорудим функцию $\mathcal{U}^\theta \in \mathcal{H}^\theta$, для которой верны неравенства

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{U}^\theta; \mathcal{H}^\theta\| \geqslant c_1\theta^{-1},\ c_1 > 0, \\ &\|T^\theta \mathcal{U}^\theta - \tau^\theta \mathcal{U}^\theta; \mathcal{H}^\theta\| \leqslant c_2\theta^4.\end{aligned} \tag{4.8}$$

Таким образом, при $C = c_2/c_1$ неравенство (4.7) становится абсурдным, а значит, сегмент (4.6) содержит точку спектра τ_1^θ, которая по необходимости оказывается собственным числом в дискретном спектре оператора T^θ, так как $\triangle_\theta \subset (\lambda_\dagger^{-1}, +\infty)$ при малом θ. Для соответствующего собственного числа $\lambda_1^\theta = (\tau_1^\theta)^{-1}$ задачи (1.10) имеем

$$|\tau_1^\theta - (\lambda_\dagger - \theta^4 L)^{-1}| \leqslant C\theta^5$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tau_1^\theta \geqslant (\lambda_\dagger - \theta^4 L)^{-1} - C\theta^5 \ \Rightarrow\ \lambda_1^\theta \\ \leqslant \big((\lambda_\dagger - \theta^4 L)^{-1} - C\theta^5\big)^{-1} \leqslant 2\lambda_\dagger \ \text{ при малом } \ \theta, \\ |\lambda_1^\theta - (\lambda_\dagger - \theta^4 L)| \leqslant C\theta^5\lambda_1^\theta(\lambda_\dagger - \theta^4 L) \leqslant 2\lambda_\dagger^2 C\theta^5. \end{cases}$$

Последняя формула доказывает утверждения теоремы 1.2, относящиеся к существованию собственного числа и его асимптотике. Утверждение о единственности будет проверено в п. 1 §5.

3. Глобальное асимптотическое приближение и оценка невязки. Из асимптотических анзацев, построенных в §3, составим глобальное асимптотическое приближение

$$\begin{gathered}\mathcal{U}^\theta(y,z) = \widetilde{\mathbf{u}}_0(\mathbf{y},\mathbf{z}) + \theta\widetilde{\mathbf{u}}_1(\mathbf{y},\mathbf{z}) + \theta^2\widetilde{\mathbf{u}}_2(\mathbf{y},\mathbf{z}) \\ +\theta^3(\mathbf{c}\widetilde{u}^1_\dagger(\mathbf{y},\mathbf{z}) + \widetilde{\mathbf{u}}_3(\mathbf{y},\mathbf{z})) + \sum_\pm \chi_\pm(y)\mathbf{U}^\theta_\pm(y,z),\end{gathered} \tag{4.9}$$

где в соответствии с представлением (3.13) функции

$$\widetilde{\mathbf{u}}_p(\mathbf{y},\mathbf{z}) = \mathbf{u}_p(\mathbf{y},\mathbf{z}) - \sum_\pm \chi_\pm(\mathbf{y})(\mathbf{b}^1_p|\mathbf{y}| \pm \mathbf{b}^0_p)U_\dagger(\mathbf{z}) \tag{4.10}$$

экспоненциально затухают на бесконечности, $\widetilde{u}^1_\dagger$ – аналогичный остаток в разложении (2.3),

$$\begin{gathered}\mathbf{U}^\theta_\pm(y,z) = (1 + \theta c^1_\pm + \theta^2 c^2_\pm + \theta^3 c^3_\pm) \\ \times e^{-\theta^2(M+\theta M^1)|y|}\left(e^{z(k-\theta^4 K)} + e^{-(z+2d)(k-\theta^4 K)}\right),\end{gathered} \tag{4.11}$$

а $c^p_\pm$, M, M^1 и K – величины, указанные формулами (3.19)–(3.23) и (3.16) соответственно.

