

М. И. Белишев

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ ДО ВИРТУАЛЬНОГО ИСТОЧНИКА ПО ДИНАМИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ ДАНЫМ

### О РАБОТЕ

По своему содержанию, данная работа примыкает к статье [3] и дополняет ее результаты. Из статьи [3] заимствованы все объекты и основные определения, которые мы кратко воспроизводим с целью сделать изложение независимым и достаточно полным. Главный результат работы – процедура, которая по динамическим граничным данным (оператору реакции) определяет расстояния от точек границы до внутренней точки (“виртуального источника”) с заданными полугеодезическими координатами. Эта процедура может быть реализована внешним наблюдателем по измерениям, проводимым на границе многообразия.

### §1. ГЕОМЕТРИЯ

**1.1. Многообразие.** Пусть  $\Omega$  есть гладкое компактное риманово многообразие с краем  $\Gamma := \partial\Omega$ ;  $\dim \Omega = n \geq 2$ ;  $d$  и  $g$  суть расстояние и метрический тензор в  $\Omega$ .

Для подмножества  $A \subset \Omega$ , через

$$\Omega^r[A] := \{x \in \Omega \mid d(x, A) < r\}, \quad r > 0;$$

обозначим его метрическую окрестность радиуса  $r$ . В случае  $A = \Gamma$ , примем

$$\Omega^r := \Omega^r[\Gamma] = \{x \in \Omega \mid d(x, \Gamma) < r\}.$$

Отметим очевидное равенство: для подмножеств  $A, B \subset \Omega$  выполнено

$$d(A, B) = \inf \{r > 0 \mid \Omega^r[A] \cap \Omega^r[B] \neq \emptyset\}. \quad (1.1)$$

---

*Ключевые слова:* ВС-метод, риманово многообразие, волновое уравнение, динамические граничные данные, определение расстояний до внутренних точек.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 11-01-00407А.

Функция  $\tau : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ , определенная равенством

$$\tau(x) := d(x, \Gamma), \quad x \in \Omega \quad (1.2)$$

называется *эйконалом*. В динамике (см. ниже), величина

$$T_* := \max_{\Omega} \tau(\cdot) = \inf \{r > 0 \mid \Omega^r = \Omega\} \quad (1.3)$$

имеет смысл времени, за которое волны, идущие от границы  $\Gamma$  с единичной скоростью, заполняют все  $\Omega$ .

Поверхности уровня эйконала

$$\Gamma^s := \{x \in \Omega \mid \tau(x) = s\}, \quad s \geq 0$$

суть эквидистанты границы  $\Gamma$ .

**1.2. Множество раздела.** Приведем определение множества раздела многообразия относительно его границы. Пусть  $l_\gamma[0, s]$  есть отрезок длины  $s$  геодезической  $l_\gamma$ , исходящей из  $\gamma \in \Gamma$  нормально к  $\Gamma$ ; пусть  $x(\gamma, s)$  – второй конец отрезка. Величина  $\tau_*(\gamma)$  называется *критической длиной*, если  $\tau(x(\gamma, s)) = s$  при  $0 \leq s \leq \tau_*(\gamma)$  (т.е.  $l_\gamma[0, s]$  минимизирует расстояние от  $x(\gamma, s)$  до  $\Gamma$ ) и  $\tau(x(\gamma, s)) < s$  при  $s > \tau_*(\gamma)$  (т.е.  $l_\gamma[0, s]$  не минимизирует этого расстояния; см. иллюстрацию на рис. 1, где  $s < \tau_*(\gamma) < s'$ ). Отметим, что функция  $\tau_*(\cdot)$  непрерывна на  $\Gamma$ . Точка  $x(\gamma, \tau_*(\gamma))$  есть *точка раздела* на геодезической  $l_\gamma$ . Множество точек раздела

$$c := \bigcup_{\gamma \in \Gamma} x(\gamma, \tau_*(\gamma))$$

называется множеством раздела (*cut locus*) многообразия  $\Omega$  относительно его края  $\Gamma$ .

Имеется другой способ ввести cut locus. Скажем, что точка  $m \in \Omega$  является *кратной*, если она соединяется с  $\Gamma$  более чем одной кратчайшей геодезической (см. рис. 1, на котором  $x(\gamma, s) = x(\gamma', s) = m$  и  $s = \tau(m) = \tau_*(\gamma) = \tau_*(\gamma')$ ). Обозначим через  $c_0$  множество кратных точек и примем

$$c := \bar{c}_0.$$

Это определение эквивалентно первому.

Cut locus – “маленькое” множество: из непрерывности функции  $\tau_*$  легко следует  $\text{vol } c = 0$ .

Добавим, что множество  $\Gamma^s \setminus c$  есть гладкая (возможно, несвязная) гиперповерхность в  $\Omega$ . Если  $s < d(c, \Gamma)$ , то  $\Gamma^s$  является гладкой и диффеоморфной границе  $\Gamma$ .

**1.3. ПГК.** Как следует из определений, для любой  $x \in \Omega \setminus c$  имеет-ся единственная точка  $\gamma(x) \in \Gamma$  ближайшая к  $x$ . В этом случае пара  $(\gamma(x), \tau(x))$  называется *полугеодезическими координатами* (пгк) точки  $x$ . Если  $\gamma^1, \dots, \gamma^{n-1}$  суть локальные координаты в окрестности  $\sigma \subset \Gamma$  точки  $\gamma(x)$ , то функции  $\gamma^1(\gamma(\cdot)), \dots, \gamma^{n-1}(\gamma(\cdot)), \tau(\cdot)$  составляют координатную систему в “трубке”  $\{x \in \Omega \mid \gamma(x) \in \sigma, 0 \leq \tau(x) < \tau_*(\gamma(x))\}$ .

