Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 392, 2011 г.

О. М. Фоменко

О РАСПРЕДЕЛЕНИИ ДРОБНЫХ ЧАСТЕЙ МНОГОЧЛЕНОВ

Изучаются задачи типа “количество целых точек под параболой”.

§1

Пусть $\psi(x) := x - [x] - \frac{1}{2}$, $P_2(x) := \frac{1}{\alpha}x^2 + \beta x + \gamma$ – многочлен с вещественными коэффициентами, причем $\alpha > 0$ – большое число. Рассмотрим сумму

$$\sum_{0<n\le N} \psi\big(P_2(n)\big),$$

где n, N – целые числа. Подобные суммы изучал еще И. М. Виноградов в 1917 году (см. [1, с. 44–45]). Пусть $\{x\}$ означает дробную часть числа x, т.е. разность $x - [x]$. И. М. Виноградов доказал:

$$\sum_{0<n\le N} \left\{\frac{m+n^2}{a}\right\} = \frac{N}{2} + O\Big(a^{2/3}\sqrt{r\log}\Big), \tag{1.1}$$

где m, $N > 0$, $a > 0$ – целые числа, $N \le a$,

$$r = \sum_{\delta\mid a} d(a/\delta)/\sqrt{\delta},$$

$d(\cdot)$ – классическая функция делителей. В случае $N = a$ соотношение (1.1) усиливается [1, с. 45] до

$$\sum_{0<n\le N} \left\{\frac{m+n^2}{a}\right\} = \frac{a}{2} + O\Big(r\sqrt{a}\ \log a\Big), \tag{1.2}$$

Остаточный член в (1.2) уже не может быть существенно улучшен, поскольку И. М. Виноградов [1, с. 106] (см. также [2]) доказал следующий результат:

Ключевые слова: дробные части, целые точки, метод Вейля.
Работа частично поддержана РФФИ (грант 08-01-00233).

пусть простое $p \equiv 3 \pmod 4$ и $h(-p)$ – число классов мнимого квадратичного поля дискриминанта $-p$, тогда

$$\sum_{0<n\le p-1} \left\{\frac{n^2}{p}\right\} = \frac{p-1}{2} - h(-p).$$

Из расширенной гипотезы Римана следует неравенство

$$h(-p) \ll \sqrt{p}\ \log\log p;$$

без всяких гипотез справедлива оценка

$$h(-p) = \Omega\big(\sqrt{p}\ \log\log p\big).$$

Общая теорема И. М. Виноградова дает очень небольшое улучшение остатка в (1.1), зато в случае любого a. Действительно, пусть в интервале $q \le x \le q_1$ вещественнозначная функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема и $|f''(x)| \asymp A^{-1}$. Тогда [3] (см. также [4, с. 204–205])

$$\sum_{q<x\le q_1} \big\{f(x)\big\} = \frac{q_1-q}{2} + O(R),$$

$$R = (q_1-q)A^{-1/3} + A^{2/3}.$$

Отметим, что с помощью известного результата ван дер Корпута [5, Theorem 5.9] слагаемое $A^{2/3}$ может быть заменено на $A^{1/2}$, что приводит к более существенному улучшению остатка в (1.1).

Лишь в 1975 году В. Н. Попов [6] получил почти окончательный результат:

$$\sum_{0<n\le N} \psi\left(\frac{n^2}{a}\right) \ll a^{\frac{1}{2}+\frac{c}{\log\log a}}, \tag{1.3}$$

где $a > 0$ – большое число, не обязательно целое; $N \ll a$; $c = 3\cdot 4^{-1}$ $\times (1+\varepsilon)\log 2$; здесь и ниже $\varepsilon > 0$ любое, но фиксированное число.

Цель настоящей работы – обобщить оценку (1.3), используя метод Вейля (см. [5, 7]). Этому посвящен §2. В §3 мы доказываем аналогичный результат для кубического многочлена.

Некоторым приложениям посвящен §4. Отметим одно из них: при $\alpha \asymp N$ и $0 < \nu < 1$ справедлива асимптотика

$$\sum_{\substack{0<n\le N\\ \{P_2(n)\}<\nu}} \big\{P_2(n)\big\} = \frac{\nu^2 N}{2} + O_\varepsilon\Big(N^{1/2+\varepsilon}\Big).$$

§2

Пусть по-прежнему $P_2(x) = \frac{1}{\alpha}x^2 + \beta x + \gamma$ – многочлен с вещественными коэффициентами, причем $\alpha > 0$ – большое число. Ниже полагаем $\log\alpha \asymp \log N$; $\log_2 z := \log\log z$.

