Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 392, 2011 г.

О. М. Фоменко

О СУММАТОРНЫХ ФУНКЦИЯХ ДЛЯ АВТОМОРФНЫХ L-ФУНКЦИЙ

Получены оценки сверху и омега результаты для сумматорных функций коэффициентов некоторых автоморфных L-функций.

§1. Введение

Рассмотрим пространство $S_\varkappa(\Gamma)$ голоморфных параболических форм

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_f(n) e(nz)$$

чётного веса $\varkappa \geq 12$ относительно группы $\Gamma := \mathrm{SL}\,(2,\mathbb{Z})$, $\operatorname{Im} z > 0$ и $e(\xi) := e^{2\pi i\xi}$; $S_\varkappa(\Gamma)^+$ – множество примитивных форм из этого пространства. Ниже предполагаем, что $f \in S_\varkappa(\Gamma)^+$. Положим

$$\lambda_f(n) = a_f(n)/n^{\frac{\varkappa-1}{2}};$$

$\lambda_f(n)$ является собственным значением оператора Гекке T_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. По классическому результату Делиня, для простого p имеем

$$\lambda_f(p) = \alpha_p + \overline{\alpha}_p, \quad \alpha_p \overline{\alpha}_p = 1.$$

С каждой формой f из $S_\varkappa(\Gamma)^+$ свяжем следующие автоморные L-функции, первоначально определенные в полуплоскости $\sigma > 1$ (как всегда, $s = \sigma + it$):

$$L(s,f) := \prod_p \left(1 - \alpha_p\, p^{-s}\right)^{-1} \left(1 - \overline{\alpha}_p\, p^{-s}\right)^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_f(n) n^{-s}$$

Ключевые слова: автоморфные L-функции, сумматорные функции, омега результаты.

Работа частично поддержана РФФИ (грант 08-01-00233).

(L-функция Гекке формы f);

$$L(s, \mathrm{sym}^2\ f) := \prod_p \left(1-\alpha_p^2 p^{-s}\right)^{-1}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}\left(1-\overline{\alpha}_p^2 p^{-s}\right)^{-1}$$
$$= \zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_f(n^2)n^{-s} =: \sum_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$$

(L-функция симметрического квадрата формы f, введенная Шимурой [1]);

$$L(s, f\times f) := \prod_p \left(1-\alpha_p^2 p^{-s}\right)^{-1}(1-p^{-s})^{-2}\left(1-\overline{\alpha}_p^2 p^{-s}\right)^{-1}$$
$$= \zeta(2s)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_f(n)^2 n^{-s} =: \sum_{n=1}^{\infty} d_n\, n^{-s}$$

(L-функция свертки Ранкина–Сельберга формы f с собой [2, 3]). Здесь $\zeta(s)$ – дзета-функция Римана. Введенные L-функции аналитически продолжаются на всю s-плоскость, причем $L(s,f)$ и $L(s,\mathrm{sym}^2 f)$ являются целыми, а $L(s, f\times f)$ имеет единственную особенность – простой полюс в точке $s=1$; каждая из этих функций обладает функциональным уравнением, связывающим её значения в точках s и $1-s$.

Рассмотрим также семейство L-функций $L^k(s,f)$, $k = 1,2,3,\ldots$, при этом

$$L^k(s,f) =: \sum_{n=1}^{\infty} d_k(n,f)n^{-s};$$

ясно, что $d_1(n,f) = \lambda_f(n)$.

С введенными выше L-функциями тесно связаны ряды Дирихле

$$S(s) := \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_f(n^2)n^{-s} \tag{1.1}$$

и

$$L(s, f\otimes f) := \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_f(n)^2 n^{-s}.$$

В настоящей работе получены новые оценки сверху и омега результаты для сумматорных функций коэффициентов L-функций, перечисленных выше, а также обозреваются уже известные факты.

§2. Степени L-функции Гекке

Рассмотрим примитивную форму $f \in S_{\varkappa}(\Gamma)^+$ и ассоциируем с ней L-функцию $L^k(s,f)$ с некоторым целым $k \geq 1$. Будем изучать сумматорную функцию

$$\sum_{n \leq x} d_k(n.f) =: \Delta_k(x,f).$$

Определим порядок $\alpha(L^k)$ величины $\Delta_k(x,f)$ как наименьшее число такое, что

$$\Delta_k(x,f) \ll x^{\alpha(L^k)+\varepsilon}$$

для каждого положительного ε.

