

И. В. Андронов, Д. Буш

ДИФРАКЦИЯ НА УЗКОМ КРУГОВОМ КОНУСЕ КАК НА СИЛЬНО ВЫТЯНУТОМ ТЕЛЕ

§1. ВВЕДЕНИЕ

В работах [1–4] развивается асимптотический подход к задачам дифракции на сильно вытянутых телах. Помимо обычного асимптотически большого параметра $k\rho$, где k – волновое число, а ρ – характерный размер, в качестве которого обычно выбирается радиус продольной кривизны поверхности тела, в задачах дифракции на сильно вытянутом теле присутствует дополнительный параметр, который характеризует степень вытянутости тела. В качестве такого параметра можно, например, выбрать отношение радиусов кривизн поверхности в поперечном ρ_t и в продольном сечениях, то есть параметр $\delta = \rho_r/\rho$, где значения ρ и ρ_t берутся на границе свет-тень. На основании расчетов, проведенных М. Дюруфле (Университет Бордо) по методу конечных элементов высокого порядка, можно утверждать, что влияние степени вытянутости на поле дифракции описывается посредством безразмерного параметра

$$\chi = k\rho\delta^{3/2}.$$

В [3, 4] построены асимптотики поля вблизи поверхности сильно вытянутого сфероида для задач дифракции акустических и электромагнитных волн. Эти асимптотики построены в предположении $k\rho \gg 1$, $\chi = O(1)$ и дают весьма точное совпадение с результатами М. Дюруфле во всем диапазоне значений параметра χ на свету и в средней части сфероида. При $\chi \rightarrow +\infty$ асимптотики переходят в известную полутеневую асимптотику В. А. Фока [5].

Параметр χ на поверхности сфероида оказывается постоянным, то есть несмотря на то, что ρ и ρ_t зависят от точки на поверхности, их комбинация, входящая в параметр χ уже не зависит от положения точки на поверхности и может быть выражена через полуоси, малую

Ключевые слова: высокочастотная дифракция, сильно вытянутое тело, узкий конус.

a и большую b , сфероида

$$\chi = k \frac{a^2}{b}.$$

Таким образом, для сильно вытянутого тела характерно соотношение

$$kR^2/L = O(1), \quad (1)$$

где L – длина тела, а R – его максимальный радиус.

В данной работе, используя подход из [1–4], мы исследуем задачи дифракции плоской волны на круговом конусе. То есть, конус рассматривается как сильно вытянутое тело.

Несмотря на то, что задачам дифракции на конических поверхностях посвящено множество исследований и даже простое перечисление работ заняло бы слишком много места, формулы, получаемые в рамках рассмотрений конуса как сильно вытянутого тела, повидимому, являются новыми. Заметим, что эти формулы могут быть получены и другим способом, например при помощи результатов [6] (см. также [7]).

§2. КОНУС КАК СИЛЬНО ВЫТЯНУТОЕ ТЕЛО

В соответствии с соотношением (1) будем рассматривать задачу дифракции на конусе как задачу дифракции на сильно вытянутом теле. То есть, мы считаем угол раствора конуса α малым и интересуемся значениями поля на таком расстоянии z от вершины конуса, что

$$kz\alpha^2 = O(1). \quad (2)$$

(Вообще говоря, в формуле (2) надо было бы написать $\operatorname{tg}(\alpha)$ вместо α , но ввиду малости угла мы произвели такое упрощение).