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$\sum_{0<n\le N} \psi\big(P_2(n)\big) \ll \left(\frac{N}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}\right) e^{c_1 \log N/\log_2 N},$$

где $c_1 > 0$ – некоторая константа.

Доказательство. Из результатов работы [8] следует существование коэффициентов $\gamma(j)$ таких, что

$$\psi(w) \ll J^{-1} + \sum_{1\le|j|\le J} \gamma(j)\, e(jw)$$

и $\gamma(j) \ll |j^{-1}|$. Поэтому имеем

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{I}} &:= \sum_{0<n\le N} \psi\big(P_2(n)\big) \ll NJ^{-1} + \sum_{1\le j\le J} j^{-1}\left|\sum_{0<n\le N} e\big(jP_2(n)\big)\right| \\ &= NJ^{-1} + S_{\mathrm{II}}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{II}} &:= \sum_{1\le j\le J} j^{-1}|S_j|, \\ S_j &:= \sum_{0<n\le N} e\big(jP_2(n)\big). \end{aligned}$$

Ниже положим $J = [\alpha^{1/2}]$.

По неравенству Коши,

$$S_{\mathrm{II}} \le \left(\sum_{j\le J} j^{-1}\right)^{1/2} \left(\sum_{j\le J} j^{-1}|S_j|^2\right)^{1/2}.$$

Положим

$$S_{\mathrm{III}} := \sum_{j\le J} j^{-1}|S_j|^2.$$

По методу Вейля (см. [7, с. 40, (4)]),

$$S_{\mathrm{III}} \ll \sum_{1\le s\le J} j^{-1}N + \sum_{\substack{1\le j\le J\\ 1\le h\le 2N}} j^{-1}\min\left(N, \frac{1}{\|jh\alpha^{-1}\|}\right),$$

где $\|z\|$ обозначает расстояние от z до ближайшего целого числа. Обозначив $s := jh$, имеем

$$S_{\mathrm{IV}} := \sum_{\substack{1\le j\le J\\ 1\le h\le 2N}} j^{-1}\min\left(N, \frac{1}{\|jh\alpha^{-1}\|}\right)$$

$$\le \sum_{1\le s\le J\cdot 2N} \min\left(N, \frac{1}{\|s\alpha^{-1}\|}\right)\cdot \sum_{j|s} j^{-1}.$$

Поскольку $s\cdot j^{-1} = h \le 2N$, имеем

$$\sum_{j|s} j^{-1} \le s^{-1}(2N)\sum_{j|s} 1 = s^{-1}(2N)d(s). \tag{2.1}$$

Справедливо следующее утверждение [9]:
для каждого $\varepsilon > 0$ и $n > n_0(\varepsilon)$

$$d(n) < \exp\left((1+\varepsilon)\log 2\cdot \frac{\log n}{\log_2 n}\right).$$

Обозначим правую часть этого неравенства через $f(n)$, причем положим $f(1) = f(2) = 1$. Мы видим, что $f(n)$ – возрастающая функция

от n. Используя (2.1), имеемм

$$\begin{aligned}
S_{\mathrm{IV}} &\ll \sum_{1\le s\le N} f(s)\min\left(N, 1/\|s\alpha^{-1}\|\right)\\
&+ \sum_{N+1\le s\le 2N} f(s)(2N)s^{-1}\min\left(N, 1/\|s\alpha^{-1}\|\right)\\
&+ \sum_{2N+1\le s\le 3N} f(s)(2N)s^{-1}\min\left(N, 1/\|s\alpha^{-1}\|\right)+\cdots\\
&+ \sum_{(2J-1)N+1\le s\le 2JN} f(s)(2N)s^{-1}\min\left(N, 1/\|s\alpha^{-1}\|\right)\\
&\ll f(N)\sum_{1\le s\le N}\min\left(N, 1/\|s\alpha^{-1}\|\right)\\
&+ f(2N)\sum_{N+1\le s\le 2N}\min\left(N, 1/\|s\alpha^{-1}\|\right)\\
&+ \frac{f(3N)}{2}\sum_{2N+1\le s\le 3N}\min\left(N, 1/\|s\alpha^{-1}\|\right)+\cdots\\
&+ \frac{f(2JN)}{(2J-1)}\sum_{(2J-1)N+1\le s\le 2JN}\min\left(N, 1/\|s\alpha^{-1}\|\right).
\end{aligned}$$