Сумму $\Delta_1(x,f)$ изучали многие авторы, начиная с Гекке, который в 1927 году доказал [4], что

$$\Delta_1(x,f) \ll x^{1/2} \log x.$$

Вальфиш [5] довёл этот результат до

$$\Delta_1(x,f) \ll x^{11/24+\varepsilon}.$$

Ранкин [2] доказал, что

$$\Delta_1(x,f) \ll x^{2/5}.$$

Если в вычислениях Вальфиша использовать результат Делиня, то получим

$$\Delta_1(x,f) \ll x^{1/3+\varepsilon} \quad \text{(см. [6])}.$$

Хафнер и Ивич [7] слегка улучшили последний результат:

$$\Delta_1(x,f) \ll x^{1/3}.$$

Видимо, справедлива оценка

$$\Delta_1(x,f) \ll x^{1/4+\varepsilon}. \tag{2.1}$$

Вальфиш [5] доказал, что

$$\Delta_1(x,f) = \Omega(x^{1/4}).$$

Джорис [8] уточнил этот результат, получив соотношение

$$\Delta_1(x,f) = \Omega_{\pm}\bigl(x^{1/4} \log\log\log x\bigr). \tag{2.2}$$

Несколько авторов, начиная с Вальфиша [5], доказали асимптотику (с различными остатками)

$$\int_0^x \Delta_1(y,f)^2\,dy \sim C(f)\cdot x^{3/2} \quad (x\to\infty). \tag{2.3}$$

Последние соотношения отчасти подтверждают гипотезу (2.1).

Переходим к величине $\Delta_k(x,f)$ в случае $k\geq 2$. В работе [9] автор, используя приемы, известные в проблемах делителей [10], и современные результаты о средних значениях функции $L(s,f)$, получил неравенство

$$\alpha(L^k)\leq \frac{2k-1}{2k+2} \quad (k\geq 2). \tag{2.4}$$

Применяя результат Ютилы [11] о шестом моменте

$$\int_1^T \left|L\Big(\frac{1}{2}+it,f\Big)\right|^6 dt \ll T^{2+\varepsilon}$$

и стандартные соображения (см. [9]), можно при $k\geq 3$ уточнить неравенство (2.4).

Теорема 1. *Имеем*

$$\alpha(L^k)\leq \frac{k}{2+k} \quad (3\leq k\leq 6),$$
$$\alpha(L^k)\leq \frac{2k-3}{2k} \quad (k\geq 6).$$

Переходим к омега результатам. Используя метод работы [12] (который подробно изложен в [13]), доказываем следующую теорему.

Теорема 2. *Для достаточно большой константы $B>0$, имеем*

$$\int_T^\infty \left|\frac{\Delta_k(u,f)}{u^\alpha}\right|^2 \exp\big(-u/T^B\big)\frac{du}{u} \gg \log T,$$

где $\alpha=\frac{1}{2}-\frac{1}{4k}$.

Следствие 1.

$$\Delta_k(x,f)=\Omega\big(x^{1/2-1/4k}\big).$$

Доказательство мы не приводим, поскольку в §3 сходным методом будет трактоваться более трудная задача.

Отметим, что оценка Джориса (2.2) легко обобщается:

$$\Delta_k(x,f) = \Omega_\pm\big(x^{1/2-1/4k}\log\log\log x\big);$$

мы используем теорему 3 работы [8]. При этои выделим два необходимых факта:

(i) $L(s,f)$ имеет функциональное уравнение

$$(2\pi)^{-s}\Gamma\left(\frac{\varkappa-1}{2}+s\right)L(s,f) = (2\pi)^{s-1}\Gamma\left(\frac{\varkappa+1}{2}-s\right)L(1-s,f);$$

(ii) $L(s,f)$ являтся целой функцией.

Доказанные результаты отчасти подтверждают гипотезу

$$\alpha(L^k) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4k}.$$

Аналог асимптотики (2.3) для $k = 2, 3, \ldots$ не доказан, лишь в случае $k = 2$ имеется результат

$$x^{7/4} \ll \int\limits_0^x \Delta_2(y,f)\,dy \ll x^{7/4+\varepsilon}. \tag{2.5}$$

Оцнка сверху в (2.5) легко следует из результатов Ивича (см. [9]), оценка снизу получена автором (не опубликовано).