**1.4. Шапочки.** Выберем  $\gamma \in \Gamma$ ,  $s > 0$  и (малое)  $\varepsilon > 0$ ; пусть  $\sigma_\varepsilon(\gamma) := \{\gamma' \in \Gamma \mid d(\gamma', \gamma) < \varepsilon\}$  есть часть границы. Назовем подобласть

$$\begin{aligned} \omega_{\gamma,s}^\varepsilon &:= \{\Omega^s \setminus \Omega^{s-\varepsilon}\} \cap \Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)] \\ &= \{x \in \Omega \mid d(x, \sigma_\varepsilon(\gamma)) < s, s - \varepsilon \leq \tau(x) < s\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

*шапочкой* и отметим свойство монотонности:  $\omega_{\gamma,s}^\varepsilon \subset \omega_{\gamma,s}^{\varepsilon'}$  при  $\varepsilon < \varepsilon'$ . Введем множество

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{\gamma,s}^\varepsilon := \bigcap_{0 < \varepsilon < s} \bar{\omega}_{\gamma,s}^\varepsilon$$

и напомним, что  $x(\gamma, s)$  определено в разделе 1.2. Следующий результат описывает поведение шапочек при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

**Предложение 1.** *Справедливо соотношение*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \omega_{\gamma,s}^\varepsilon = \begin{cases} x(\gamma, s), & \text{если } s \leq \tau_*(\gamma) \\ \emptyset, & \text{если } s > \tau_*(\gamma). \end{cases} \quad (1.5)$$

Таким образом, для заданных  $\gamma \in \Gamma$  и  $s > 0$  имеет место альтернатива;

- либо шапочка  $\omega_{\gamma,s}^\varepsilon$  стягивается к точке  $x(\gamma, s)$ , что выполняется в случае  $s \leq \tau_*(\gamma)$
- либо  $\omega_{\gamma,s}^\varepsilon$  обрывается (исчезает при достаточно малых  $\varepsilon$ ), что выполняется в случае  $s > \tau_*(\gamma)$ .

(см. рис. 1, на котором  $\omega_{\gamma,s}^\varepsilon$  затенена и выполнено  $\tau_*(\gamma) > s > \tau_*(\gamma')$ ).

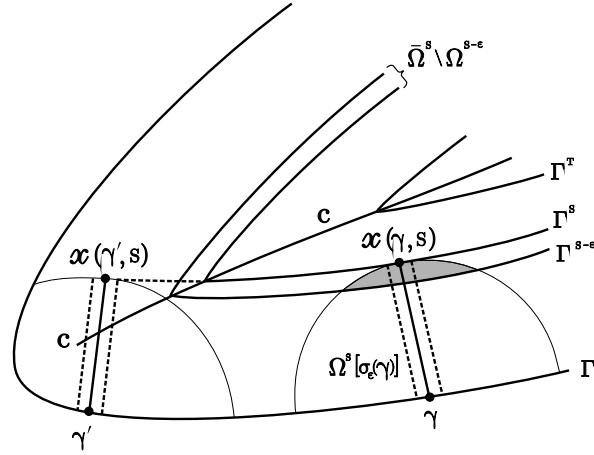


Рис. 1. Шапочка

## §2. ДИНАМИКА

**2.1. Система  $\alpha^T$ .** Рассмотрим начально-краевую задачу вида

$$u_{tt} - \Delta_g u = 0 \quad \text{в } \{\Omega \setminus \Gamma\} \times (0, T) \quad (2.1)$$

$$u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (2.2)$$

$$u = f \quad \text{на } \Gamma \times [0, T], \quad (2.3)$$

в которой  $\Delta_g$  – (скалярный) оператор Бельтрами–Лапласа,  $t = T$  – конечный финальный момент времени,  $f$  – граничное управление,  $u = u^f(x, t)$  – решение. Последнее описывает волну, инициированную граничными источниками и распространяющуюся от  $\Gamma$  вглубь  $\Omega$ .

Задача (2.1)–(2.3) определяет динамическую систему, ассоциированную с многообразием  $\Omega$ ; ниже мы обозначаем ее  $\alpha^T$  и снабжаем стандартными атрибутами теории систем – пространствами и операторами.

**Внешнее пространство.** Пространство управлений

$$\mathcal{F}^T := L_2(\Gamma \times [0, T])$$

со скалярным произведением

$$(f, g)_{\mathcal{F}^T} = \int_{\Gamma \times [0, T]} f(\gamma, t) g(\gamma, t) d\Gamma dt$$

называется *внешним*. Оно содержит расширяющееся семейство подпространств

$$\mathcal{F}^{T, \xi} := \left\{ f \in \mathcal{F}^T \mid f|_{0 \leq t < T - \xi} = 0 \right\}, \quad 0 \leq \xi \leq T,$$

образованных запаздывающими управлениями; параметр  $\xi$  имеет смысл времени действия управлений,  $T - \xi$  есть величина задержки.

Также введем класс гладких управлений

$$\mathcal{M}^T := \{f \in C^\infty(\Gamma \times [0, T]) \mid \text{supp } f \subset \Gamma \times (0, T)\}$$

и его подкласс

$$\mathcal{M}_0^T := \{f \in \mathcal{M}^T \mid f|_{t=T} = 0\}.$$

Отметим, что в силу определений каждое  $f \in \mathcal{M}^T$  аннулируется вблизи  $t = 0$ . При  $f \in \mathcal{M}^T$  задача (2.1)–(2.3) имеет единственное классическое ( $C^\infty$ -гладкое) решение  $u^f$ . Первоначально определенное на  $\mathcal{M}^T$ , отображение  $f \mapsto u^f$  действует непрерывно из  $\mathcal{F}^T$  в пространство  $C([0, T], L_2(\Omega))$  (I. Lasiecka, J-L. Lions, R. Triggiani, 1986). Поэтому его можно расширить на  $\mathcal{F}^T$  по непрерывности. В дальнейшем это расширение предполагается выполненным, а его образы рассматриваются как *обобщенные решения* задачи (2.1)–(2.3).