Поскольку

$$\left|\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{q}\right|\le\frac{1}{q^2},$$

где $q=[\alpha]$, имеем в силу [7, с. 41, (9)]

$$\sum_{K+1\le s\le K+N}\min\left(N, 1/\|s\alpha^{-1}\|\right)\ll\frac{N^2}{q}+N\log q+q\log q$$

и, следовательно,

$$S_{\mathrm{IV}}\ll f(2JN)\left(\frac{N^2}{q}+N\log q+q\log q\right)\log J.$$

Поэтому

$$S_{\mathrm{III}} \ll N\log J + f(2JN)\left(\frac{N^2}{q} + N\log q + q\log q\right)J =: U,$$
$$S_{\mathrm{II}} \ll \big(\log J\big)^{1/2}\cdot U^{1/2},$$
$$S_{\mathrm{I}} \ll NJ^{-1} + \big(\log J\big)^{1/2}\cdot U^{1/2},$$

Теорема 1 доказана. □

§3

Пусть $P_3(x) = \frac{1}{\alpha}X^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ – многочлен с вещественными коэффициентами, причем $\alpha > 0$ – большое число. Сохраним обозначения и ограничения из §2.

Теорема 2. *Справедлива оценка*

$$\sum_{0<n\le N}\psi(P_3(n)) \underset{\varepsilon}{\ll} N^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{N} + \frac{\alpha}{N^3}\right)^{1/4}$$

Доказательство. Действуем так же, как в теореме 1. Имеем

$$S_{\mathrm{I}} := \sum_{0<n\le N}\psi\big(P_3(n)\big) \ll NJ^{-1} + \sum_{1\le j\le J} j^{-1}\left|\sum_{0<n\le N} e\big(jP_3(n)\big)\right|$$
$$= NJ^{-1} + S_{\mathrm{II}},$$

где

$$S_{\mathrm{II}} := \sum_{1\le j\le J} j^{-1}|S_j|,$$
$$S_j := \sum_{0<n\le N} e\big(jP_3(n)\big).$$

Ниже положим $J = [\alpha^{1/4}]$. Используем неравенство

$$\left(\sum_{x=1}^{N} u_x v_x\right)^k \le \left(\sum_{x=1}^{N} u_x\right)^{k-1}\left(\sum_{x=1}^{N} u_x v_x^k\right),$$

справедливое при $u_x \ge 0$, $v_x \ge 0$ и произвольном натуральном k. Имеем

$$S_{\mathrm{II}} \le \left(\sum_{j\le J} j^{-1}\right)^{3/4}\left(\sum_{j\le J} j^{-1}|S_j|^4\right)^{1/4}.$$

Положим

$$S_{\mathrm{III}} := \sum_{j\le J} j^{-1}|S_j|^4.$$

По методу Вейля (см. [7, с. 42]),

$$S_{\mathrm{III}} \underset{\varepsilon}{\ll} \sum_{1\le j\le J} j^{-1}N^3 + N^{1+\varepsilon} \sum_{\substack{1\le j\le J\\ 1\le h\le 6N^2}} j^{-1}\min\left(N, \frac{1}{\|jh\alpha^{-1}\|}\right).$$

Введем обозначение $s := jh$. Имеем

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{IV}} &:= \sum_{\substack{1\le j\le J\\ 1\le h\le 6N^2}} j^{-1}\min\left(N, \frac{1}{\|jh\alpha^{-1}\|}\right)\\ &\le \sum_{1\le s\le J\cdot 6N^2} \min\left(N, \frac{1}{\|s\alpha^{-1}\|}\right)\cdot \sum_{J|s} j^{-1}. \end{aligned}$$