§3. L-функция свертки Ранкина–Сельберга

Ранкин [2] и Сельберг [3] первыми изучили аналитические свойства функции $L(s, f\times f)$ и, применяя теорему Ландау, получили асимптотику

$$\sum_{n\le x} d_n = Rx + \Delta(x, f\times f), \tag{3.1}$$

где

$$R > 0 \quad \text{и} \quad \Delta(x, f\times f) \ll x^{3/5}.$$

Из (3.1) легко выводим

$$\sum_{n\le x} \lambda_f(n)^2 = R_1 x + \Delta(x, f\otimes f),$$

где

$$R_1 > 0 \quad \text{и} \quad \Delta(x, f\otimes f) \ll x^{3/5}.$$

Ивич [14] в 1990 году доказал омега результат

$$\Delta(x, f \times f) = \Omega_{\pm}(x^{3/8})$$

и предположил, что

$$\Delta(x, f \times f) \ll x^{3/8+\varepsilon}. \tag{3.2}$$

Несколько раньше А. Б. Воронецкий [15] получил следующий результат:

$$\lim_{x\to\infty} \sup \frac{\Delta(x, f \times f)}{x^{3/8}} = \infty,$$

а также высказал предположение (3.2).

Методом работы [12] можно доказать оценку снизу ($B > 0$ – достаточно большая константа)

$$\int\limits_T^\infty \left|\frac{\Delta(u, f \times f)}{u^{3/8}}\right|^2 \exp\big(-u/T^B\big)\frac{du}{u} \gg \log T,$$

из которой следует

$$\Delta(x, f \times f) = \Omega(x^{3/8}).$$

Однако непосредственно перенести метод [12] на случай $\Delta(x, f \otimes f)$ невозможно, поскольку L-функция

$$L(s, f \otimes f) = \zeta^{-1}(2s)L(x, f \times f)$$

может иметь полюсы в нулях $\zeta(2s)$. Чтобы обойти эту трудность, три автора [16] углубили предшествующий метод из [12], использовав классические плотностные результаты в теории распределения нулей $\zeta(s)$.

В настоящей работе на основе сходных соображений доказывается

Теорема 3. *Для достаточно большой константы $B > 0$, имеем*

$$\int\limits_T^\infty \left|\frac{\Delta(u, f \otimes f)}{u^{3/8}}\right|^2 \exp\big(-u/T^B\big)\frac{du}{u} \gg \log T.$$

Следствие 2.

$$\Delta(x, f \otimes f) = \Omega(x^{3/8}).$$

Доказательство теоремы 3. Обозначим

$y := T^B$, где $B > 0$ – достаточно большая константа; $\alpha := \frac{3}{8}$; $\alpha_1 := \frac{1}{3}$;

$J := \big\{T^{1-\alpha_1} \le t \le 2T$: для любого комплексного числа z с $\operatorname{Re} z \ge \frac{1}{3}$ и $|\operatorname{Im} z - t| \le (\log T)^{20}, \zeta(2z) \ne 0\big\}$;

$J_1 := \{T^{1-\alpha_1} \le t \le 2T$: для любого комплексного числа z с $\operatorname{Re} z \ge \frac{1}{3}$ и $|\operatorname{Im} z - t| \le (\log T)^{15}, \zeta(2z) \ne 0\}$;

Так как наша цель – доказать, что

$$\int\limits_T^\infty \frac{|\Delta(u, f\otimes f)|^2}{u^{2\alpha+1}} \exp\Big(-\frac{u}{y}\Big)\, du \gg \log T,$$

допустим, что

$$\int\limits_T^\infty \frac{|\Delta(u, f\otimes f)|^2}{u^{2\alpha+1}} \exp\Big(-\frac{u}{y}\Big)\, du \ll \log^2 T. \qquad (*)$$

Предложение 1. *При допущении* $(*)$,

$$\int\limits_{\substack{J\\ \operatorname{Re} s=\alpha}} \frac{|L(s, f\otimes f)|^2}{|s|^2}\, dt \ll 1 + \int\limits_T^\infty \frac{|\Delta(u, f\otimes f)|^2}{u^{2\alpha+1}}\, e^{-2u/y}\, du.$$

Для доказательства предложения 1 используем несколько лемм.