**Внутреннее пространство.** В теории управления решение  $u^f$  рассматривается как *траектория* системы  $\alpha^T$ , в то время как  $u^f(\cdot, t)$  есть *состояние* в момент  $t$ . Пространство  $\mathcal{H} := L_2(\Omega)$  со скалярным произведением

$$(y, v)_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} y(x) v(x) d\Omega$$

называется *внешним*; волны (состояния)  $u^f(\cdot, t)$  суть его элементы.

Внутреннее пространство содержит расширяющееся семейство подпространств

$$\mathcal{H}^\xi := \text{clos}\{y \in \mathcal{H} \mid \text{supp } y \subset \Omega^\xi\}, \quad 0 \leq \xi \leq T_*.$$

В силу известного свойства конечности области влияния в (гиперболической) задаче (2.1)–(2.3) имеем  $\text{supp } u^f(\cdot, t) \subset \bar{\Omega}^t$  или, равносильно,

$$u^f(\cdot, t) \in \mathcal{H}^t, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (2.4)$$

Это соотношение соответствует физическому факту: волны в  $\Omega$  распространяются с единичной скоростью.

**Оператор управления.** Соответствие “вход  $\rightarrow$  состояние” в системе  $\alpha^T$  реализуется *оператором управления*  $W^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{H}$ ,

$$W^T f := u^f(\cdot, T),$$

который является ограниченным.

**Оператор реакции.** Соответствие “вход  $\rightarrow$  выход” описывается *оператором реакции*  $R^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ ,  $\text{Dom } R^T = \mathcal{M}^T$ ,

$$R^T f := \frac{\partial u^f}{\partial \nu} \Big|_{\Gamma \times [0, T]},$$

где  $\nu$  есть внешняя нормаль к границе. Этот оператор неограничен и может быть расширен на класс Соболева  $\{f \in H^1(\Gamma \times [0, T]) \mid f|_{t=0} = 0\}$ .

Отметим известное свойство оператора реакции: его зависимость от метрики *локальна* в следующем смысле. При фиксированном  $T > 0$  оператор  $R^T$  вполне определяется не всем многообразием, а лишь его частью  $\Omega^{\frac{T}{2}}$ , зацветающей волнами к моменту  $t = \frac{T}{2}$ . При этом  $R^T$  не содержит никакой информации об  $\Omega \setminus \Omega^{\frac{T}{2}}$ . Физический смысл сказанного вполне прозрачен. Внешний наблюдатель, производящий измерения на границе, регистрирует волны  $u^f$ , которые движутся вглубь  $\Omega$  от  $\Gamma$ , отражаются от неоднородностей и возвращаются обратно к  $\Gamma$ , неся информацию о неоднородностях. Поскольку скорость волн равна 1, во временном интервале  $[0, T]$  наблюдатель зарегистрирует лишь волны, отраженные от глубин не более  $\frac{T}{2}$ , в то время как волны от неоднородностей в  $\Omega \setminus \Omega^{\frac{T}{2}}$  вернуться к границе в указанный интервал не успеют и зарегистрированы не будут. Из сказанного, в соответствии с (1.3), следует, что для получения информации о *всем многообразии* наблюдатель должен использовать интервал  $[0, T]$  с  $T \geq 2T_*$ .

**Связывающий оператор.** Центральным объектом ВС-метода является т.н. *связывающий оператор*  $C^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^T$ ,  $C^T := (W^T)^* W^T$ . Из определения имеем:

$$(C^T f, g)_{\mathcal{F}^T} = (W^T f, W^T g)_{\mathcal{H}} = (u^f(\cdot, T), u^g(\cdot, T))_{\mathcal{H}}, \quad (2.5)$$

т.е.  $C^T$  связывает метрики внешнего и внутреннего пространств. Важный факт, определяющий его роль в обратных задачах, состоит в том,

что связывающий оператор явно и просто выражается через оператор реакции.

**Предложение 2.** *Справедливо представление*

$$C^T = \frac{1}{2} (S^T)^* R^{2T} J^{2T} S^T, \quad (2.6)$$

в котором отображение  $S^T : \mathcal{F}^T \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$  продолжает управления с  $\Gamma \times [0, T]$  на  $\Gamma \times [0, 2T]$  как нечетные функции от  $t$  относительно  $t = T$ ;  $J^{2T} : \mathcal{F}^{2T} \rightarrow \mathcal{F}^{2T}$ ,  $(J^{2T} f)(\cdot, t) := \int_0^t f(\cdot, s) ds$  – интегрирование;  $R^{2T}$  – оператор реакции системы  $\alpha^{2T}$ , отвечающей задаче (2.3) с финальным моментом  $t = 2T$ .

(Вывод см в [2]).

**2.2. Управляемость.** Пусть  $\sigma \subset \Gamma$  есть открытое подмножество границы; множество

$$\mathcal{U}_{\text{reach}}^\xi[\sigma] := \{W^T f \mid f \in \mathcal{F}^{T, \xi}; \text{supp } f(\cdot, t) \subset \sigma, 0 \leq t \leq T\}$$

называется *достижимым* (с  $\sigma$ , за время  $\xi$ ). Таким образом, достижимое множество составляют волны  $u^f(\cdot, T)$ , инициированные управлениями, действующими с части границы  $\sigma$ , причем время действия равно  $\xi$ . Его замыкание (в  $\mathcal{H}$ )

$$\mathcal{U}^\xi[\sigma] := \text{clos } \mathcal{U}_{\text{reach}}^\xi[\sigma]$$

мы называем *достижимым подпространством*. Для краткости обозначаем  $\mathcal{U}^\xi[\Gamma] =: \mathcal{U}^\xi$ .

