Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 393, 2011 г.

В. М. Бабич, А. И. Попов

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ, СОСРЕДОТОЧЕННОЕ ВБЛИЗИ ПОВЕРХНОСТИ

При построении асимптотических решений уравнений, описывающих волны, сосредоточенные вблизи движущихся линий или поверхностей, центральную роль играют специальные (тоже асимптотические) решения уравнений Гамильтона–Якоби. Эти решения вещественны на некоторой поверхности и комплексны вне ее. Решения такого типа впервые рассматривал В. П. Маслов ([1, часть 1]). Для того, чтобы дать математическое описание некоторых, не рассматривавшихся ранее типов волн, авторы снова возвращаются к решениям уравнений Гамильтона–Якоби. Для тех приложений, которые имеются в виду, требуется детальное изложение построений, ведущих к искомому решению уравнения Гамильтона–Якоби в нужной форме. Такому изложению и посвящена настоящая статья.

§1. Введение

Мы будем рассматривать уравнение Гамильтона–Якоби

$$\begin{gathered} \theta_0 + \mathbf{H}_1(x, \theta_1, \theta_2) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \\ (\theta_1, \theta_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \theta_j = \frac{\partial \theta}{\partial x_j}, \quad \theta_0 = \frac{\partial \theta}{\partial t}. \end{gathered} \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbf{H}_1$ – гладкая ($\mathbf{H}_1 \in C^\infty$) вещественная функция. Двумерность x связана со спецификой приложений. Случай $x \in \mathbb{R}^m$, $m > 2$ можно было бы рассмотреть теми же методами.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона–Якоби, асимптотическое разложение.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), грант 11-01-00407А.

Пусть на гладкой кривой $\ell \in \mathbb{R}^2$ $x_i = x_i(q^1)$, $a < q^1 < b$, $i = 1, 2$, $\sum\limits_{j=1}^{2} (\frac{dx_j}{dq^1})^2 > 0$, заданы θ_0, θ_1^0, θ_2^0, то есть θ_0 и $\operatorname{grad}\theta_0$, причем

$$\begin{gathered} \theta\big|_\ell = \theta^0(q^1), \quad \theta_j^0\big|_\ell = \theta_j^0(q^1) \in C^\infty, \quad \frac{\partial\theta_0}{\partial q^1} = \theta_0^j \frac{\partial x_j}{\partial q^1}, \\ \theta_0^0 + \mathbf{H}_1(x, \theta_1^0, \theta_2^0) = 0, \quad \theta_0^0 = \frac{\partial\theta}{\partial t}\Big|_\ell. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Рассмотрим задачу Коши для канонической системы уравнений:

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dx_j}{ds} = -\frac{\partial\mathbf{H}_1}{\partial x_j}, \quad \frac{d\theta_0}{ds} = 0, \quad \frac{d\theta}{ds} = -\mathbf{H}_1 + \theta_j \frac{\partial\mathbf{H}_1}{\partial\theta_j}, \quad s \ge 0,$$

$$x_j\big|_{s=0} = x_j(q^1), \quad t\big|_{s=0} = 0, \quad \theta_j\big|_{s=0} = \theta_j^0(q^1), \quad \theta\big|_{s=0} = \theta^0(q^1). \tag{1.3}$$

Мы придем к поверхности

$$t = s, \quad x_j = x_j(q^1, s), \tag{1.4}$$

в каждой точке которой заданы θ, θ_1, θ_2. Предположим, что:

$$\frac{D(x_1, x_2)}{D(q^1, s)}\Big|_{s=0} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\mathbf{H}_1}{\partial\theta_1} & \frac{\partial\mathbf{H}_1}{\partial\theta_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial q^1} & \frac{\partial x_2}{\partial q^1} \end{vmatrix}_{s=0} \neq 0. \tag{1.5}$$

Это важное предположение о невырожденности ситуации.

Следствием неравенства (1.5) является возможность по крайней мере вблизи какой-то части кривой ℓ ввести в качестве криволинейной системы координат q^1 и s. Полагая $q^2 = s$, эту систему координат будем обозначать q^1, q^2. Оставим t в качестве третьей координаты в трехмерном пространстве. Мы приходим к системе координат q^1, q^2, t, регулярной вблизи поверхности (1.4) (точнее, некоторой ее части). Наши рассмотрения будут локальны, поэтому описанием соответствующей области мы не занимаемся. Введем в уравнение (1.1) в качестве новых независимых переменных вместо (x_1, x_2) криволинейные координаты q^1, q^2. Меняя обозначения, мы запишем уравнение (1.1) в виде

$$\theta_0 + \mathbf{H}(q^1, q^2, \theta_1, \theta_2) = 0, \quad \theta_j = \frac{\partial\theta}{\partial q^j}, \quad \theta_0 = \frac{\partial\theta}{\partial t}. \tag{1.6}$$

Чтобы сократить формулы, мы здесь сохранили прежний “внешний” вид уравнения, хотя θ_j в уравнении (1.6) и θ_j в (1.1) – разные функции.