Лемма 1 ([16, лемма 3])**.** *Если* $0 \le \operatorname{Re} z \le 1$ *и* $|\operatorname{Im} z| \ge (\log T)^3$, *то*

$$\int\limits_T^\infty \frac{e^{-u/y}}{u^z}\, du = -\frac{T^{1-z}}{1-z} + O(T^{-10}).$$

Лемма 2. *При допущении* $(*)$, *существует* T_0, $T \le T_0 \le 2T$ *такое, что*

(i) $$\frac{\Delta(T_0, f\otimes f) e^{-T_0/y}}{T_0^\alpha} = O(\log T).$$

(ii) $$\frac{1}{y}\int\limits_{T_0}^\infty \frac{|\Delta(u, f\otimes f)| e^{-u/y}}{u^\alpha}\, du = O(\log T).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 4 работы [16].

Лемма 3. *Если* $\operatorname{Re} s \ge \frac{1}{3}$ *и* $t \in J_1$, *то*

$$L(s, f\otimes f) = O\big(\big(|t|+2\big)^A\big)$$

с подходящим $A > 0$.

Доказательство использует два момента:

(i) из хорошо известных свойств функции $L(s, f \times f)$ следует её, самое бóльшее, полиномиальный рост по $|t|$ в любой вертикальной полосе;

(ii) для каждого $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{\zeta(s)} = O_\varepsilon\big(\big(|t|+2\big)^\varepsilon\big)$$

в $\operatorname{Re} s \geq \frac{1}{2} + \varepsilon$ при условии $\zeta(z) \neq 0$ для $\operatorname{Re} z > \frac{1}{2} + \varepsilon$ и $|\operatorname{Im} z - \operatorname{Im} s| \leq (\log T)^5$ и $|\operatorname{Im} s| \geq 1$ (см. [10, теорема 14.2]).

Лемма 4. *Если $t \in J$ и $\operatorname{Re} s = \alpha$, то при допущении $(*)$ имеем*

$$L(s, f \otimes f) = \sum_{n \leq T_0} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s} e^{-n/y} + s \int_0^1 \sum_{n > T_0} \frac{\Delta(n+u, f \otimes f)}{(n+u)^{s+1}} e^{-(n+u)/y} \, du + O(\log T).$$

Доказательство начинаем с

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_f(n)^2 e^{-n/y}}{n^s} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\operatorname{Re} w = 2} L(s+w, f \otimes f) y^w \Gamma(w) \, dw.$$

Отбросим часть интеграла $|\operatorname{Im} w| \geq (\log T)^4$ с малым остатком и сдвинем прямую интегрирования на $\operatorname{Re} w = \frac{1}{3} - \alpha$. Рассмотрим прямоугольник в w-плоскости $-\frac{1}{24} \leq \operatorname{Re} w \leq 2$, $-(\log T)^4 \leq \operatorname{Im} w \leq (\log T)^4$. Поскольку $t + \operatorname{Im} w \in J_1$, подинтегральная функция внутри этого прямоугольника имеет единственную особенность – простой полюс в точке $w = 0$. Используя лемму 3 (и беря $B > 0$ достаточно большим), доказываем, что интеграл по горизонтальным сторонам и левой вертикальной стороне очень мал. Таким образом,

$$L(s, f \otimes f) = \sum_{n=1}^\infty \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s} e^{-n/y} + O(T^{-10}) = \sum_{n \leq T_0} + \sum_{n > T_0} + O(T^{-10}).$$

Имеем

$$\begin{aligned}\sum_{n>T_0} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s}\, e^{-n/y} &= \int\limits_{T_0}^{\infty} \frac{1}{u^s}\; e^{-u/y}\, d\Big(\sum_{n\le u} \lambda_f(n)^2\Big)\\ &= \int\limits_{T_0}^{\infty} \frac{1}{u^s}\; e^{-u/y}\, d\big(R_1 u + \Delta(u, f\otimes f)\big)\\ &= R_1 \int\limits_{T_0}^{\infty} \frac{1}{u^s}\; e^{-u/y}\, du + \int\limits_{T_0}^{\infty} \frac{1}{u^s}\; e^{-u/y}\, d\big(\Delta(u, f\otimes f)\big)\\ &=: S_1 + S_2.\end{aligned}$$

По лемме 1, величина S_1 мала.