Для произвольного измеримого подмножества  $A \subset \Omega^T$  определим подпространство

$$\mathcal{H}\langle A \rangle := \text{clos } \{y \in \mathcal{H} \mid \text{supp } y \subset A\}.$$

По конечности скорости распространения, каждая входящая в  $\mathcal{U}_{\text{reach}}^\xi[\sigma]$  волна локализована в метрической окрестности  $\Omega^\xi[\sigma]$ . Следовательно, имеем вложение

$$\mathcal{U}_{\text{reach}}^\xi[\sigma] \subset \mathcal{H}\langle \Omega^\xi[\sigma] \rangle. \quad (2.7)$$

Строение достижимых множеств и подпространств, а также характер вложения (2.7) составляют предмет теории граничного управления. Для наших целей следующий результат этой теории играет ключевую роль.

**Предложение 3.** Для любых  $\sigma \subset \Gamma$  и  $\xi > 0$  справедливо соотношение

$$\mathcal{U}^\xi[\sigma] = \mathcal{H}\langle \Omega^\xi[\sigma] \rangle. \quad (2.8)$$

Доказательство см в [2]; вывод (2.8) основан на фундаментальной теореме Хольмгрена–Йона–Татару о единственности продолжения решений волнового уравнения через нехарактеристическую поверхность.

Приведенный результат показывает, что достижимые множества достаточно богаты: они плотны в подпространстве функций, локализованных в подобласти, заметаемой волнами. В теории управления свойство (2.8) интерпретируется как *локальная граничная управляемость* системы  $\alpha^T$ . С ростом  $\xi$  замеченная подобласть расширяется; поэтому

$$\mathcal{U}^\xi[\sigma] = \mathcal{H}, \quad \xi \geq \text{diam } \Omega$$

для любого  $\sigma$ , а при  $\sigma = \Gamma$ , в силу определения величины (1.3), имеем

$$\mathcal{U}^T = \mathcal{H}, \quad T \geq T_*. \quad (2.9)$$

**2.3. Волновые базисы.** Важное следствие управляемости, используемое в обратных задачах – существование базисов, состоящих из волн.

Введем подпространство

$$\mathcal{F}^{T, \xi}[\sigma] := \text{clos} \{ f \in \mathcal{F}^{T, \xi} \mid \text{supp } f(\cdot, t) \subset \sigma, 0 \leq t \leq T \}$$

(замыкание в  $\mathcal{F}^T$ ) управлений, действующих с  $\sigma$  и выберем систему  $\{f_j\}_{j=1}^\infty$  полную в нем. Соответствующая система волн  $\{u^{f_j}(\cdot, T)\}_{j=1}^\infty$ , очевидно, полна в подпространстве  $\mathcal{U}^\xi[\sigma]$ , а в силу (2.8), полна в  $\mathcal{H}\langle \Omega^\xi[\sigma] \rangle$ . Если при этом выбрать управления так, чтобы выполнялись соотношения  $C^T$ -ортогональности

$$(C^T f_i, f_j)_{\mathcal{F}^T} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

то в силу (2.5) волны  $u^{f_j}(\cdot, T)$  составят ортонормированный базис в  $\mathcal{H}\langle \Omega^\xi[\sigma] \rangle$ . Такой базис мы называем *волновым*; порождающие его управления обозначаем через  $f_j^{\sigma, \xi}$ , а сами волны – через  $u_j^{\sigma, \xi} := W^T f_j^{\sigma, \xi}$ . Как и всюду выше, в случае полной границы индекс, указывающий подмножество, опускается:  $f_j^{\Gamma, \xi} =: f_j^\xi$ ,  $u_j^{\Gamma, \xi} =: u_j^\xi$ . Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} (C^T f_i^{\sigma, \xi}, f_j^{\sigma, \xi})_{\mathcal{F}^T} &= (u_i^{\sigma, \xi}, u_j^{\sigma, \xi})_{\mathcal{H}} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots; \\ \bigvee \{u_j^{\sigma, \xi}\}_{j=1}^\infty &= \mathcal{H}\langle \Omega^\xi[\sigma] \rangle, \end{aligned} \quad (2.10)$$



где  $\mathcal{V}$  – замыкание линейной оболочки (в  $\mathcal{H}$ ).

В силу равенства (2.8), ортогональный проектор в  $\mathcal{H}$

$$P^{\sigma,\xi} := \sum_{j=1}^{\infty} (\cdot, u_j^{\sigma,\xi})_{\mathcal{H}} u_j^{\sigma,\xi},$$

построенный по волновому базису, совпадает с проектором на  $\mathcal{H}\langle\Omega^\xi[\sigma]\rangle$ . Действие последнего сводится к срезке функций на под-область  $\Omega^\xi[\sigma]$ , заметенную волнами, идущими от  $\sigma$ . Таким образом, для  $y \in \mathcal{H}$  имеем:

$$P^{\sigma,\xi}y = \sum_{j=1}^{\infty} (y, u_j^{\sigma,\xi})_{\mathcal{H}} u_j^{\sigma,\xi} = \begin{cases} y & \text{в } \Omega^\xi[\sigma] \\ 0 & \text{в } \Omega \setminus \Omega^\xi[\sigma]. \end{cases} \quad (2.11)$$

Отметим, что проекторы-срезы (2.11), отвечающие всевозможным  $\sigma \subset \Gamma$  и  $\xi \in [0, T]$ , коммутируют между собой.