Поскольку при больших $|y|$ функция (4.9) имеет порядок $e^{-\theta^2 M|y|}$ и $M > 0$ в силу формул (3.20), (3.24), первое соотношение (4.8) очевидно. Для того чтобы убедиться в справедливости второго, заметим, что при учете определений (4.1), (4.2) формула для нормы элемента гильбертова пространства показывает, что

$$\begin{gathered}\|T^\theta\mathcal{U}^\theta - \tau^\theta\mathcal{U}^\theta; \mathcal{H}^\theta\| = \sup\left|\langle T^\theta\mathcal{U}^\theta - \tau^\theta\mathcal{U}^\theta, \mathcal{V}^\theta\rangle\right| = (\lambda_\dagger - \theta^4 L)^{-1} \\ \times \sup\left|(\lambda_\dagger - \theta^4 L)(\mathcal{U}^\theta, \mathcal{V}^\theta)_\Gamma - (\nabla\mathcal{U}^\theta, \nabla\mathcal{V}^\theta)_{\Pi^\theta} - k^2(\mathcal{U}^\theta, \mathcal{V}^\theta)_{\Pi^\theta}\right|.\end{gathered} \tag{4.12}$$

Здесь супремум вычисляется по всем функциям $\mathcal{V}^\theta \in \mathcal{H}^\theta$, для которых

$$\|\nabla\mathcal{V}^\theta; L_2(\Pi^\theta)\|^2 + k^2\|\mathcal{V}^\theta; L_2(\Pi^\theta)\|^2 = 1. \tag{4.13}$$

В силу следового неравенства (см., например, [2, гл. 1]) имеем

$$\|\mathcal{V}^\theta; L_2(\Gamma)\| \leqslant c\|\mathcal{V}^\theta; \mathcal{H}^\theta\| = c. \tag{4.14}$$

По построению функция (4.9) удовлетворяет однородным условиям Неймана (1.5) на дне B и (1.6) на сторонах экрана $\Sigma^\theta_\pm$. Таким образом,

$$\|T^\theta\mathcal{U}^\theta - \tau^\theta\mathcal{U}^\theta; \mathcal{H}^\theta\| = (\lambda_\dagger - \theta^4 L)^{-1} \\ \times \sup\Big|(\Delta\mathcal{U}^\theta + k^2\mathcal{U}^\theta, \mathcal{V}^\theta)_{\Pi^\theta} - (\partial_n\mathcal{U}^\theta - (\lambda_\dagger - \theta^4 L)\mathcal{U}^\theta, \mathcal{V}^\theta)_\Gamma\Big|. \tag{4.15}$$

Функции $\widetilde{\mathbf{u}}_k$ и $\widetilde{u}^1_\dagger$ принадлежат пространству $L_2(\Gamma)$ и удовлетворяют условию Стеклова (1.4) с параметром $\lambda_\dagger$, так как этому же условию подчинены асимптотические члены, отделенные в формулах (4.10) и (2.3). При выводе соотношения (3.17) условие Стеклова для функций (4.11) было соблюдено с точностью $O(\theta^5)$. Поскольку

$$\|\mathbf{U}^\theta_\pm; L_2(\Gamma)\| \leqslant c\|\mathbf{U}^\theta_\pm; \mathcal{H}^\theta\| \leqslant C\theta^{-1}, \tag{4.16}$$

из сказанного, а также неравенства (4.14) вытекает оценка

$$\Big|(\partial_n\mathcal{U}^\theta - (\lambda_\dagger - \theta^4 L)\mathcal{U}^\theta, \mathcal{V}^\theta)_\Gamma\Big| \leqslant c\theta^4. \tag{4.17}$$

Формула (3.16) означает, что функции $\mathbf{U}^\theta_\pm$ удовлетворяют уравнению Гельмгольца (1.3) с той же точностью $O(\theta^5)$, однако из-за умножения но срезки $\chi_\pm$ в уравнении появляется дополнительные невязки. Аналогичные невязки возникают и от первых четырех членов из правой части (4.9). При этом способ определения ингредиентов $c^p_\pm$, M, M^1 и K выражений (4.11) (см. формулы (3.19)–(3.23) и (3.16)) показывает, что главные части упомянутых невязок взаимно уничтожаются, оставляя величины порядка θ^4 с носителями на множестве $\{(y,z) \in \overline{\Pi^\theta} : |y| \in [l, 2l]\}$ (ср. определение (2.2)). Для окончания проверки оценки

$$\Big|(\Delta\mathcal{U}^\theta + k^2\mathcal{U}^\theta, \mathcal{V}^\theta)_{\Pi^\theta}\Big| \leqslant c\theta^4 \tag{4.18}$$