Действительно,

$$\Big|\int\limits_{T_0}^{\infty} \frac{1}{u^s}\, e^{-u/y}\, du\Big| \ll \frac{T^{5/8}}{T^{2/3}} = T^{-1/24}.$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned}S_2 = &\left[\frac{\Delta(u, f\otimes f)\, e^{-u/y}}{u^s}\right]_{T_0}^{\infty}\\ &+ s\int\limits_{T_0}^{\infty} \frac{\Delta(u, f\otimes f)\, e^{-u/y}}{u^{s+1}}\, du + \frac{1}{y}\int\limits_{T_0}^{\infty} \frac{\Delta(u, f\otimes f)\, e^{-u/y}}{u^s}\, du.\end{aligned}$$

Первое и третье слагаемые оцениваются с помощью леммы 2. Следовательно,

$$S_2 = s\int\limits_{T_0}^{\infty} \frac{\Delta(u, f\otimes f)\, e^{-u/y}}{u^{s+1}}\, du + O(\log T),$$

и лемма 4 доказана.

Лемма 5. *Для любой последовательности комплексных чисел b_n,*

$$\int\limits_0^T \Big|\sum_n b_n\, n^{it}\Big|^2\, dt = \sum_n (T + O(n))(|b_n|^2)$$

при условии, что ряд в правой части сходится.

Доказательство см. в [17].

Лемма 6. *Имеем*

$$\int\limits_{\substack{J\\ \operatorname{Re} s=\alpha}} \left| \sum_{n\le T_0} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s}\, e^{-n/y} \right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll 1.$$

Достаточно доказать, что

$$\int\limits_{T^{1-\alpha_1}}^{2T} \left| \sum_{n\le T_0} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s}\, e^{-n/y} \right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll 1.$$

По лемме 5,

$$\int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} \left| \sum_{n\le T_0} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s}\, e^{-n/y} \right|^2 dt \ll \sum_{n\le T_0} \left(2^m + O(n)\right) \frac{\lambda_f(n)^4}{n^{2\alpha}} =: I_1.$$

Абелево суммирование и асимптотика [18]

$$\sum_{n\le T_0} \lambda_f(n)^4 \sim cT_0 \log T_0$$

дают

$$I_1 \ll \left(2^m T_0^{1-2\alpha} + T_0^{2-2\alpha}\right) \log T_0.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{2^m}^{2^{m+1}} \left| \sum_{n\le T_0} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s}\, e^{-n/y} \right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll \left(\frac{T_0^{1-2\alpha}}{2^m} + \frac{T_0^{2-2\alpha}}{2^{2m}} \right) \log T_0.$$

Суммируя по m, $T^{1-\alpha_1}/2 < 2^m \le 4T$, имеем

$$\int\limits_{T^{1-\alpha_1}}^{2T} \left| \sum_{n\le T_0} \frac{\lambda_f(n)^2}{n^s}\, e^{-n/y} \right|^2 \frac{dt}{t^2} \ll \left(\frac{T_0^{1-2\alpha}}{T^{1-\alpha_1}} + \frac{T_0^{2-2\alpha}}{T_0^{2-2\alpha_1}} \right) \log T_0 \ll 1,$$

что доказывает лемму 6.

Лемма 7. *Имеем*

$$\int\limits_{\substack{J\\ \operatorname{Re} s=\alpha}} \left| \int\limits_0^1 \sum_{n\le T_0} \frac{\Delta(n+u, f\otimes f) e^{-(n+u)/y}}{(n+u)^{s+1}} \right|^2 dt \ll \int\limits_T^\infty \frac{|\Delta(u, f\otimes f)|^2}{u^{2\alpha+1}}\, e^{-2u/y}\, du. \tag{3.3}$$

Для доказательства заметим, что интеграл слева в (3.3) ограничен сверху величиной

$$I_2 := \int\limits_0^{2T} dt \int\limits_0^1 \left| \sum_{n\ge T_0} \frac{\Delta(n+u, f\otimes f)}{(n+u)^{s+1}}\, e^{-(n+u)/y} \right|^2 du.$$