Выберем  $f \in \mathcal{F}^T$  и воспользуемся последним представлением в частном случае  $y = u^f(\cdot, T) = W^T f$ :

$$\begin{aligned} P^{\sigma,\xi}u^f(\cdot, T) &= P^{\sigma,\xi}W^T f = \sum_{j=1}^{\infty} (u^f(\cdot, T), u_j^{\sigma,\xi})_{\mathcal{H}} u_j^{\sigma,\xi} \\ &= \langle \text{см. (2.5)} \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} (C^T f, f_j^{\sigma,\xi})_{\mathcal{F}^T} W^T f_j^{\sigma,\xi} \\ &= \begin{cases} u^f(\cdot, T) & \text{в } \Omega^\xi[\sigma] \\ 0 & \text{в } \Omega \setminus \Omega^\xi[\sigma]. \end{cases} \end{aligned}$$

Обозначая

$$\mathcal{P}^{\sigma,\xi} f := \sum_{j=1}^{\infty} (C^T f, f_j^{\sigma,\xi})_{\mathcal{F}^T} f_j^{\sigma,\xi}, \quad (2.12)$$

имеем

$$P^{\sigma,\xi}W^T = W^T \mathcal{P}^{\sigma,\xi}. \quad (2.13)$$

Отметим, что ряд в правой части (2.12), вообще говоря, расходится в  $\mathcal{F}^T$  и становится сходящимся (в  $\mathcal{H}$ ) только после применения оператора  $W^T$ . В силу этого, точное понимание равенства (2.13) таково:

$$P^{\sigma,\xi}W^T = \lim_{N \rightarrow \infty} W^T \mathcal{P}_N^{\sigma,\xi},$$

где

$$\mathcal{P}_N^{\sigma, \xi} := \sum_{j=1}^N \left( C^T(\cdot), f_j^{\sigma, \xi} \right)_{\mathcal{F}^T} f_j^{\sigma, \xi} \quad (2.14)$$

суть конечномерные операторы в  $\mathcal{F}^T$ , а символ  $\mathcal{P}^{\sigma, \xi} f$  можно интерпретировать как *обобщенное управление*, действующее с  $\sigma$  и порождающее волну, являющуюся срезкой волны  $u^f(\cdot, T)$  на захваченную область  $\Omega^\xi[\sigma]$ . Этой интерпретации мы придерживаемся в дальнейшем.

### §3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

**3.1. Индикаторы.** Через  $1_A(\cdot)$  мы обозначаем *индикатор* (характеристическую функцию) множества  $A \subset \Omega$ :

$$1_A(x) := \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \in \Omega \setminus A \end{cases}$$

пусть также  $1 := 1_\Omega(\cdot)$  есть функция, всюду равная 1, а  $1_{\gamma, s}^\varepsilon := 1_{\omega_{\gamma, s}^\varepsilon}(\cdot)$  – индикатор шапочки. В соответствии с определением последней (см (1.4)), имеем представление

$$1_{\gamma, s}^\varepsilon = [P^s - P^{s-\varepsilon}] P_{\gamma, s}^\varepsilon 1, \quad (3.1)$$

в котором принято обозначение  $P_{\gamma, s}^\varepsilon := P^{\sigma_\varepsilon(\gamma), s}$ . Входящие в него проекторы  $P^s$ ,  $P^{s-\varepsilon}$  и  $P_{\gamma, s}^\varepsilon$  суть срезки на подобласти  $\Omega^s$ ,  $\Omega^{s-\varepsilon}$  и  $\Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$  соответственно. Каждый из проекторов определяется волновым базисом, построенным по адекватной системе управлений: см (2.10). Для нормированных индикаторов

$$\delta_{\gamma, s}^\varepsilon := \frac{1}{\|1_{\gamma, s}^\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2} 1_{\gamma, s}^\varepsilon = \begin{cases} \frac{1}{\text{vol } \omega_{\gamma, s}^\varepsilon} & \text{в } \omega_{\gamma, s}^\varepsilon \\ 0 & \text{в } \Omega \setminus \omega_{\gamma, s}^\varepsilon \end{cases}. \quad (3.2)$$

легко усматривается сходимость (в смысле распределений)

$$\delta_{\gamma, s}^\varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_{x(\gamma, s)}, \quad (3.3)$$

где  $\delta_{x(\gamma, s)}$  есть мера Дирака, сосредоточенная в  $x(\gamma, s)$ .

Для дальнейшего нам удобно модифицировать индикатор шапочки следующим образом. В задаче (2.1)–(2.3) в качестве управления возьмем

$$f_{T, s}(\gamma, t) := 1(\gamma) \theta(T - s - t), \quad (\gamma, t) \in \Gamma \times [0, T], \quad (3.4)$$

где  $\theta(\cdot)$  есть функция Хевисайда,  $s \in (0, T)$  – параметр. Соответствующее решение  $u^{fT, s}$  обозначим через  $u(x, t | s)$  и назовем *калибровочной волной*. Эта волна разрывна и имеет скачок амплитуды на своем переднем фронте – характеристической поверхности  $\{(x, t) | t = \tau(x) + T - s\}$ . Величина скачка легко вычисляется по формулам геометрической оптики (см., например, [1]); ее точное значение для нас несущественно, однако важен следующий факт: в точках гладкости характеристики она отлична от нуля. В финальный момент имеем  $\text{supp } u(x, T | s) \subset \overline{\Omega^s}$ , а передний фронт калибровочной волны совпадает с эквидистантой  $\Gamma^s$ . На гладкой части эквидистанты, – в точках  $x(\gamma, s)$  с  $s < \tau_*(\gamma)$ , – волна имеет разрыв

$$u(x(\gamma, s'), T | s) \Big|_{s'=s-0}^{s'=s+0} = 0 - u(x(\gamma, s - 0), T | s) =: a(\gamma, s) \neq 0. \quad (3.5)$$

Фиксируем точку  $x(\gamma_0, s) \in \Omega^T$  с условием  $s < \tau_*(\gamma_0)$  и построим аналог индикатора  $1_{\gamma, s}^\varepsilon$ , в котором роль  $1(\cdot)$  принимает калибровочная волна. Функция

$$I_{\gamma_0, s}^\varepsilon := [P^s - P^{s-\varepsilon}] P_{\gamma_0, s}^\varepsilon u(\cdot, T | s) \quad (3.6)$$