Поскольку $s\cdot j^{-1} = h \le 6N^2$, имеем

$$\sum_{j|s} j^{-1} \le s^{-1}(6N^2)\, d(s).$$

Следовательно,

$$S_{\mathrm{IV}} \ll S_{\mathrm{V}} + S_{\mathrm{VI}},$$

где

$$\begin{aligned} S_{\mathrm{V}} &:= f(6N^2) \sum_{1\le s\le 6N^2} \min\left(N, 1/\|s\alpha^{-1}\|\right),\\ S_{\mathrm{VI}} &:= f(J\cdot 6N^2) \sum_{6N^2+1\le s\le J\cdot 6N^2} (6N^2)s^{-1}\min\left(N, 1/\|s\alpha^{-1}\|\right). \end{aligned}$$

В силу [7, с. 41, (9)] и с учетом $q = [\alpha]$, имеем

$$S_{\mathrm{V}} \ll f(J\cdot 6N^2)\left(\frac{N^3}{q} + N^2\log q + q\log\right). \tag{3.1}$$

Сумму

$$\sum_{6N^2+1\le s\le J\cdot 6N^2}$$

разбиваем на подсуммы:

$$\sum_{6N^2+1\le s\le 2\cdot 6N^2} + \sum_{2\cdot 6N^2+1\le s\le 3\cdot 6N^2} + \cdots + \sum_{(J-1)\cdot 6N^2+1\le s\le J\cdot 6N^2}.$$

Проводя те же вычисления, что и в §2, с применением оценок типа (3.1), имеем

$$S_{\mathrm{VI}} \ll f(J\cdot 6N^2)\cdot \log J\cdot \left(\frac{N^3}{q}+N^2\log q+q\log q\right).$$

Собирая полученные оценки, имеем

$$S_{\mathrm{I}} \underset{\varepsilon}{\ll} N^{1+\varepsilon}\left(\frac{1}{q}+\frac{1}{N}+\frac{q}{N^3}\right)^{1/4}.$$

Теорема доказана. □

Замечание 1. i) Мы предполагаем, что

$$\sum_{0<n\le N}\psi(P_3(n)) \ll q^{2/3+\varepsilon} \tag{3.2}$$

при $N\le q$. Из теоремы 2 следует, что неравенства (3.2) справедливо при $N\le q^{8/9}$.

ii) Отметим, что в работе [10] вычисляется сумма

$$\sum_{x=1}^{n-1}\psi\left(\frac{ax^k}{n}\right);$$

здесь a, k, n – целые положительные числа и $(a,n)=1$. В частности, из этого вычисления следуют оценки

$$\sum_{x=1}^{n-1}\psi\left(\frac{x^3}{n}\right) \ll n^{2/3+\varepsilon}$$

и

$$\sum_{x=1}^{n-1}\psi\left(\frac{x^3}{n}\right) = \Omega\big(n^{2/3}\big).$$

§4

Пусть, как и выше, $P_2(x)=\frac{1}{\alpha}x^2+\beta x+\gamma$ – многочлен с вещественными коэффициентами, причем $\alpha>0$ – большое число; целое $N\ge\alpha$. Расположим дробные части $\{P_2(x)\}$, $x=1,2,\dots,N$, в порядке их возрастания:

$$\beta_0\le\beta_1\le\beta_2\le\cdots\le\beta_{N-1}.$$

Тогда из общего результата И. М. Виноградова [1, с. 105–106, Теорема] следует, что при любом целом положительном $N_1 \le N$ справедливо соотношение

$$\sum_{i=0}^{N_1-1} \beta_i = \frac{N_1^2}{2N} + RN_1 + O\left(\frac{N}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{N}{\alpha}\right)^{1/2}\right), \tag{4.1}$$

причем величина $R \ll \alpha^{-1/3}$ и от N_1 не зависит.

При $N_1 = N$ из (4.1) и теоремы 1 вытекает

$$RN + O\left(\frac{N}{\sqrt{\alpha}}\left(\frac{N}{\alpha}\right)^{1/2}\right) \ll \frac{N}{\sqrt{\alpha}}\, e^{c_1 \log N/\log_2 N};$$

предполагая $\alpha \asymp N$, имеем

$$RN + O\left(\frac{N}{\sqrt{\alpha}}\right) \ll \frac{N}{\sqrt{\alpha}}\, e^{c_1 \log \alpha/\log_2 \alpha}.$$

Следовательно,

$$R \ll \alpha^{-1/2}\, e^{c_1 \log \alpha/\log_2 \alpha}.$$

В результате, доказана

Теорема 3. *Пусть $c_2 N \le \alpha \le N$, где c_2 – любое постоянное число с условием $0 < c_2 < 1$. Тогда*

$$\sum_{i=0}^{N_1-1} \beta_i = \frac{N_1^2}{2N} + RN_1 + O(\sqrt{\alpha}), \tag{4.2}$$

причем

$$R \ll \alpha^{-1/2}\, e^{c_1 \log \alpha/\log_2 \alpha};$$

O-константа от N_1 не зависит.

