Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 392, 2011 г.

П. А. Пугач, В. А. Шлык

УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА ДЛЯ ОБОБЩЕННОГО МОДУЛЯ СЕМЕЙСТВА ПОВЕРХНОСТЕЙ

§1. Введение

Данная работа продолжает исследование в [1] свойств обобщенного модуля семейства поверхностей, отделяющих пластины конденсатора в R^n, $n \geq 2$, и не пересекающих предписанное множество E.

А именно, в п. 2 вводится понятие устранимого множества E для указанного модуля (определение 1) и доказывается (теорема 1), что если E – устранимое множество, то E имеет нулевую n-мерную меру Лебега и удовлетворяет условию малости обхвата относительно любого направлении в R^n (определение 2). Наоборот, если матричная функция $w^{1/p}\sqrt{\mathcal{A}(x)}$ – непрерывна на открытом множестве G (см. определение 3), обобщенная емкость аппроксимируема изнутри на G (определение 4) и компакт E, $\mathcal{L}_n(E) = 0$, удовлетворяет условию малости обхвата относительно $\mathcal{H}_{n-1}$-почти всех направлений в R^n, то E – устранимое множество (теорема 2). Для обычного весового модуля утверждение теоремы 1 было получено в [2]. В п. 3 даются применения теорем 1 и 2 для устранимости множества конечной $\mathcal{H}_1$-меры. Утверждение теоремы 4 близко по форме критерию устранимых множеств на гиперплоскости для модуля семейства кривых (NED-множеств) в [3, 4].

Тем самым в данной работе попутно, в силу предложения 1, установлены необходимые и достаточные условия устранимости множеств для обобщенной емкости $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$. Если $w \equiv 1$ в R^n, $\mathcal{A} = I$, где I – единичная матрица, то, как показал Л. Хедберг в [5], устранимые множества для этой емкости являются устранимыми множествами в классе гармонических функций, не имеющих флюксий на G и таких, что их частные производные суммируемы с p-й степенью на G.

Ключевые слова: обобщенная емкость конденсатора, обобщенный модуль семейства поверхностей, мера семейства поверхностей, устранимое множество, функция ограниченной вариации.

Работа выполнена при поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ-2810-2008.1) и РФФИ (грант 08-01-00028), ДВО РАН (грант 09-III-A-01-0007).

Для произвольного веса Макенхаупта аналогичные результаты были получены в [6].

Ниже G – открытое ограниченное множество в R^n, $\mathcal{L}_k$ и $\mathcal{H}_k$ – соответственно k-мерные меры Лебега и Хаусдорфа, A_p – класс локально интегрируемых функций $w : R^n \to (0, +\infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта [7]

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w\,dx \Big(\frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q}\,dx \Big)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем координатным кубам $Q \subset R^n$, $|Q| = \mathcal{L}_n(Q)$; $p, q \in (1, \infty)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Отметим, что функцию $w \in A_p$, переопределенную на множестве $\mathcal{L}_n$-меры 0, можно считать борелевской на R^n. Пусть D – открытое множество из R^n. Обозначим через $L^{p,w}(D)$ класс функций $f : D \to [-\infty, +\infty]$, для которых $\|f\|_{p,w} = \big(\int\limits_D |f|^p\,w\,dx\big)^{1/p} < \infty$, $L^{p,w}(D, R^n) = \big\{(f_1, \ldots, f_n),\ f_i \in L^{p,w}(D),\ i = 1, \ldots, n\big\}$. Через $L^{p,w}_+(D)$ обозначим класс борелевских функций $f : D \to [0, +\infty]$, $f \in L^{p,w}(D)$. Если $w \equiv 1$ в R^n, то положим $L^{p,w}_+(D) = L^p_+(D)$.

Для весовой функции $w \in A_p$ обозначим через $L^1_{p,w}(G)$ класс функций $u : G \to (-\infty, +\infty)$, локально интегрируемых в G, имеющих на G обобщенные частные производные и таких, что $\int\limits_G |\nabla u|^p\,w\,dx < \infty$.

Пусть $B(x, r)$ – открытый шар с центром в точке $x \in R^n$ радиуса $r > 0$. Определим максимальную функцию

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

для локально интегрируемой функции f в R^n, где

$$|B(x,r)| = \mathcal{L}_n\big(B(x,r)\big).$$

Известно (см. [8, теорема 8.8.2]), что

$$\|Mf\|_{p,w} \le \text{const}\ \|f\|_{p,w}.$$

Для множеств K и $F \subset R^n$ через $d(K, F)$ обозначим евклидово расстояние между K и F. Запись $\overline{F}$, ∂F, $\operatorname{int} F$ обозначает соответственно замыкание, границу, внутренность множества F.

Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x)$ – положительно определенная симметрическая $n \times n$ матрица с измеримыми по Борелю компонентами $a_{ij}(x)$ такими, что

$$c_0^{-2} w(x)^{2/p} |\xi|^2 \le \sum_{i,j} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \le c_0^2 w^{2/p} |\xi|^2 \tag{1}$$

для любого вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in R^n$ и $x \in G$, где $c_0 \ge 1$ есть постоянная, а $w \in A_p$. Для $x \in R^n \setminus G$ положим $\mathcal{A}(x)$ равной единичной матрице I, умноженной на $w(x)^{2/p}$. Если $\mathcal{B} = \mathcal{B}(x) = \{b_{ij}\}$ – обратная матрица для $\mathcal{A}$, то

$$c_0^{-2} w(x)^{-2/p} |\xi|^2 \le \sum_{i,j} b_{i,j}(x) \xi_i \xi_j \le c_0^2 w(x)^{-2/p} |\xi|^2. \tag{2}$$

Положим $\mathcal{A}[\xi] = (\sum\limits_{i,j} a_{i,j}(x) \xi_i \xi_j)^{1/2}$ для $\xi \in R^n$ и если $\xi = \xi(x)$ – векторнозначная измеримая по Борелю функция на G, то $\mathcal{A}_p(\xi) = (\int\limits_G \mathcal{A}[\xi]^p dx)^{1/p}$. Аналогично определим $\mathcal{B}[\xi]$, $\mathcal{B}_p(\xi)$.

Заметим, что $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ могут быть записаны в виде $\mathcal{A} = (\sqrt{\mathcal{A}})^2$, $\mathcal{B} = (\sqrt{\mathcal{B}})^2$ с положительно определенными симметрическими $n \times n$ матрицами $\sqrt{\mathcal{A}}$, $\sqrt{\mathcal{B}}$. Тогда

$$\mathcal{A}[\xi] = |\sqrt{\mathcal{A}}\ \xi|, \quad \mathcal{B}[\xi] = |\sqrt{\mathcal{B}} \xi|, \quad \mathcal{A}_p(\xi) = \left(\int\limits_G |\sqrt{\mathcal{A}} \xi|^p dx \right)^{1/p}$$

и

$$\mathcal{B}_p(\xi) = \left(\int\limits_G |\sqrt{\mathcal{B}} \xi|^p dx \right)^{1/p}.$$

Пусть F_0 и F_1 – непересекающиеся, непустые компакты такие, что $F_0 \cup F_1 \subset \overline{G}$, E – ограниченное замкнутое относительно $R^n \setminus (F_0 \cup F_1)$ множество, ни одна компонента связности которого не имеет предельных точек на $F_0 \cup F_1$. Тогда набор $(F_0, F_1, G/E)$ назовем конденсатором на G. Определим $(\mathcal{A}, p)$ – емкость конденсатора $(F_0, F_1, G/E)$ как величину

$$C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E) = \inf \mathcal{A}_p(\nabla u)^p,$$

где инфимум берется по всем функциям $u \in L^1_{p,w}(G) \cap C^\infty(G)$, $0 \le u \le 1$ на G, равным j в некоторой окрестности компакта F_j, $j = 0, 1$, $|\mathrm{grad} u| = 0$ в некоторой окрестности каждой компоненты

связности множества E. Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\mathrm{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$. Замыкание этого класса функций в норме $L^1_{p,w}(G)$ обозначим через $\mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(F_0, F_1, G/E)$.

Для $\mathcal{A} = w^{2/p}I$ емкость $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$ равна величине $C_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$, рассмотренной в [6, 9].

Компакт σ, расположенный в $R^n \setminus E$, назовем поверхностью, отделяющей F_0 от F_1 в R^n/E, если $R^n \setminus \sigma = A(\sigma) \cup B(\sigma)$, где $A(\sigma), B(\sigma)$ – непересекающиеся открытые множества и $F_0 \subset A(\sigma)$, $F_1 \subset B(\sigma)$. Семейство всех таких поверхностей обозначим через $\Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$. Если при этом σ является границей полиэдра, то семейство всех таких полиэдральных поверхностей обозначим через $\Sigma^0(F_0, F_1, R^n/E)$. Если $\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$, то $\sigma \cap G$ назовем поверхностью, отделяющей F_0 от F_1 на G/E. Семейство всех таких поверхностей обозначим через $\Sigma(F_0, F_1, G/E)$. Если $E = \varnothing$, то такое семейство будем обозначать через $\Sigma(F_0, F_1, G)$. Аналогично определим семейства полиэдральных поверхностей $\Sigma^0(F_0, F_1, G/E)$, $\Sigma^0(F_0, F_1, G)$.