есть срезка калибровочной волны на шапочку; для ее значений вблизи точки  $x(\gamma_0, s)$  согласно (3.5) имеем:

$$I_{\gamma_0, s}^\varepsilon(x) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} a(\gamma_0, s) + o(1) \neq 0, \quad x \in \omega_{\gamma_0, s}^\varepsilon.$$

Функцию

$$\tilde{\delta}_{\gamma_0, s}^\varepsilon := \frac{1}{\|I_{\gamma_0, s}^\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2} I_{\gamma_0, s}^\varepsilon = \begin{cases} \frac{1+o(1)}{a(\gamma_0, s) \text{vol } \omega_{\gamma_0, s}^\varepsilon} & \text{в } \omega_{\gamma_0, s}^\varepsilon \\ 0 & \text{в } \Omega \setminus \omega_{\gamma_0, s}^\varepsilon \end{cases} \quad (3.7)$$

мы называем *калиброванным индикатором* шапочки  $\omega_{\gamma_0, s}^\varepsilon$ . В силу последнего представления, вполне аналогично (3.3), имеем сходимость

$$\tilde{\delta}_{\gamma_0, s}^\varepsilon \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{\rightarrow} \frac{1}{a(\gamma_0, s)} \delta_{x(\gamma_0, s)}, \quad (3.8)$$

где  $\delta_{x(\gamma_0, s)}$  есть мера Дирака, сосредоточенная в  $x(\gamma_0, s)$ .

Из предложения 1 и коментария к нему в конце п. 1.4, а также определения (3.6), легко следует

**Предложение 4.** *Неравенство  $s \leq \tau_*(\gamma_0)$  выполнено, если и только если при любом  $\varepsilon > 0$  имеет место соотношение*

$$\|I_{\gamma_0, s}^\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2 \neq 0. \quad (3.9)$$

Если же  $\|I_{\gamma_0, s}^\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2 = 0$  начиная с некоторого (малого)  $\varepsilon > 0$ , то выполнено  $s > \tau_*(\gamma_0)$ .

**3.2. Фокусировки.** Пусть последовательность управлений  $\{f_j\}_{j=1}^\infty \subset \mathcal{F}^T$  такова, что для соответствующих волн имеет место сходимость  $u^{f_j}(\cdot, T) \xrightarrow{j \rightarrow \infty} c\delta_{\gamma_0, s}^\varepsilon$  ( $c \neq 0$ ) в смысле распределений. В этом случае скажем, что последовательность волн *фокусируется* в точку  $x(\gamma_0, s)$ , а последовательность  $\{f_j\}_{j=1}^\infty$  назовем *фокусирующей*. Отметим, что существование фокусирующих последовательностей обеспечивается свойством управляемости (2.8) и опишем процедуру их построения. Заметим наперед, что для ее реализации достаточно располагать связывающим оператором  $C^T$ . Последний определяется по оператору реакции (см (2.6)), в силу чего процедуру может выполнить внешний наблюдатель, проводящий динамические наблюдения на границе многообразия.

Итак, пусть  $T > 0$  фиксировано и оператор  $R^{2T}$  известен<sup>1</sup>.

**Шаг 1 (фокусировка в шапочку).**

- В пространстве управлений  $\mathcal{F}^T$  найдем связывающий оператор  $C^T$  по (2.6).
- Выберем  $s \in (0, T]$ ; фиксируем  $\varepsilon > 0$ . Выберем точку  $\gamma_0 \in \Gamma$ . В подпространстве управлений  $\mathcal{F}^{T, s}[\sigma_\varepsilon(\gamma_0)]$ , действующих с окрестности  $\sigma_\varepsilon(\gamma_0) \subset \Gamma$ , выберем систему  $\{f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s}\}_{j=1}^\infty$  со свойствами

$$\begin{aligned} \bigvee \{f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s}\}_{j=1}^\infty &= \mathcal{F}^{T, s}[\sigma_\varepsilon(\gamma_0)]; \\ \left( C^T f_i^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s}, f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s} \right)_{\mathcal{F}^T} &= \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

(т.е. полную в  $\mathcal{F}^{T, s}[\sigma_\varepsilon(\gamma_0)]$  и  $C^T$ -ортогональную). По системе образуем операторы

$$\mathcal{P}_N^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s} := \sum_{j=1}^N \left( C^T(\cdot), f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s} \right)_{\mathcal{F}^T} f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s}, \quad N = 1, 2, \dots$$

(см. (2.14)) и найдем управления

$$\mathcal{P}_N^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s} f_{T, s} := \sum_{j=1}^N \left( C^T f_{T, s}, f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s} \right)_{\mathcal{F}^T} f_j^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s}.$$

<sup>1</sup>ниже значками  $\langle \dots \rangle$  выделены комментарии к процедуре

◁ В силу (2.13) и (2.14), по построению имеем:

$$W^T \mathcal{P}_N^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s} f_{T, s} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} P^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s} u(\cdot, T | s) \quad \text{в } \mathcal{H},$$

т.е. соответствующие волны сходятся к срезке калибровочной волны на подобласть  $\Omega^s[\sigma_\varepsilon(\gamma)]$ . ▷

- Выберем системы действующих на всей границе  $\Gamma$  управлений  $\{f_j^s\}_{j=1}^\infty$  и  $\{f_j^{s-\varepsilon}\}_{j=1}^\infty$ , полные и  $C^T$ -ортогональные в  $\mathcal{F}^{T, s}$  и  $\mathcal{F}^{T, s-\varepsilon}$  соответственно. Составим операторы

$$\mathcal{P}_N^s = \sum_{j=1}^N (C^T(\cdot), f_j^s)_{\mathcal{F}^T} f_j^s, \quad \mathcal{P}_N^{s-\varepsilon} = \sum_{j=1}^N (C^T(\cdot), f_j^{s-\varepsilon})_{\mathcal{F}^T} f_j^{s-\varepsilon}$$