Переменим порядок интегрирований и используем лемму 5. Имеем

$$\begin{aligned} I_2 &\ll \int\limits_0^1 \sum_{n\ge T_0} \frac{(2T+O(n))|\Delta(n+u, f\otimes f)|^2}{(n+u)^{2\alpha+2}}\, e^{-2(n+u)/y}\, du \\ &\ll \int\limits_0^1 \sum_{n\ge T_0} \frac{|\Delta(n+u, f\otimes f)|^2}{(n+u)^{2\alpha+1}}\, e^{-2(n+u)/y}\, du \\ &= \sum_{n\ge T_0} \int\limits_n^{n+1} \frac{|\Delta(u, f\otimes f)|^2}{u^{2\alpha+1}}\, e^{-2u/y}\, du \\ &\le \int\limits_T^\infty \frac{|\Delta(u, f\otimes f)|^2}{u^{2\alpha+1}}\, e^{-2u/y}\, du, \end{aligned}$$

и лемма 7 доказана.

Предложение 1 следует теперь из лемм 4, 6 и 7.

Предложение 2. *Имеем*

$$\int\limits_{\substack{J\\ \operatorname{Re} s=\alpha}} \frac{|L(s, f\otimes f)|^2}{|s|^2}\, dt \gg \log T.$$

Для доказательства этого утверждения нобходимо несколько фактов о множестве J. Для любого x, $T^{1-\alpha_1} \le x \le 2T$, определим

$$J(x) := J \cap [x, 2x].$$

Нам потребуется следующий результат Ингама.

Лемма 8 ([10, с. 236]). *Число нулей* $\zeta(s)$ *в* $\{\operatorname{Re} s \ge \sigma_0,\ |t| \le T\}$

$$\ll T^{\frac{3}{2-\sigma_0}(1-\sigma_0)} \log^5 T.$$

Интерпретируем множество $J(x)$. Для каждого нуля $\rho = \beta + i\gamma$, $\beta \ge \frac{1}{3}$, $x - (\log T)^{20} \le \gamma \le 2x + (\log T)^{20}$, функции $\zeta(2s)$ выбросим часть $[\gamma - (\log T)^{20}, \gamma + (\log T)^{20}]$ из интервала $[x, 2x]$. Остаток даёт нам $J(x)$. Пусть $N(x)$ означает число нулей функции $\zeta(2s)$ в $\{\operatorname{Re} s \ge 1/3, t \in [x, 2x]\}$. По лемме 8, $N(x) \ll x^{3/4} \log^5 x$. Следовательно, $J(x)$ состоит, из самое бóльшее, $N(x)$ непересекающихся интервалов, причем их общая длина $\gg x$.

Выбросим из $J(x)$ связные компоненты, длина каждой из которых $\le \log x$. Обозначим $J^{(1)}(x)$ оставшуюся часть с общей длиной $\gg x$.

Для доказательства предложения 2 необходимо также функциональное уравнение, которое вывели Ранкин и Сельберг:

$$(2\pi)^{-2s}\Gamma(s)\Gamma(s+\varkappa-1)\zeta(2s)L(s, f\otimes f)$$
$$= (2\pi)^{-2+2s}\Gamma(1-s)\Gamma(\varkappa-s)\zeta(2-2s)L(1-s, f\otimes f). \qquad (3.4)$$

Оценим снизу интеграл

$$\int\limits_{\substack{J \\ \operatorname{Re} s=\alpha}} |L(s, f\otimes f)|^2\, dt,$$

что сводится к оценке снизу интеграл

$$\int\limits_{\substack{J^{(1)}(x) \\ \operatorname{Re} s=\alpha}} |L(s, f\otimes f)|^2\, dt,$$

и, следовательно, к оценке снизу интеграла

$$\int\limits_{A}^{A+H} \left| L\left(\frac{3}{8} + it, f\otimes f\right)\right|^2 dt =: I_3;$$

здесь $[A, A+H]$ – любая связная компонента множества $J^{(1)}(x)$. В силу (3.4), имеем

$$I_3 = \int\limits_A^{A+H} \Bigg| (2\pi)^{4s-2} \frac{\zeta\Big(\frac{5}{4}-2it\Big)}{\zeta\Big(\frac{3}{4}+2it\Big)} \frac{\Gamma\Big(\frac{5}{8}-2it\Big)}{\Gamma\Big(\frac{3}{8}+2it\Big)} \frac{\Gamma\Big(\varkappa-\frac{3}{8}-it\Big)}{\Gamma\Big(\varkappa-\frac{5}{8}+it\Big)}$$
$$\times L\Big(\frac{5}{8}-it, f\otimes f\Big)\Bigg|^2 dt \gg x \int\limits_A^{A+H} \Bigg| \frac{L\Big(\frac{5}{8}+it, f\otimes f\Big)}{\zeta\Big(\frac{3}{4}+2it\Big)} \Bigg|^2 dt =: xI_4.$$