осталось вспомнить соотношения (4.13) и (4.16), а также заметить, что согласно разложениям (3.5), (3.10) и формулам (3.11), (3.12) норма в пространстве $H^1(\Pi^\theta)^*$ функционала

$$\mathbf{A}^\theta_{-\gamma}(\mathbf{u}_0 + \theta\mathbf{u}_1 + \theta^2\mathbf{u}_2 + \theta^3\mathbf{u}_3)$$

не превосходит $c\theta^4$, так как он имеет компактный носитель.

Неравенства (4.17) и (4.18) устанавливает, что норма (4.12) мажорируется величиной $c\theta^4$ – именно в этом и требовалось убедиться.

§5. Окончание доказательств.

1. О единственности в теореме 1.2. Рассмотрим вспомогательную спектральную задачу Стеклова–Неймана в ограниченной области – усеченном волноводе $\Pi^\theta(R) = \{(y,z) \in \Pi^\theta : |y| < R\}$:

$$-\Delta v^\theta(y,z) + k^2 v^\theta(y,z) = 0, \quad (y,z) \in \Pi^\theta(R), \tag{5.1}$$

$$\partial_z v^\theta(y,0) = \eta^\theta v^\theta(y,0), \ -\partial_z u^\theta(y,-d) = 0, \quad y \in (-R,R), \tag{5.2}$$

$$\partial_n v^\theta(y,z) = 0, \quad (y,z) \in \Sigma^\theta_\pm, \quad \pm\partial_y v^\theta(\pm R,z) = 0, \ z \in (-d,0), \tag{5.3}$$

Здесь $R > l$ – фиксированный размер, а η^θ – спектральный параметр.

При $\theta = 0$ задача (5.1)–(5.3) поставлена в прямоугольнике $(-R,R) \times (-d,0)$ с вертикальным разрезом (1.1). Можно убедиться в том, что $\lambda_\dagger$ и $U_\dagger$ – собственное число и соответствующая собственная функция этой предельной задачи (краевые условия Неймана (5.3) выполнены потому, что выражение (1.16) не зависит от y). Кроме того, функция $U_\dagger$ положительна в $\Pi^0(R)$, а значит, согласно строгому принципа максимума $\lambda_\dagger = \eta^0_1$ – первое (наименьшее) собственное число задачи (5.1)–(5.3) при $\theta = 0$. Первое собственное число простое, т.е.

$$\eta^0_2 > \eta^0_1 = \lambda_\dagger. \tag{5.4}$$

Замена координат (3.2) переводит $\Pi^\theta(R)$ в $\Pi^0(R)$, причем краевые условия Стеклова и Неймана остаются неизменными, а оператор Гельмгольца из (5.1) превращается в оператор

$$\Delta_{(\mathbf{y},\mathbf{z})} + k^2 + L^\theta_k(\mathbf{y},\mathbf{z},\nabla_{(\mathbf{y},\mathbf{z})}).$$

Коэффициенты дифференциального оператора L^θ_k оказываются малыми, порядка θ. Согласно [28, гл. 8] малые возмущения дифференциальных операторов краевой задачи приводят к малым возмущениям дискретного спектра, а значит, первые два собственных числа η^θ_1 и η^θ_2 задачи (5.1)–(5.3) удовлетворяют соотношениям

$$|\eta^\theta_1 - \eta^0_1| \leqslant c_1\theta, \ |\eta^\theta_2 - \eta^0_2| \leqslant c_2\theta, \quad \theta \in (0,\theta_0), \ \theta_0 > 0.$$

Отсюда и из неравенства (5.4) вытекает, что, во-первых,

$$\eta^\theta_2 > \lambda_\dagger \quad \text{при} \quad \theta \in (0,\theta_0) \tag{5.5}$$