и найдем управления

$$h_N^{\gamma_0, s, \varepsilon} := [\mathcal{P}_N^s - \mathcal{P}_N^{s-\varepsilon}] \mathcal{P}_N^{\sigma_\varepsilon(\gamma_0), s} f_{T, s}.$$

◁ По построению и согласно (3.6) имеем:

$$W^T h_N^{\gamma_0, s, \varepsilon} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} I_{\gamma_0, s}^\varepsilon \quad \text{in } \mathcal{H}, \quad (3.10)$$

т.е. соответствующие волны сходятся к срезке калибровочной волны на шапочку  $\omega_{\gamma_0, s}^\varepsilon$ . Иными словами,  $\{h_N^{\gamma_0, s, \varepsilon}\}_{N \geq 1}$  есть последовательность управлений из подпространства  $\mathcal{F}^{T, s}$ , фокусирующая волны в шапочку. ▷

- Найдем величину

$$\begin{aligned} \|I_{\gamma_0, s}^\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2 &= \langle \text{см. (3.10)} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} (W^T h_N^{\gamma_0, s, \varepsilon}, W^T h_N^{\gamma_0, s, \varepsilon})_{\mathcal{H}} \\ &= \langle \text{см. (2.5)} \rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} (C^T h_N^{\gamma_0, s, \varepsilon}, h_N^{\gamma_0, s, \varepsilon})_{\mathcal{F}^T}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

**Шаг 2 (отбор точек).** Оставляя  $s$  и  $\gamma_0$  фиксированными, устремим  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Вычисляя нормы (3.11), определим, согласно критерию Предложения 4, какое из неравенств имеет место:  $s > \tau_*(\gamma_0)$  или  $s \leq \tau_*(\gamma_0)$ . Если последовательность  $\|I_{\gamma_0, s}^\varepsilon\|_{\mathcal{H}}^2$  прерывается, имеем  $s > \tau_*(\gamma_0)$  и, следовательно, точки с пгк  $(\gamma_0, s)$  в подобласти  $\Omega^T$  не существует. Если же (3.9) выполнено при всех  $\varepsilon > 0$ , то  $x(\gamma_0, s) \in \Omega^T$  и мы переходим к следующему шагу.

**Шаг 3 (фокусировка в точку).** Образуем нормированную систему управлений  $\{\tilde{h}_N^{\gamma_0, s, \varepsilon}\}_{N \geq 1, \varepsilon > 0}$ :

$$\tilde{h}_N^{\gamma_0, s, \varepsilon} := \frac{1}{(C^T h_N^{\gamma_0, s, \varepsilon}, h_N^{\gamma_0, s, \varepsilon})_{\mathcal{F}^T}} h_N^{\gamma_0, s, \varepsilon}.$$

Из определения (3.7) и соотношений (3.10), (3.11) следует сходимость

$$W^T \tilde{h}_N^{\gamma_0, s, \varepsilon} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \tilde{\delta}_{\gamma_0, s}^\varepsilon \quad \text{in } \mathcal{H}$$

к калиброванному индикатору шапочки. В этой сходимости  $\varepsilon$  играет роль параметра, определяющего размер  $\omega_{\gamma_0, s}^\varepsilon$ . В то же время, имеет место сходимость индикаторов (3.8). Сопоставляя обе сходимости, видим, что из построенной системы  $\{\tilde{h}_N^{\gamma_0, s, \varepsilon}\}$  при надлежащем выборе  $\varepsilon = \varepsilon(N) \rightarrow 0$  извлекается “диагональная” подпоследовательность  $\tilde{h}_N^{\gamma_0, s, \varepsilon(N)}$ , для которой выполнено

$$W^T \tilde{h}_N^{\gamma_0, s, \varepsilon(N)} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} c \delta_{x(\gamma_0, s)} \quad (3.12)$$

с  $c = [a(\gamma_0, s)]^{-1} \neq 0$ . Она и является последовательностью управлений, фокусирующей волны в точку  $x(\gamma_0, s) \in \Omega^T$ .

◁ Отметим, что какого-либо универсального рецепта выбора  $\varepsilon(N)$  не существует. Этот выбор должен соотноситься с особенностями конкретного вычислительного алгоритма, реализующего фокусировку. Такая ситуация типична для некорректных задач. ▷

### 3.3. Двойственная система. Динамическую систему

$$v_{tt} - \Delta_g v = 0 \quad \text{в } \{\Omega \setminus \Gamma\} \times (0, \infty) \quad (3.13)$$

$$v|_{t=0} = 0, \quad v_t|_{t=0} = y \quad \text{в } \Omega \quad (3.14)$$

$$v = 0 \quad \text{на } \Gamma \times [0, T], \quad (3.15)$$

в которой  $y \in \mathcal{H}$ , называют *двойственной* к системе (2.1)–(2.3). Ее решение  $v = v^y(x, t)$  описывает волну, инициированную начальным возмущением скорости  $y$  и распространяющуюся (в обратном времени) в многообразии  $\Omega$ , край которого жестко закреплен.