Итак, пусть Z некоторое расстояние от вершины конуса и мы интересуемся значениями поля при z порядка Z . Как было установлено в [3, 4] при рассмотрении дифракции на сильно вытянутом сфероиде, характерными масштабами являются величина порядка $(k\rho)^{-1/3}$ по длине и порядка $(k\rho)^{-2/3}$ в поперечных направлениях. В случае конуса выберем аналогичные масштабы и введем систему координат (η, ν, φ) , связанную с цилиндрическими координатами (z, r, φ) формулами

$$\begin{cases} \frac{z}{Z} = (kZ)^{-1/3} \eta - \frac{\eta\nu}{2kZ}, \\ \frac{r}{Z} = (kZ)^{-2/3} \eta\sqrt{\nu}. \end{cases}$$

Отметим, что второе слагаемое в формуле для z введено для придания системе координат (η, ν, φ) свойства ортогональности в старшем по kZ порядке. Вообще говоря, требовать ортогональности системы координат необязательно, и мы делаем это лишь с целью упростить промежуточные выкладки. Система координат (η, ν, φ) может также рассматриваться как искаженная сферическая система координат, в которой учтена малость зенитного угла.

Поверхность конуса в координатах (η, ν, φ) задается условием

$$\nu = \text{const} = \nu_0,$$

а угол при вершине в старшем по kZ порядке определяется формулой

$$\alpha = (kZ)^{-1/3} \sqrt{\nu_0}.$$

§3. ДИФРАКЦИЯ ПЛОСКОЙ АКУСТИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим сначала задачи дифракции для акустических волн. Пусть падающая плоская волна распространяется вдоль оси конуса

$$u_{\text{inc}} = e^{ikz}.$$

Будем рассматривать два случая граничных условий, акустически жесткий конус, на поверхности которого выполняется условие Неймана, и акустически мягкий конус с условием Дирихле на поверхности.

Решение u уравнения Гельмгольца будем искать в виде произведения быстро осциллирующего множителя, который мы выберем в виде $\exp(i(kZ)^{2/3}\eta)$, и функции ослабления $U(\eta, \nu)$, то есть

$$u = \exp\left(i(kZ)^{2/3}\eta\right) U(\eta, \nu). \quad (3)$$

Переходя к координатам (η, ν, φ) и удерживая лишь старшие по $kZ \rightarrow \infty$ члены, получим параболическое уравнение

$$\nu \frac{\partial^2 U}{\partial \nu^2} + \frac{\partial U}{\partial \nu} + \frac{i}{2} \eta^2 \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{i}{2} \eta U = 0.$$

Это уравнение допускает разделение переменных, в результате которого решение может быть записано в виде интеграла по параметру разделения

$$u = \exp\left(i(kZ)^{2/3}\eta\right) \frac{1}{\eta} \int \exp\left(-\frac{\lambda}{\eta}\right) Z_0\left(e^{i\pi/4} \sqrt{2\lambda\nu}\right) \Omega(\lambda) d\lambda. \quad (4)$$

Здесь мы явным образом записали решение обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка по переменной η , а решение

дифференциального уравнения по переменной ν выразили через цилиндрическую функцию Z_0 .

В виде (4) могут быть представлены как полное поле, так и его части, падающая плоская волна u_{inc} и волна u_{ref} , отраженная от поверхности конуса. Очевидно, что падающая волна может быть продолжена за поверхность конуса и должна там быть регулярна, в том числе и на оси конуса. Это определяет выбор функции Бесселя, $Z_0 = J_0$, в качестве решения по переменной ν для падающей волны. Для отраженной же волны ввиду условий излучения следует выбирать функцию Ханкеля первого рода, то есть $Z_0 = H_0^{(1)}$. Итак,

$$u_{\text{inc}} = \exp\left(i(kZ)^{2/3}\eta\right) \frac{1}{\eta} \int \exp\left(-\frac{\lambda}{\eta}\right) J_0\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu}\right) \Omega(\lambda) d\lambda, \quad (5)$$

$$u = \exp\left(i(kZ)^{2/3}\eta\right) \frac{1}{\eta} \int \exp\left(-\frac{\lambda}{\eta}\right) \Omega(\lambda) \left\{ J_0\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu}\right) + R(\lambda)H_0^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu}\right) \right\} d\lambda. \quad (6)$$

Здесь подлежат определению функции $\Omega(\lambda)$ и $R(\lambda)$, вторая из которых имеет смысл коэффициента отражения элементарной волны от поверхности.