Положим $\tilde{w} = w^{1-q}$, где $w \in A_p$. Определим $(q, \tilde{w})$-модуль семейства Σ борелевских множеств из G как величину

$$M_{q,\tilde{w}}(\Sigma) = \inf \int\limits_G \rho^q \ \tilde{w} \ dx,$$

где инфимум берется по всем борелевским функциям $\rho \in L^{q,\tilde{w}}_+(G)$ таким, что $\int\limits_\sigma \rho \, d\mathcal{H}_{n-1} \geq 1$ для всех $\sigma \in \Sigma$. Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\mathrm{Adm}_{q,\tilde{w}}(\Sigma)$. Если $\Sigma = \Sigma(F_0, F_1, G/E)$, то обозначим $M_{q,\tilde{w}}(\Sigma) = M_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$. Соответственно, для $\Sigma = \Sigma^0(F_0, F_1, G/E)$ положим $M_{q,\tilde{w}}(\Sigma) = M^0_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$. Семейство Σ', для которого $M_{q,\tilde{w}}(\Sigma') = 0$, назовем $(q, \tilde{w})$-исключительным. Если некоторое утверждение выполняется для всех множеств $\sigma \in \Sigma \setminus \Sigma'$, где Σ' – $(q, \tilde{w})$-исключительное семейство, то будем говорить, что данное утверждение выполняется на Σ $(q, \tilde{w})$-почти всюду ($(q, \tilde{w})$-п.в.).

Пусть $\mathcal{F}_0$ – некоторое семейство векторных борелевских зарядов $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$, с компонентами ν_i, $i = \overline{1, n}$, являющимися мерами (со знаками) на G. Положим $|\mathcal{F}_0| = \{|\nu| : \nu \in \mathcal{F}_0\}$, где $|\nu|$ – неотрицательная борелевская мера на G, представляющая собой полную вариацию заряда ν. Положим $M_{q,\tilde{w}}(|\mathcal{F}_0|) = \inf\{\int\limits_G \rho^q \ \tilde{w} \, dx : \rho \in L^{q,\tilde{w}}_+(G), \rho \wedge |\mathcal{F}_0|\}$. Запись $\rho \wedge |\mathcal{F}_0|$ означает, что $\int\limits_G \rho \ d|\nu| \geq 1$ для всех $\nu \in \mathcal{F}_0$. Если

$M_{q,\tilde{w}}(|\mathcal{F}_0|) = 0$, то назовем семейство $\mathcal{F}_0$ $(q, \tilde{w})$-исключительным множеством ($(q, \tilde{w})$-искл.). Если утверждение относительно семейства $\mathcal{F}$ векторных зарядов ν на G неверно только для $(q, \tilde{w})$-исключительного семейства $\mathcal{F}_0$, то будем говорить, что оно выполняется $(q, \tilde{w})$-почти всюду ($(q, \tilde{w})$-п.в.) для $\mathcal{F}$. Пусть $\mathcal{F}$ – некоторое семейство векторных зарядов на G, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ – борелевская вектор-функция из $L^{q,\tilde{w}}(G, R^n)$ и $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ – векторный борелевский заряд на G. Запись $\xi \wedge \nu$ означает, что $\int\limits_G \xi \, d\nu = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_G \xi_i \, d\nu_i \geq 1$. В дальнейшем при рассмотрении интегралов по векторному заряду будем заряд и подынтегральную функцию считать борелевскими. Запись $\xi \wedge \mathcal{F} - (q, \tilde{w})$-п.в. означает, что соотношение $\xi \wedge \nu$ выполняется для всех $\nu \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{F}_0$, где $\mathcal{F}_0 - (q, \tilde{w})$-искл. Положим $M_{\mathcal{B},q}(\mathcal{F}) = \inf\{\mathcal{B}_q(\xi)^q, \xi \wedge \mathcal{F} - (q, \tilde{w})\text{-п.в.}\}$, где инфимум равен ∞, если не существует подходящих $\xi \in L^{q,\tilde{w}}(G, R^n)$.

Обозначим через $BV(D)$ класс всех функций ограниченной вариации на открытом множестве $D \subset R^n$. По определению, для функции $u \in BV(D)$ ее градиент ∇u (в смысле теории обобщенных функций) является векторным борелевским зарядом на D. Этот заряд обозначим ∇u_D. Если χ_K – характеристическая функция множества $K \subset R^n$, $\chi_K \in BV(D)$, то этот заряд обозначим через $\nabla \chi_{K,D}$.