Системе (3.13)–(3.15) сопоставляется *оператор наблюдения*  $O^T : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}^T$ ,

$$O^T y := \partial_\nu v^y|_{\Gamma \times [0, T]}.$$

Справедливо соотношение

$$(W^T f, y)_\mathcal{H} = (f, O^T y)_{\mathcal{F}^T} \quad f \in \mathcal{F}^T, \quad y \in \mathcal{H}, \quad (3.16)$$

устанавливающее двойственность систем (2.1)–(2.3) и (3.13)–(3.15) (см. [2]). Из него имеем:

$$O^T = (W^T)^*. \quad (3.17)$$

**3.4. Фундаментальное решение.** Фиксируем внутреннюю точку  $x_0 \in \Omega^T \setminus \Gamma$  и положим в (3.14)  $y = \delta_{x_0}$ . Соответствующее (обобщенное) решение  $v = v^{\delta_{x_0}}(x, t)$ , понимаемое в смысле теории распределений, есть *фундаментальное решение* задачи Коши (3.13)–(3.15)<sup>2</sup>. Оно описывает волну, инициированную мгновенным точечным источником. По гиперболичности задачи (конечности скорости распространения волн) имеем:

$$\text{supp } v^{\delta_{x_0}} \subset \{(x, t) \in \Omega^T \times [0, T] \mid d(x, x_0) \leq T - t\} =: K_{x_0}^T,$$

т.е. фундаментальное решение сосредоточено в (обратном) конусе влияния точки  $x_0$ . Распространяясь (в обратном времени) от источника, оно достигает границы  $\Gamma$  в момент  $t = T - \tau(x_0)$  и взаимодействует с ней. Взаимодействие описывается “следом”  $\partial_\nu v^{\delta_{x_0}} = O^T \delta_{x_0}$ , являющимся обобщенной функцией на  $\Gamma \times [0, T]$  конечного порядка сингулярности. В точном смысле этот след определяется как функционал на гладких управлениях  $f \in \mathcal{M}^T$ , действующий по правилу

$$\langle \partial_\nu v^{\delta_{x_0}}, f \rangle = (W^T f, \delta_{x_0})_{\mathcal{H}} = u^f(x_0, T),$$

согласованному с двойственностью (3.16). Согласно (3.4), носитель следа находится в подобласти

$$K_{x_0} \cap \{\Gamma \times [0, T]\} = \{(\gamma, t) \in \Gamma \times [0, T] \mid t \leq T - d(\gamma, x_0)\},$$

причем из соображений геометрической оптики (теории распространения сингулярностей: см, например, [1]) следует, что граница подобласти, – поверхность

$$S_{x_0}^T := \{(\gamma, t) \in \Gamma \times [0, T] \mid t = T - d(\gamma, x_0)\},$$

– обязательно входит в состав  $\text{supp } \partial_\nu v^{\delta_{x_0}}$ . Форма этой поверхности, очевидно, определяет функцию  $d(\cdot, x_0) : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}_+$  – расстояние до источника в точке  $x_0$ .

**3.5. Определение расстояний.** Функция  $d(\cdot, x_0)$  может быть извлечена из оператора реакции  $R^{2T}$  по следующей схеме.

- (1) Фиксируем  $\gamma_0 \in \Gamma$  и  $s \in (0, T]$ . Используя процедуру п. 3.2 (Шаги 1, 2), решим вопрос: имеется ли в  $\Omega^T$  точка  $x_0 = x(\gamma_0, s)$ .

---

<sup>2</sup>При  $\dim \Omega = 2, 3$  фундаментальные решения суть обычные (классические) функции

- (2) В случае положительного ответа, построим фокусирующую последовательность  $\{\tilde{h}_N^{\gamma_0, s, \varepsilon(N)}\}_{N \geq 1}$ . Для нее имеем:

$$\begin{aligned} C^T \tilde{h}_N^{\gamma_0, s, \varepsilon(N)} &= (W^T)^* W^T \tilde{h}_N^{\gamma_0, s, \varepsilon(N)} = \langle \text{см. (3.17)} \rangle = O^T W^T \tilde{h}_N^{\gamma_0, s, \varepsilon(N)} \\ &= \langle \text{см. (3.12)} \rangle \xrightarrow{N \rightarrow \infty} O^T [c \delta_{x_0}] = c \partial_\nu v^{\delta_{x_0}}|_{\Gamma \times [0, T]}. \end{aligned}$$

- (3) Проводя вышеупомянутый предельный переход, найдем след  $c \partial_\nu v^{\delta_{x_0}}|_{\Gamma \times [0, T]}$ , определим его носитель и границу последнего – поверхность  $S_{x_0}^T$ .

Тем самым, функция расстояний  $d(\gamma, x_0)$ ,  $\gamma \in \Gamma$  определена.

Отметим в заключение, что измерения на  $\Gamma$ , из которых внешний наблюдатель получает оператор  $R^{2T}$ , используют только *граничные источники* (управления); наличие каких-либо внутренних источников при этом не предполагается<sup>3</sup>. Тем не менее, как показывает данная работа, по этим измерениям наблюдатель может описать взаимодействие волны от *заглубленного источника* с границей. Строя фокусирующие последовательности управлений, наблюдатель моделирует такой источник и визуализирует его действие на  $\Gamma$ . Подчеркивая это обстоятельство, мы и называем такой источник виртуальным.

Варьируя положение виртуального источника вблизи фиксированной внутренней точки (т.е. меняя его полугеодезические координаты), можно восстановить метрику (метрический тензор в пгк) в окрестности этой точки: см. [4]

#### ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. Наука, Москва, 1972.
2. М. И. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method)*. — Inverse Problems 13(5) (1997), R1–R45.
3. М. И. Белишев, *О реконструкции риманова многообразия по граничным данным: теория и план численного эксперимента*. — Зап. научн. семин. ПОМИ 380 (2010), 8–30.
4. М. И. Belishev, M. N. Demchenko, *Time-optimal reconstruction of Riemannian manifold via boundary electromagnetic measurements*. — J. Inverse and Ill-Posed Problems 19 (2011), No. 2, 167–188.

<sup>3</sup>точнее, предполагается, что такие источники отсутствуют



Belishev M. I. Determination of distances to virtual source from dynamical boundary data.

In the paper, we show that the dynamical boundary data (the response operator), which correspond to the measurements at the boundary of a Riemannian manifold, do determine the distances (wave travel times) from the boundary points to an interior source with a given semi-geodesic coordinates. The procedure, which determines these distances, is in principle available for numerical realization.

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
Фонтанка 27, 191023  
Санкт-Петербург, Россия  
*E-mail:* belishev@pdmi.ras.ru

Поступило 28 сентября 2011 г.