Найдем сначала функцию $\Omega(\lambda)$ в представлении (5) падающей волны. Для этого воспользуемся формулой 6.614.1 из [8]

$$\begin{aligned} & \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} J_\gamma(\beta\sqrt{x}) dx \\ &= \frac{\beta}{4} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} \exp\left(-\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) \left[I_{\frac{\gamma-1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) - I_{\frac{\gamma+1}{2}}\left(\frac{\beta^2}{8\alpha}\right) \right]. \quad (7) \end{aligned}$$

С учетом того, что модифицированные функции Бесселя полуцелого знака выражаются через элементарные функции

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{\text{sh}(z)}{z}, \quad I_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}} \frac{\text{ch}(z)}{z},$$

для $\gamma = 0$ правая часть формулы (7) упрощается. Имеем

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} J_0(\beta\sqrt{x}) dx = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right). \quad (8)$$

Падающей волне отвечает функция ослабления

$$U_{\text{inc}} = \exp\left(-\frac{i}{2}\eta\nu\right).$$

Сравнивая это выражение с правой частью формулы (8), положим $\alpha = \eta^{-1}$, $\beta = e^{i\pi/4}\sqrt{2\nu}$. Откуда для падающей волны получаем требуемое представление (5) с

$$\Omega(\lambda) = 1.$$

Теперь найдем функцию $R(\lambda)$ в формуле (6) для полного поля. Её надо выбрать такой, чтобы на поверхности конуса выполнялись заданные граничные условия. В случае условия Неймана находим

$$R = R_N = -\frac{J_1(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0})}{H_1^{(1)}(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0})},$$

а в случае условия Дирихле

$$R = R_D = -\frac{J_0(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0})}{H_0^{(1)}(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0})}.$$

Подставляя найденные функции в представление (6) для полного поля, найдем его значения на поверхности конуса. При упрощении формул учтем значение для вронскиана

$$J_0(x)\dot{H}_0^{(1)}(x) - \dot{J}_0(x)H_0^{(1)}(x) = \frac{2i}{\pi x}.$$

В задаче Неймана получаем следующую асимптотику поля на поверхности

$$u|_{\nu=\nu_0} \sim \exp\left(i(kZ)^{2/3}\eta\right) A\left(2(kZ)^{2/3}\alpha^2\eta\right).$$

Здесь мы выразили значение ν_0 через угол конуса α и ввели специальную функцию

$$A(\xi) = \frac{4e^{5i\pi/4}}{\pi\xi} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{\xi}\right) \frac{dt}{H_1^{(1)}(e^{i\pi/4}t)}.$$

В задаче Дирихле вычислим значение производной поля по нормали n к поверхности. Ввиду

$$\frac{\partial}{\partial n} \approx \frac{\partial}{\partial r} = \frac{2\sqrt{\nu_0}}{Z\eta} (kZ)^{2/3} \frac{\partial}{\partial \nu}$$

находим

$$\frac{\partial u}{\partial n} \sim k\alpha \exp\left(i(kZ)^{2/3}\eta\right) B\left(2(kZ)^{2/3}\alpha^2\eta\right),$$

где

$$B(\xi) = -\frac{8i}{\pi\xi^2} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{\xi}\right) \frac{tdt}{H_0^{(1)}(e^{i\pi/4}t)}.$$

Специальные функции $A(\xi)$ и $B(\xi)$ представлены на фиг. 1. Расчет проводился на Фортране с использованием процедуры СВКС из библиотеки IMSL для вычисления функций Ханкеля, верхний предел интегрирования заменялся величиной $t = 100$.