(при необходимости уменьшили $\theta_0 > 0$) и, во-вторых, при выполнении условия ортогональности

$$\int\limits_{\Pi^\theta(R)} v_1^\theta(y,z)u^\theta(y,z)\,dydz = 0 \tag{5.6}$$

любая функция $u^\theta \in H^1(\Pi^\theta(R))$ удовлетворяет согласно (5.5) оценке типа неравенств Пуанкаре

$$\begin{aligned}\lambda_\dagger\|u^\theta(\cdot,0);L_2(-R,R)\|^2 &\leqslant \eta_2^\theta\|u^\theta(\cdot,0);L_2(-R,R)\|^2\\ &\leqslant \|\nabla u^\theta;L_2(\Pi^\theta(R))\|^2 + k^2\|u^\theta;L_2(\Pi^\theta(R))\|^2\end{aligned} \tag{5.7}$$

(следствие максиминимального принципа; см. [6, теорема 10.2.2]). Прибавив к (5.7) неравенство (1.13) с функцией $U(z) = u^\theta(y,z)$, проинтегрированное по $y \in (-\infty,-R)\cup(R,+\infty)$, приходим к формуле

$$\lambda_\dagger\|u^\theta;L_2(\Gamma)\|^2 \leqslant \|\nabla u^\theta;L_2(\Pi^\theta)\|^2 + k^2\|u^\theta;L_2(\Pi^\theta)\|^2, \tag{5.8}$$

выполненной для функций $u^\theta \in H^1(\Pi^\theta)$, подчиненных условию ортогональности (5.6).

Предположим теперь, что у задачи (1.10) есть два собственных числа λ_1^θ и λ_2^θ на интервале $(0,\lambda_\dagger)$. Тогда у оператора T^θ, введенного в п. 1 § 4, дискретный спектр содержит по крайней мере два собственных числа $\tau_1^\theta = (\lambda_1^\theta)^{-1}$ и $\tau_2^\theta = (\lambda_2^\theta)^{-1}$. Можно считать, что $\tau_1^\theta = \|T^\theta\|$ – большее собственное число, а $\tau_2^\theta < \tau_1^\theta$ – следующее за ним. Соответственно λ_1^θ – первое (наименьшее) собственное число задачи (1.10), и $\lambda_1^\theta < \lambda_2^\theta$.

Применим максиминимальный принцип (см., например, [6, теорема 10.2.2]) к оператору $-T^\theta$ (со знаком минус):

$$-\frac{1}{\lambda_p^\theta} = -\tau_p^\theta = \max_{\mathcal{E}_p^\theta\subset\mathcal{H}^\theta}\ \inf_{u^\theta\in\mathcal{E}_p^\theta\setminus\{0\}} \frac{-\langle T^\theta u^\theta, u^\theta\rangle}{\langle u^\theta, u^\theta\rangle}, \tag{5.9}$$

где $p = 1,2$, а $\mathcal{E}_p^\theta$ – любое подпространство в $\mathcal{H}^\theta$ с коразмерностью $p-1$; в частности, $\mathcal{E}_1^\theta = \mathcal{H}^\theta$. Подпространство

$$\mathcal{E}_\perp^\theta = \{u^\theta \in \mathcal{H}^\theta :\ \text{удовлетворяет условию ортогональности (5.6)}\} \tag{5.10}$$

как раз имеет коразмерность один. Поэтому выбрав конкретное подпространство (5.10) в формуле (5.9) с $p = 2$, вспомним определения

(4.2), (4.1) и получим в силу оценки (5.8), что

$$-\frac{1}{\lambda_2^\theta} = -\tau_2^\theta \geqslant \inf_{u^\theta \in \mathcal{E}_\perp^\theta \setminus \{0\}} \frac{\|u^\theta; L_2(\Gamma)\|^2}{\|\nabla u^\theta; L_2(\Pi^\theta)\|^2 + k^2 \|u^\theta; L_2(\Pi^\theta)\|^2} \geqslant -\frac{1}{\lambda_\dagger}.$$

Обнаруженные соотношения $\tau_2^\theta \leqslant (\lambda_\dagger)^{-1}$ и $\lambda_2^\theta \geqslant \lambda_\dagger$ противоречат предположению $\lambda_2^\theta \in \sigma_d^\theta \subset (0, \lambda_\dagger)$. Теорема 1.2 доказана в полном объеме.