Лемма 9.

$$I_4 > C\cdot H, \tag{3.5}$$

где $C > 0$ – абсолютная константа,

Для доказательства используем теорему A работы [19]. Функция

$$\frac{L(s, f\otimes f)}{\zeta\Big(-\frac{1}{2}+2s\Big)} =: \sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s} =: \varphi(s)$$

сходится в полуплоскости $\operatorname{Re} s > 1$, аналитически продолжается в $\{\operatorname{Re} s \geq \frac{7}{12},\ A \leq t \leq A+H\}$, причем $H \geq \log A$, $b_1 = 1$, и максимум модуля $|\varphi(s)|$ в $\{\operatorname{Re} s \geq \frac{7}{12},\ A \leq t \leq A+H\}$ не превосходит e^A. Следовательно, $\varphi(s)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы A работы [19], и лемма 9 доказана.

Из (3.5) следует

$$\int\limits_{J^{(1)}(x)} L\Big(\frac{3}{8}+it, f\otimes f\Big)\Bigg|^2 \gg x^2,$$

что доказывает предложение 2, которое в соединении с предложением 1 даёт теорему 3. □

§4. L-функция симметрического квадрата

Рассмотрим примитивную форму $f \in S_\varkappa(\Gamma)^+$. Шимура [1] ввел функцию $L(s, \operatorname{sym}^2 f)$ и изучил её свойства; в частности, он доказал функциональное уравнение

$$\pi^{-\frac{3}{2}s}\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{\varkappa-1}{2}\Big)\Gamma\Big(\frac{s}{2}+\frac{\varkappa}{2}\Big)L(s, \operatorname{sym}^2 f)$$

$$= \pi^{-\frac{3}{2}(1-s)}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{\varkappa-1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1-s}{2}+\frac{\varkappa}{2}\right)L(1-s,\operatorname{sym}^2 f).$$

С использованием свойств $L(s,\operatorname{sym}^2 f)$ и теоремы Ландау, доказывается [20], что

$$C(x) := \sum_{n\le x} c_n \ll x^{1/2}\log^2 x; \tag{4.1}$$

Из (4.1) следует оценка

$$Q(x) := \sum_{n\le x} \lambda_f(n^2) \ll x^{1/2}\log^3 x. \tag{4.2}$$

Применяя соображения работы [7], оценки (4.1) и (4.2) можно довести, соответственно, до $\cdots \ll x^{1/2}$ и $\cdots \ll x^{1/2}\log x$; это проделано в [21].

В [20] доказано, что

$$C(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/3}), \tag{4.3}$$

точнее, получено несколько больше: найдутся положительные константы A и B такие, что для любого $T > T_0$ каждый интервал $[T, T+AT^{2/3}]$ содержит две точки t_1, t_2, для которых

$$C(t_1) > Bt_1^{1/3}, \quad C(t_2) < -Bt_2^{1/3}.$$

Пользуясь теоремой 3 работы [8], (4.3) можно уточнить:

$$C(x) = \Omega_{\pm}(x^{1/3}\log\log\log x).$$

Найден [22] правильный порядок интегрального среднего $\int\limits_0^x C(u)^2\,du$: для всех $x \ge 2$

$$K_1 x^{5/3} \le \int\limits_0^x C(u)^2\,du \le K_2 x^{5/3},$$

где K_1, K_2 – некоторые положиельные константы.

Изучать сумму $Q(x)$ труднее, чем $C(x)$, поскольку (см. (1.1))

$$S(s) = \zeta^{-1}(2s)L(s,\operatorname{sym}^2 f),$$

т.е. возникают те же препятствия, что и в случае $\Delta(x, f\otimes f)$. Но, действуя аналогично доказательству теоремы 3, получаем следующий результат.

Теорема 4. *Для достаточно большой константы $B > 0$, имеем*

$$\int\limits_T^\infty \left|\frac{Q(u)}{u^{1/3}}\right|^2 \exp\Big(-u/T^B\Big)\,\frac{du}{u} \gg \log T.$$

Следствие 3.

$$Q(x) = \Omega(x^{1/3}).$$

Другим методом следствие 3 получено в [21].