§4. ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ

Рассмотрим теперь дифракцию плоской электромагнитной волны на узком идеально проводящем круговом конусе. В цилиндрической системе координат зависимость компонент электромагнитного поля от угла φ выражается посредством множителей $\cos \varphi$ или $\sin \varphi$. Выделим все эти множители и при помощи четырех скалярных уравнений из системы уравнений Максвелла выразим компоненты поля через H_φ и E_φ . Для этих компонент из оставшихся уравнений Максвелла получим систему дифференциальных уравнений, которая легко расщепляется на два независимых уравнения

$$L_{(-)}\hat{\Phi} = 0, \quad L_{(+)}\hat{\Psi} = 0,$$

где

$$L_{(\pm)} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \pm \frac{2ik}{(kr)^2 - 1} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \left(1 - \frac{2}{(kr)^2 - 1}\right) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{(kr)^2 - 1}{r^2} - \frac{1}{r^2} \frac{(kr)^2 + 1}{(kr)^2 - 1}\right),$$

для функций

$$\hat{\Phi} = \frac{1}{2}H_\varphi - \frac{i}{2}E_\varphi, \quad \hat{\Psi} = \frac{1}{2}H_\varphi + \frac{i}{2}E_\varphi. \quad (9)$$

Теперь перепишем эти уравнения в координатах η, ν и аналогично (3) выделим быстро осциллирующий множитель

$$\hat{\Phi} = \exp\left(i(kZ)^{2/3}\eta\right) \Phi(\eta, \nu), \quad \hat{\Psi} = \exp\left(i(kZ)^{2/3}\eta\right) \Psi(\eta, \nu).$$

В старшем по kZ порядке получим параболические уравнения

$$L_0\Phi = 0, \quad L_1\Psi = 0,$$

где

$$L_\ell = \nu \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + \frac{\partial}{\partial \nu} + \frac{i}{2} \eta^2 \frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{i}{2} \eta - \frac{\ell}{\nu}.$$

Также как и в скалярном случае эти уравнения допускают разделение переменных, в результате чего мы получаем представления для решений

$$\Phi = \frac{1}{\eta} \int \exp\left(-\frac{\lambda}{\eta}\right) \phi(\lambda) Z_0\left(e^{i\pi/4} \sqrt{2\lambda\nu}\right) d\lambda,$$

$$\Psi = \frac{1}{\eta} \int \exp\left(-\frac{\lambda}{\eta}\right) \psi(\lambda) Z_2\left(e^{i\pi/4} \sqrt{2\lambda\nu}\right) d\lambda,$$

где Z_j – цилиндрические функции. В представлении для падающего поля как и в скалярном случае будем выбирать функции Бесселя, а для отраженного поля удовлетворяющие принципу излучения функции Ханкеля первого рода.

Получим сначала представление для падающей плоской волны

$$\vec{E}_{\text{inc}} = e^{ikz} \vec{e}_x, \quad \vec{H}_{\text{inc}} = e^{ikz} \vec{e}_y.$$

После перехода к функциям (9) и выделения быстрых осцилляций получим

$$\Phi_{\text{inc}} = \frac{1}{2} \exp\left(-\frac{i}{2} \eta \nu\right), \quad \Psi_{\text{inc}} = 0.$$

Воспользовавшись найденным выше представлением для падающей акустической волны, и возвращаясь к исходным компонентам электромагнитного поля, получим

$$E_\varphi^{\text{inc}} = \exp\left(i(kZ)^{2/3} \eta\right) \frac{\sin \varphi}{\eta} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda/\eta} J_0\left(e^{i\pi/4} \sqrt{2\lambda\nu}\right) d\lambda, \quad (10)$$

$$H_\varphi^{\text{inc}} = \exp\left(i(kZ)^{2/3} \eta\right) \frac{\cos \varphi}{\eta} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda/\eta} J_0\left(e^{i\pi/4} \sqrt{2\lambda\nu}\right) d\lambda.$$