2. О существовании в теореме 1.1. Пусть $\delta > 0$ – малое число и

$$u_\delta(y,z) = e^{-\delta|y|} U_\dagger(z) + \sqrt{\delta} v(x),$$

где v – произвольная функция с компактным носителем, гладкая вплоть до границы в полосе с разрезом Σ^θ, на котором допускаются скачки. Вычислим дробь Рэлея, фигурирующую в формуле (5.9):

$$\frac{\langle T^\theta u_\delta, u_\delta \rangle}{\langle u_\delta, u_\delta \rangle} = \frac{\|u_\delta; L_2(\Gamma)\|^2}{\|\nabla u_\delta; L_2(\Pi^\theta)\|^2 + k^2 \|u_\delta; L_2(\Pi^\theta)\|^2}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\delta}|U_\dagger(0)|^2 + 2\sqrt{\delta} \displaystyle\int_\Gamma U_\dagger(0) v(y,0)\, dy + O(\delta)}{\dfrac{1}{\delta} \displaystyle\int_{-d}^0 (|\partial_z U_\dagger|^2 + k^2 |U_\dagger|^2)\, dz + 2\sqrt{\delta} \displaystyle\int_{\Pi^\theta} (\partial_z U_\dagger \partial_z v + k^2 U_\dagger v)\, dydz + O(\delta)}.$$

Поскольку для собственного числа (1.11) и соответствующей собственной функции (1.16) одномерной задачи Стеклова (1.15) выполнено равенство (3.44), получаем соотношение

$$\frac{\langle T^\theta u_\delta, u_\delta \rangle}{\langle u_\delta, u_\delta \rangle} = \frac{1}{\lambda_\dagger}\Bigg(1 + \frac{2}{\lambda_\dagger}|U_\dagger(0)|^{-2}\sqrt{\delta}\Bigg\{\lambda_\dagger \int_\Gamma U_\dagger(0) v(y,0)\, dy$$
$$- \int_{\Pi^\theta} (\partial_z U_\dagger(z) \partial_z v(y,z) + k^2 U_\dagger(z) v(y,z))\, dydz\Bigg\} + O(\delta)\Bigg).$$

Выражение из фигурных скобок после интегрирования по частям принимает вид

$$-\sum_\pm \int_{\Sigma_\pm^\theta} v(y,z) \partial_n U_\dagger(z)\, ds. \tag{5.11}$$

Интегралы (5.11) обращаются в нуль при всех допустимых пробных функциях v лишь в случае $\theta = 0$, когда экран вертикальный и $\partial_n = \mp\partial_y$. Если же $\theta \in (0, \pi/2]$, то $\partial_n U_\dagger(z) \neq 0$, а значит, интегралу можно придать любое значение путем подбора функции v. Таким образом, рассматриваемую дробь Рэлея можно сделать большей $\lambda_\dagger^{-1}$. В результате правая часть формулы (5.9) при $p = 1$ и $\mathcal{E}_1^\theta = \mathcal{H}^\theta$ становится строго меньше $-\lambda_\dagger^{-1}$ при некоторой функции v и достаточно малом $\delta > 0$, зависящим, вообще говоря от v. Теперь по теореме 10.2.2 [6] дискретный спектр оператора T^θ содержит по крайней мере одну точку, что заканчивает доказательство теоремы 1.1.