В координатах q^1, q^2, t поверхность (1.4) описывается уравнением $q^2 = t$.

Каноническая система примет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{dt}{ds}=1, \quad \frac{dq^j}{ds}=\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_j}, \quad \frac{d\theta_0}{ds}=0, \\ &\frac{d\theta_j}{ds}=-\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^j}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial s}=-\mathbf{H}+\theta_j\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_j}. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Наша цель – построение в виде формальных степенных рядов (ФСР) решения задачи Коши для уравнения (1.6), при начальных условиях с заданными коэффициентами

$$\theta\big|_{t=0}=\theta_0^0(q^1)+\theta_0^1(q^1)\frac{q^2}{1!}+\theta_0^2(q^2)\frac{(q^2)^2}{2!}+\cdots, \tag{1.8}$$

причем заданные функции θ_0^0, θ_0^1 – вещественны, θ_0^2, θ_0^3, $\theta_0^4, \ldots$ – комплексные функции вещественного аргумента q^1, и $\operatorname{Im}\theta_0^2>0$. Искомое θ – тоже ФСР:

$$\theta=\theta^0(q^1,t)+\theta^1(q^1,t)\frac{(q^2-t)}{1!}+\theta^2(q^1,t)\frac{(q^2-t)^2}{2!}+\cdots. \tag{1.9}$$

Здесь θ^0 и θ^1 находятся из канонической системы и, как следствие, они вещественны. Впоследствии окажется, что $\operatorname{Im}\theta^2(q^2,t)>0$ и при $t>0$, поэтому при малых $\left|q^2-t\right|>0$, то есть вблизи поверхности (1.4) частные суммы разложения (1.9) будут иметь положительную мнимую часть.

§2. Об уравнениях для $\theta^j(q^1,t)$

Выражение для θ мы будем искать в виде разложения (1.9), которое здесь является анзатцем, то есть аналитическим видом асимптотического разложения. Роль малого параметра играет q^2-t. Речь идет о формальных асимптотических разложениях и решениях. Подставляем анзатц (1.9) в (1.6) и приравниваем нулю коэффициенты при последовательных степенях q^2-t.

Коэффициент при q^2-t в нулевой степени равен

$$\frac{\partial\theta^0}{\partial t}-\theta^1+\mathbf{H}\left(q^1,t,\frac{\partial\theta^0}{\partial q^1},\theta_1\right). \tag{2.1}$$

Выражение (2.1) равно нулю ибо оно постоянно вдоль характеристик $q^1=\mathrm{const}$, $q^2=t$ в силу канонической системы (при $t=0$ равенство (2.1) нулю выполнено по предположению).

Обратимся к коэффициенту при $q^2 - t$ в первой степени. Он равен

$$\frac{\partial \theta^1}{\partial t} - \theta^2 + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^2} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_1}\,\frac{\partial \theta^1}{\partial q^1} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_2}\theta^2. \tag{2.2}$$

Покажем, что это выражение равно нулю. Заметим, что характеристики в координатах q^1, q^2 имеют простой вид $q^1 = \mathrm{const}$, $q^2 = t$. В силу канонических уравнений $\frac{\partial q^2}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_2}$, откуда $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_2} = 1$, поэтому сокращаются члены, содержащие θ_2. Далее $\frac{\partial q^1}{\partial t} = 0 = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_2}$, поэтому $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_2}\frac{\partial \theta^1}{\partial q^1} = 0$. При $q^2 = t$, $\theta^1 = \theta_2$. В силу канонической системы $\frac{d\theta_2}{dt} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^2}$ члены $\frac{\partial \theta^1}{\partial t}$ и $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^2}$ сократятся ибо $\frac{\partial \theta^1}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^2} = \frac{d\theta_2}{dt} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial q^2}$.

Следующий шаг - коэффициент при $\frac{(q^2-t)^2}{2}$. Он равен:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \theta^2}{\partial t} - \theta^3 + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{(\partial \theta_2)^2}(\theta^2)^2 + 2\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q^2 \partial \theta_1}\frac{\partial \theta^1}{\partial q^1}& \\ + 2\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q^2 \partial \theta_2}\theta^2 + 2\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\frac{\partial \theta^1}{\partial q^1}\theta^2 + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_2}\theta^3.&\end{aligned} \tag{2.3}$$