Представление для полного поля можно записать в виде

$$E_{\varphi}^{\text{inc}} = \exp\left(i(kZ)^{2/3}\eta\right) \frac{\sin\varphi}{\eta} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda/\eta} \left\{ J_0\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu}\right) + \Omega_0(\lambda)H_0^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu}\right) - \Omega_2(\lambda)H_2^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu}\right) \right\} d\lambda, \quad (11)$$

$$H_{\varphi}^{\text{inc}} = \exp\left(i(kZ)^{2/3}\eta\right) \frac{\cos\varphi}{\eta} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda/\eta} \left\{ J_0\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu}\right) + \Omega_0(\lambda)H_0^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu}\right) + \Omega_2(\lambda)H_2^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu}\right) \right\} d\lambda.$$

Функции Ω_0 и Ω_2 выбираются такими, чтобы выполнялись граничные условия на поверхности конуса. В случае идеального проводника имеем

$$E_{\varphi}|_{\nu=\nu_0} = 0, \quad E_{\eta}|_{\nu=\nu_0} = 0.$$

Из первого условия находим уравнение

$$J_0\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right) + \Omega_0 H_0^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right) - \Omega_2 H_2^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right) = 0. \quad (12)$$

Используя формулу

$$E_{\eta} = \left(2\frac{\partial}{\partial\nu} + 1\right) H_{\varphi} - E_{\varphi},$$

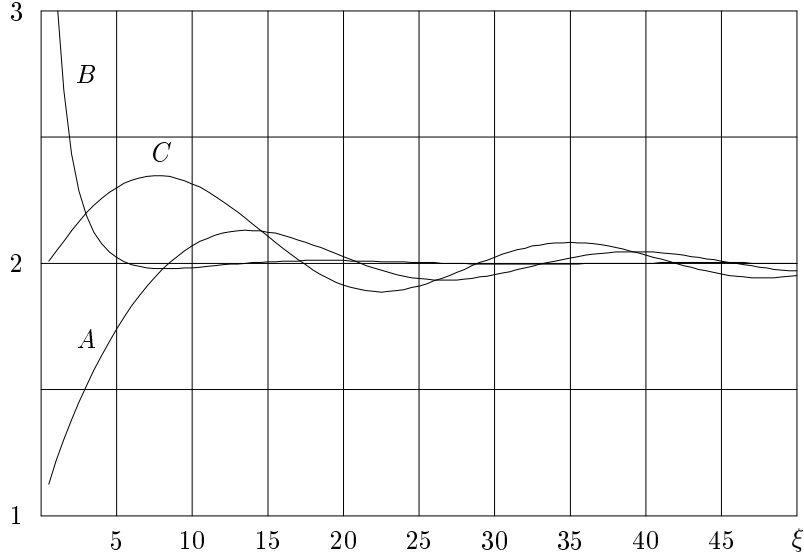
из второго граничного условия получаем уравнение

$$e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0} \dot{J}_0\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right) + J_0\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right) + \Omega_0 \left[e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0} \dot{H}_0^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right) + H_0^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right) \right] + \Omega_2 \left[e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0} \dot{H}_2^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right) + H_2^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right) \right] = 0. \quad (13)$$

Здесь точкой обозначена производная функции.

Решая уравнения (12) и (13), находим

$$\Omega_0 = -\frac{i}{\pi L} \frac{H_2^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right)}{H_0^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right)} - \frac{J_0\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right)}{H_0^{(1)}\left(e^{i\pi/4}\sqrt{2\lambda\nu_0}\right)}, \quad \Omega_2 = -\frac{i}{\pi L},$$

Рис. 1. Специальные функции $A(\xi)$, $B(\xi)$ и $C(\xi)$.

$$L = e^{i\pi/4} \sqrt{\frac{\lambda\nu_0}{2}} H_1^{(1)} \left(e^{i\pi/4} \sqrt{2\lambda\nu_0} \right) \left[H_0^{(1)} \left(e^{i\pi/4} \sqrt{2\lambda\nu_0} \right) - H_2^{(1)} \left(e^{i\pi/4} \sqrt{2\lambda\nu_0} \right) \right].$$