Литература

1. N. Kuznetsov, V. Maz'ya, B Vainberg, *Linear Water Waves.* Cambridge, Cambridge University Press, 2002.
2. О.А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики.* Наука, М., 1973.
3. T. H. Havelock, *Forced surface waves on water.* — Phil. Mag. **8** (1929), 569–576.
4. С. А. Назаров, *Простой способ обнаружения ловушечных мод в задачах линейной теории поверхностных волн.* — Докл. РАН **429** (2009) No. 6, 746–749.
5. С. А. Назаров, *Достаточные условия появления ловушечных мод в задачах линейной теории поверхностных волн.* — Зап. научн. семин. ПОМИ РАН **369** (2009), 202–223.
6. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1980.
7. F. Ursell, *Trapping modes in the theory of surface waves.* — Proc. Camb. Phil. Soc. **47** (1951), 347–358.
8. F. Ursell, *Mathematical aspects of trapping modes in the theory of surface waves.* — J. Fluid Mech. **183** (1987), 421–437.
9. R. M. Garipov, *On the linear theory of gravity waves: the theorem of existence and uniqueness.* — Arch. Rat. Mech. Anal. **24** (1967), 352–362.
10. С. А. Назаров, *Концентрация ловушечных мод в задачах линейной теории волн на поверхности жидкости.* — Матем. сб. **199** (2008), No. 12, 53–78.
11. F. Ursell, *The effect of a fixed vertical barrier on surface waves in deep water.* — Proc. Camb. Phil. Soc. **43** (1947), 374–382.
12. F. John, *Waves in the presence of an inclined barrier.* — Comm. Pure Appl. Math. **1** (1948), 149–200.
13. D. V. Evans, *Diffraction of water-waves by a submerged vertical plate.* — J. Fluid Mech. **40** (1970), 433–451.
14. P. McIver, *Scattering of water waves by two surface-piercing vertical barriers.* — IMA J. Appl. Math. **35** (1985), 339–355.
15. D. C. Shaw, *Perturbational results for diffraction of water-waves by nearly-vertical barriers.* — IMA J. Appl. Math. **34** (1985), 99–117.

16. X. Yu, A. T. Chwang, *Analysis of wave scattering by submerged circular disk.* — J. Eng. Mech. **119** (1993), 1804–1817.
17. N. F. Parsons, P. A. Martin, *Scattering of water waves by submerged curved plates and by surface-piercing flat plates.* — Appl. Ocean Res. **16** (1994), 129–139.
18. L. Farina, P. A. Martin, *Scattering of water waves by a submerged disc using a hypersingular integral equation.* — Appl. Ocean Res. **20** (1998), 121–134.
19. M. D. Groves, *On the existence of trapped modes in channels of arbitrary cross-sections.* — Math. Meth. Appl. Sci. **20** (1997), 521–545.
20. P. A. Martin, N. F. Parsons, L. Farina, *Interaction of water waves with thin plates.* — In: Mathematical Techniques for Water Waves (ed. B. N. Mandal) Computational Mechanics Publications (1997), pp. 197–229.
21. C. M. Linton, D. V. Evans, *Trapped modes above a submerged horizontal plate.* — Q. J. Mech. Appl. Math. **4** (1991), 487–506.
22. N. F. Parsons, P. A. Martin, *Trapping of water waves by submerged plates using hyper-singular integral equations.* — J. Fluid Mech. **284** (1995), 359–375.
23. C. M. Linton, N. G. Kuznetsov, *Non-uniqueness in two-dimensional water wave problems: numerical evidence and geometrical restrictions.* — Proc. R. Soc. Lond. A. **453** (1997), 2437–2460.
24. N. Kuznetsov, P. McIver, C. M. Linton, *On uniqueness and trapped modes in the water-wave problem for vertical barriers.* — Wave Motion. **33** (2001), 283–307.
25. И. В. Камоцкий, С. А. Назаров, *Экспоненциально затухающие решения задачи о дифракции на жесткой периодической решетке.* — Матем. заметки. **73** (2003), No. 1. 138–140.
26. С. А. Назаров, *Вариационный и асимптотический методы поиска собственных чисел под порогом непрерывного спектра.* — Сибирск. матем. журнал. **51** (2010), No. 5, 1086–1101.
27. S. A. Nazarov, J. H. Videman, *Existence of edge waves along three-dimensional periodic structures.* — J. of Fluid Mech. **659** (2010), 225–246.
28. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972.
29. J. Sanchez-Hubert, E. Sanchez-Palencia, *Vibration and Coupling of Continuous Systems.* Asymptotic Methods. Heidelberg, Springer Verlag, 1989.
30. W. G. Mazja, S. A. Nasarow, B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singulär gestörten Gebieten.* 1. Akademie-Verlag, Berlin, 1991.
31. W. Bulla, F. Gesztesy, W. Renrer, B. Simon, *Weakly coupled bound states in quantum waveguides.* — Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), No. 8, 1487–1495.
32. P. Exner, S. A. Vugalter, *Bound-states in a locally deformed waveguide: the critical case.* — Lett. Math. Phys. **39** (1997), No. 1, 59–68.
33. D. Borisov, P. Exner, R. Gagyl'shin, D. Krejčiřik, *Bound states in weakly deformed strips and layers.* — Ann. H. Poincaré. **2** (2001), 553–571.
34. В. П. Маслов, *Асимптотика собственных функций уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ к краевыми условиями на эквидистантных кривых и расеяние электромагнитных волн в волноводе.* — Докл. АН СССР **123** (1958), No. 4, 631–633.
35. P. Duclos, P. Exner, *Curvature-induced bound sttes in quantum waveguides in two and three dimensions.* — Review Math. Phys. **7** (1995), No. 1, 73–102.