Тем самым, в случае функции $f(x) = P_2(x)$ улучшен общий результат И. М. Виноградова [1, с. 106, (7)]. Как отметил И. М. Виноградов, остаточный член $O(\sqrt{\alpha})$ является окончательным. Само соотношение (4.2) почти неулучшаемо в силу следующего примера И. М. Виноградова [1, с. 106]:

для $P_2(x) = x^2/p$, p – простое число, $N = p$, имеем

$$\sum_{i=0}^{N_1-1} \beta_i = \frac{N_1^2}{2p} + RN_1 + O(\sqrt{p}),$$

где

$$R = 0, \quad \text{если} \quad p \equiv 1 \pmod 4;$$
$$R = -p^{-1}\Big(h(-p) + \frac{1}{2}\Big), \quad \text{если} \quad p \equiv 3 \pmod 4.$$

Получим теперь одно следствие теоремы 3. Результат И. М. Виноградова [1, с. 115, Теорема 1] в применении к нашему многочлену $P_2(x) = \frac{1}{\alpha}x^2 + \beta x + \gamma$ выглядит так: при любом $0 < \nu < 1$ число

$$T_\nu := \sum_{\substack{1\le n\le N\\ \{P_2(n)\}<\nu}} 1$$

может быть представлено в виде

$$T_\nu = \nu N + O_\varepsilon\Big(N^\varepsilon\Big(\frac{N}{\sqrt{\alpha}} + \sqrt{\alpha}\Big)\Big),$$

причем O-константа от ν не зависит. Беря в теореме 3 в качестве N_1 величину T_ν, получаем

Следствие 1. *Пусть $c_2 N \le \alpha \le N$, тогда при любом $0 < \nu < 1$ имеем*

$$\sum_{\substack{1\le n\le N\\ \{P_2(n)\}<\nu}} \{P_2(n)\} = \frac{\nu^2 N}{2} + O_\varepsilon\Big(N^{1/2+\varepsilon}\Big),$$

причем O-константа от ν не зависит.

Литература

1. И. М. Виноградов, *Избранные труды*. М., 1952.
2. T. Honda, *A few remarks on class numbers of imaginary quadratic number fields*. — Osaka J. Math. **12** (1975), 19–21.
3. И. М. Виноградов, *Особые варианты метода тригонометрических сумм*. М., 1976.
4. А. О. Гельфонд, Ю. В. Линник, *Элементарные методы в аналитической теории чисел*. М., 1962.
5. E. C. Titchmarsh, *The theory of the Riemann zeta-function*. 2nd edn, revised by D. R. Heath-Brown, New York, 1986.
6. В. Н. Попов, *О числе целых точек под параболой*. — Мат. заметки **18** (1975), 699–704.
7. H. L. Montgomery, *Ten lectures on the interface between analytic number theory and harmonic analysis*. Providence, Rhode Island, 1994.
8. J. D. Vaaler, *Some extremal problems in Fourier analysis*. — Bull. Amer. Math. Soc. (2) **12** (1985), 183–216.

9. К. Прахар, *Распределение простых чисел*. М., 1967.
10. I. Miyawaki, *On the number of the lattice points in the area* $0 < x < n$, $0 < y \leq a^k/n$. — Osaka J. Math. **12** (1975), 647–671.

Fomenko O. M. On the distribution of fractional parts of polynomials.

In the paper upper bounds for sums of the form

$$\sum_{0<n\leq N} \psi\big(f(n)\big),$$

where $f(x)$ is a polynomial and $\psi(x) = x - [x] - 1/2$, are obtained.

The cases

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}x^2 + \beta x + \gamma$$

and

$$f(x) = \frac{1}{\alpha}x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

are considered, where α is a large positive number.

Weyl's method and V. N. Popov's reasoning (Mat. Zametki, **18** (1975), 699–704) are used.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: fomenko@pdmi.ras.ru

Поступило 18 апреля 2011 г.