Полагая $\nu = \nu_0$ найдем ток на поверхности конуса

$$J = \exp \left(i(kZ)^{2/3} \eta \right) C \left(2(kZ)^{2/3} \alpha^2 \eta \right) \cos \varphi, \quad (14)$$

где

$$C(\xi) = -\frac{8}{\pi} e^{i\pi/4} \frac{1}{\xi} \times \int_0^{+\infty} e^{-t^2/\xi} \frac{H_2^{(1)}(e^{i\pi/4}t)}{H_1^{(1)}(e^{i\pi/4}t) \left[H_0^{(1)}(e^{i\pi/4}t) - H_2^{(1)}(e^{i\pi/4}t) \right]} dt.$$

Абсолютная величина функции $C(\xi)$ приведена на фиг. 1.

§5. НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Мы построили лишь старшие члены асимптотических разложений, однако процедура позволяет найти поправочные члены любого порядка по большому параметру kZ . Построения проводились в координатах (η, ν) , которые вырождаются в вершине конуса. В связи с этим, полученные формулы непригодны вблизи $\eta = 0$. Так, например, индуцированный ток в задаче дифракции электромагнитной волны имеет особенность в вершине конуса. Старший же член асимптотики (14) регулярен при $\eta = 0$. Вероятно особенность поля в вершине конуса воспроизведется в поправочных членах.

Полученные численные результаты согласуются с приведенными в [9] графиками. Однако вопрос об области применимости полученных асимптотических выражений требует дальнейшего исследования.

В данной работе мы рассматривали только идеальные краевые условия. Но аналогичным образом могут быть рассмотрены задачи дифракции на конических поверхностях с более сложными импедансными краевыми условиями.

Часть результатов, представленных в этой статье, получена в рамках контракта СЕА/DAM 1010S/DIR.

ЛИТЕРАТУРА

1. I. V. Andronov, *High-frequency asymptotics of electromagnetic field on a strongly elongated spheroid*. — PERS Online **5** (2009), No. 6, 536–540.
2. I. V. Andronov, *High-frequency asymptotics for diffraction by a strongly elongated body*. — Antennas and Wireless Propagation Letters, IEEE **8** (2009), 872.
3. И. В. Андронов, *Дифракция на сильно вытянутом теле вращения*. — Акуст. журн. **57** (2011), No. 2, 147–152.
4. И. В. Андронов, *Дифракция высокочастотной электромагнитной волны на вытянутом теле вращения*. — Радиотехника и электроника **56** (2011), No. 11, 1336–1342.
5. В. А. Фок, *Распределение токов, возбуждаемых плоской волной на поверхности проводника*. — ЖЭТФ **15** (1945), No. 12, 693.
6. A. V. Shanin, *Diffraction series on a sphere and conical asymptotics*. — In: Proceedings of the International Conference Days on Diffraction 2011. St.Petersburg (2011), pp. 88–93.
7. А. В. Шанин, *Асимптотики волнового поля при дифракции на конусе и дифракционный ряд на сфере*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 234–258.
8. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*. Физматгиз, Москва, 1963.
9. J. J. Bowman, T. B. Senior, L. T. Uslenghi, *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*. Hemisphere Publishing Corporation. New York, 1987.

Andronov I. V., Bouche D. Diffraction by a narrow circular cone as by a strongly elongated body.

Leading order terms of the asymptotic expansions in the problems of acoustic and electromagnetic waves diffraction by narrow circular cone are constructed in this paper. By analogy with problems of diffraction by strongly elongated bodies the derivations are carried out in special system of coordinates related to the surface which takes into account that the cone angle is small. Graphics of special functions appearing in the considered problems of diffraction are presented.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `iva--@list.ru`

Поступило 8 сентября 2011 г.

CEA,DAM,DIF, F-91297 ArpaJon,
France
E-mail: `daniel.bouche@cea.fr`