Литература

1. G. Shimura, *On the holomorphy of certain Dirichlet series.* — Proc. London Math. Soc.**31** (1975), 79–98.
2. R. A. Rankin, *Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions.* II. *The order of the Fourier coefficients of integral modular forms.* III. *A note on the sum function of the Fourier coefficients of integral modular forms.* — Proc. Cambridge Phil. Soc. **35** (1939), 357–372; **36** (1940), 150–151.
3. A. Selberg, *Bemerkungen über eine Dirichletsche Reine, die mit der Theorie der Modulformen nahe verbunden ist.* — Arch. Math. Naturvid. **43** (1940), 47–50.
4. E. Hecke, *Mathematische Werke¡ Vandenhoeck und Ruprecht.* Göttingen, 1983.
5. A. Walficz, *Über die Koeffizientensummen einiger Modulformen.* — Math. Ann. **108** (1933), 75–90.
6. О. М. Фоменко, *Приложения теории модулярных форм к теории чисел.* — Итоги науки и техники. Алгебра. Топология. Геометрия, М., ВИНИТИ, 1977, т. 15, с. 5–91.
7. J. L. Hafner, A. Ivić, *On sums of Fourier coefficients of cusp forms.* — L'Enseignement Mathématique **35** (1989), 375–382.
8. H. Joris, *Ω-Sätze für gewisse multiplikative arithmetische Funktionen.* — Comment. Math. Helv. **48** (1973), 409–435.
9. О. М. Фоменко, *Теоремы о средних значения для одного класса рядов Дирихле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 201–223.
10. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function.* 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
11. M. Jutila, *Lectures on a method in the theory of exponential sums.* Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, 1987.
12. R. Balasubramanian, K. Ramachandra, *Some problems of analytic number theory.* III. — Hardy–Ramanujan J. **4** (1981), 13–40.
13. A. Sankaranarayanan, K. Srinivas, *On a method of Balasubramanian and Ramachandra (on the Abelian group problem).* — Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **97** (1997), 135–161.
14. A. Ivić, *Large values of certain number-theoretic error terms.* — Acta Arithm. **56** (1990), 135–159.

15. А. Б. Воронецкий, *Аналог теоремы Харди для коэффициентов Фурье параболических форм.* — Автоморфные функции и теория чисел, Ижевск (1987), 56–64.
16. R. Balasubramanian, K. Ramachandra, M. V. Subbarao, *On the error function in the asymptotic formula for the counting function of k-full numbers.* — Acta Arithm. **50** (1988), 107–118.
17. H. L. Montgomery, R. C. Vaughan, *Hilbert's inequality.* — J. London Math. Soc. (2) **8** (1974), 73–82.
18. C. J. Moreno, F. Shahidi, *The fourth moment of the Ramanujan τ-function.* — Math. Ann. **266** (1983), 233–239.
19. R. Balasubramanian, K. Ramachandra, *Progress towards a conjecture on the mean value of Titchmarsch series.* III. — Acta Arithm. **45** (1986), 309–318.
20. О. М. Фоменко, *Тождества, включающие коэффициенты автоморфных L-функций.* — Зап. научн. семин, ПОМИ **314** (2004), 247–256.
21. Y.-K. Lau, G. S. Lü, *Sums of Fourier coefficients of cusp forms.* `http://hkumath.hku.hk/~imr/IMR Preprint Series/2010/IMR 2010-9.pdf`, 28p.
22. О. М. Фоменко, *Теоремы с средних значениях для автоморфных L-функций.* — Алгебра и анализ **19** (2007), No. 5, 243–261.

Fomenko O. M. On summatory functions for automorphic L-functions.

Let $\lambda_f(n)$ denote the nth normalized Fourier coefficient of a primitive holomorphic cusp form f for the full modular group. Let $\Delta(x, f \otimes f)$ be the error term in the asymptotic formula of Rankin and Selberg for

$$\sum_{n \le x} \lambda_f(n)^2.$$

It is proved that $\Delta(x, f \otimes f) = \Omega(x^{3/8})$ and

$$\sum_{n \le x} \lambda_f(n^2) = \Omega(x^{1/3}).$$

Other summatory functions associated with automorphic L-functions are also studied.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `fomenko@pdmi.ras.ru`

Поступило 18 апреля 20011 г.