36. Y. Avishai, D. Bessis, B. G. Giraud, G. Mantica, *Quamtum bound states in open geometries.* — Physical Review B **44** (1991), No. 15, 8028–8034.
37. В. В. Грушин, *О собственных значениях финитно возмущенного оператора Лапласа в бесконечных цилиндрических областях.* — Матем. заметки. **75** (2004), No. 3, 360–371.
38. Р. Р. Гадыльшинс, *О локальных возмущениях квантовых волноводов.* — Теор. и матем. физика **145** (2005), No. 3, 358–371.
39. А. М. Ильин, *Согласование асимптотических разложений решений краевых задач.* Наука, М., 1989.
40. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками.* — Труды Московск. матем. общества **16** (1963), 219–292.
41. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *О коэффициентах в асимптотике решений эллиптических краевых задач в области с коническими точками.* — Math. Nachr. **76** (1977), 29–60.
42. В. Г. Мазья, Б. А. Пламеневский, *Оценки в L_p и в классах Гельдера и принцип максимума Миранда–Агмона для решений эллиптических краевых задач в областях с особыми точками на границе.* — Math. Nachr. **77** (1977), 25–82.
43. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов.* — Успехи матем. наук **54** (1999), No. 5, 77–142.
44. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей.* Наука, М., 1991.
45. S. A. Nazarov, *Properties of spectra of boundary value problems in cylindrical and quasicylindrical domains.* — Sobolev Spaces in Mathematics. V. II (Maz'ya V., Ed.) International Mathematical Series, Vol. 9. Springer, New York (2008), pp. 261–309.
46. М. Ван-Дайк, *Методы возмущений в механике жидкости.* Мир, М., 1967.
47. J. Hadamard, *Mémoire sur le problème d'analyse relatif à l'éuilibre des plaques élastiques encastrées.* — Œuvres, **2** (1968), 515–631.
48. С. А. Назаров, *Сценарии квазистатического роста трещин при слабом искривлении и изломе.* — Прикладная матем. и механика **72**, No. 3 (2008), 507–525.

Videman J. H., Chiado' Piat V., Nazarov S. A. Asymptotics of frequency of a surface wave trapped by a slightly inclined barrier in a liquid layer.

We consider the two-dimensional formulation of the problem on an oblique surface wave for an obstacle in the shape of a submerged strip-barrier. If the barrier is vertical, the discrete spectrum of the problem is empty, but for an inclined barrier there appear an eigenvalue below the threshold of the continuous spectrum and the corresponding trapped mode which decays exponentially in the direction, perpendicular to the obstacle.

The asymptotics of the eigenvalue is found in the case of a small inclination angle.

Поступило 5 сентября 2011 г.

CEMAT/Departamento de Matematica,
Instituto Superior Tecnico,
Av. Rovisco Pais 1, 1049 001, Lisboa, Portugal
E-mail: jvideman@math.ist.utl.pt

Politcnico of Torino,
Corso Duca degli Abruzzi 24,
10129, Torino, Italy
E-mail: valeria.chiadopiat@polito.it

ИПМаш РАН В.О. Большой пр. 61,
199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: srgnazarov@yahoo.co.uk