Здесь сокращаются члены, содержащие θ^3(как и члены, содержащие θ^2 в формуле (2.2)). Приравняем выражение (2.3) нулю. Мы пришли к уравнению Риккати для θ^2. Оно имеет вид:

$$\frac{d\theta^2}{dt} + A(\theta^2)^2 + 2B\theta^2 + C = 0, \tag{2.4}$$

где известные функции A, B, C от t выражаются формулами

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{(\partial \theta_2)^2}, \quad B = \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q^2 \partial \theta_2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \theta_1 \partial \theta_2}\,\frac{\partial \theta^1}{\partial q^1}, \\ C &= \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{(\partial q^1)^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{(\partial \theta_1)^2}\left(\frac{\partial \theta_1}{\partial q^1}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial q^2 \partial q^1}\,\frac{\partial \theta^1}{\partial q^1}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Заметим (и это существенно для дальнейшего), что A, B и C – известные вещественные гладкие функции.

Равенство нулю коэффициентов при $\frac{(q^2-t)^n}{n!}$, $n \geq 3$, как нетрудно видеть, имеет вид:

$$\frac{d\theta^n}{dt} = D\theta^n + E, \tag{2.6}$$

где D и E зависят от ранее найденных коэффициентов разложения.

§3. О решении задачи Коши (1.6), (1.8)

Сначала заметим, что главные(вещественные) коэффициенты θ^0 и θ^1 получаются из решения канонической системы с вещественными начальными условиями. Эти условия легко находятся из ФСР (1.8).

Обратимся к нахождению θ^2. Этот коэффициент должен быть решением задачи Коши (см. (1.8), (2.4)) для уравнения Риккати:

$$\frac{d\theta^2}{dt} + A(t)(\theta^2)^2 + 2B(t)\theta^2 + C(t) = 0, \quad \theta^2\big|_{t=0} = \theta_0^2(q^1). \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) для θ^2 исследуем, используя классический (см. [2]) прием сведения уравнения Риккати к системе линейных дифференциальных уравнений. Как нетрудно проверить, отношение $\theta^2 = \frac{P}{Q}$, где P и Q – решение системы

$$\begin{aligned} \frac{dP}{dt} &= -BP - CQ, \\ \frac{dQ}{dt} &= AP + BQ \end{aligned} \tag{3.2}$$

удовлетворяет уравнению (3.1). Чтобы выполнялось уравнение и начальное условие (3.1), достаточно положить

$$P\big|_{t=0} = \theta_0^2, \quad Q|_{t=0} = 1. \tag{3.3}$$

Покажем, что при всех t, для которых имеет место система (3.2), $P \neq 0$ и $Q \neq 0$. В самом деле: по предположению $\operatorname{Im}\theta_0^2 > 0$. Нетрудно проверить, что в силу системы (3.2)

$$P\overline{Q} - \overline{P}Q = 2i\operatorname{Im}P\big|_{t=0} = 2i\operatorname{Im}\theta_0^2 \neq 0. \tag{3.4}$$

Черта – знак комплексного сопряжения. Неравенства $P \neq 0$, $Q \neq 0$ есть простые следствия соотношения (3.4). Нетрудно показать, что всегда $\operatorname{Im}\frac{P}{Q} > 0$. В самом деле:

$$\operatorname{Im}\frac{P}{Q} = \frac{1}{2i}\left(\frac{P}{Q} - \frac{\overline{P}}{\overline{Q}}\right) = \frac{1}{2i}\,\frac{P\overline{Q} - \overline{P}Q}{Q\overline{Q}} = \frac{\operatorname{Im}\theta_0^2}{|Q|^2} > 0. \tag{3.5}$$

Заметим, что рассмотрения, связанные с соотношением (3.4), являются скалярным аналогом соответствующих матричных рассмотрений (см. [3, глава 9], написанная М. М. Поповым).

Нахождение θ^n, $n > 2$ сводится к решению задачи Коши для линейных уравнений (2.6).

Литература

1. В. М. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.* Наука, М., 1977.
2. Математическая энциклопедия. Том 4. "Советская энциклопедия". Наука, М., 1984.
3. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* Наука, М., 1972.

Babich V. M., Popov A. I. Asymptotic solution of Hamilton–Jacobi equation concentrated near surface.

When constructing asymptotic solutions of equations describing waves concentrated near moving lines or surfaces, specific solutions (also asymptotical) of the Hamilton–Jacobi equation play a central role. These solutions are real on some surface and complex outside it. Solutions of such type were firstly considered by V. P. Maslov ([1, part 1]). To give mathematical description of some types of waves not considered earlier, the authors come back to the solutions of the Hamilton–Jacobi equations. For the applications that we keep in mind, it is necessary to describe thoroughly constructions leading to the solution of the Hamilton–Jacobi equation in the proper form. This paper is devoted to this sort of description.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: babich@pdmi.ras.ru

Поступило 20 сентября 2011г.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: popov239@gmail.com