Интегралы для вектор-функций $g = (g_1, \ldots, g_n)$ по борелевскому множеству $B \subset D$ от зарядов $\nabla u_D, \nabla \chi_{K,D}$ будем записывать соответственно в виде $\int\limits_B g \, \nabla u_D$, $\int\limits_B g \, \nabla \chi_{K,D}$. Другими словами, $\nabla u_D, \nabla \chi_{K,D}$ в интегралах представляют собой элементы зарядов. Для функции $u \in L^1_{p,w}(G)$ заряд $\nabla u_G(B)$ можно записать в виде $\int\limits_B \nabla u \, dx$.

Пусть теперь $B(\sigma)$, $F_1 \subset B(\sigma)$, – открытое множество из определения $\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E)$. В дальнейшем для упрощения записи положим $\nabla \chi_{B(\sigma),G} = \nabla \chi_{B(\sigma)}$. По определению, векторный заряд $\nabla \chi_{B(\sigma)}$, $\chi_{B(\sigma)} \in BV(G)$, порожденный функцией $\chi_{B(\sigma)}$ в G, будет совпадать с векторным зарядом $\nabla \chi_{B(\sigma) \cap G,G}$. Аналогично, $|\nabla \chi_{B(\sigma)}| = |\nabla \chi_{B(\sigma) \cap G,G}|$ при рассмотрении этих мер в G.

Зададим следующие семейства зарядов:

$$\begin{aligned}
\nabla\mathcal{D}^* &= \nabla\mathcal{D}^*(G) = \nabla\mathcal{D}^*(F_0, F_1, G/E)\\
&= \{\nabla u : u \in \mathcal{D}^* = \mathcal{D}^*(F_0, F_1, G/E)\},\\
\nabla\Sigma(G) &= \nabla\Sigma(F_0, F_1, G/E) = \{\nabla\chi_{B(\sigma)} : \chi_{B(\sigma)} \in BV(G)\},\\
|\nabla\Sigma(G)| &= |\nabla\Sigma(F_0, F_1, G/E)| = \{|\nabla\chi_{B(\sigma)}| : \nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma(G)\},\\
\nabla\Sigma^0(G) &= \nabla\Sigma^0(F_0, F_1, G/E)\\
&= \{\nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma(G), \sigma \in \Sigma^0(F_0, F_1, R^n/E)\},\\
|\nabla\Sigma^0(G)| &= |\nabla\Sigma^0(F_0, F_1, G/E)| = \{|\nabla\chi_{B(\sigma)}| : \nabla\chi_{B(\sigma)} \in \nabla\Sigma^0(G)\}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Далее в приведенных выше определениях вместо G будем рассматривать также и другие ограниченные открытые множества в R^n.

Нам понадобятся следующие известные результаты.

Предложение 1 (см. [1, Теорема 1], [2]).

$$C^*{}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)^{-\,q/p} = M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*),$$

$$C_{p,w}(F_0, F_1, G/E)^{-\,q/p} = M_{q,w}(F_0, F_1, G/E).$$

Предложение 2 [1, Теорема 2]).

$$M_{\mathcal{B},q}(\nabla\Sigma(G)) = M_q(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(G)|) = M_{\mathcal{B},q}(\nabla\mathcal{D}^*).$$

Предложение 3 (см. [1, Предложение 20]).

$$\begin{aligned}
\lim_{j\to\infty} M_{\mathcal{B},q}(F_0^j, F_1^j, G_j/E_0^j) &= \lim_{j\to\infty} M_{\mathcal{B},q}(F_0^j, F_1^j, \widetilde{G}_j/E_0^j)\\
&= M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E_0) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E).
\end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0^j, F_1^j, G_j/E) = M_{\mathcal{B},q}\big(\nabla\Sigma(F_0^j, F_1^j, G_j/E_0^j)\big),$$

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E_0) = M_{\mathcal{B},q}\big(\nabla\Sigma(F_0, F_1, G/E_0)\big);$$

E_0 – объединение всех компонент связности множества E, имеющих общие точки с $\overline{G}$; G_j, $\widetilde{G}_j$ – открытые множества в R^n; $F_0^j \downarrow F_0$, $F_1^j \downarrow F_1$, $(\partial F_0^j \cup \partial F_1^j) \cap E = \varnothing$, $\partial E_0^j \cap E = \varnothing$, $F_0^j \cup F_1^j \cup E_0^j \downarrow F_0 \cup F_1 \cup E_0$, $F_0^j \cup F_1^j \cup E_0^j \subset G_j$, $\overline{G}_j \subset \widetilde{G}_j$, $F_0^j \cup F_1^j \cup E_0^j \subset \widetilde{G}_j$, $(\widetilde{G}_j \setminus G_j) \cap E = \varnothing$, $\partial G_j \cap (F_0 \cup F_1 \cup E) = \varnothing$, $\partial\widetilde{G}_j \cap (F_0 \cup F_1 \cup E) = \varnothing$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial G_j) < \infty$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial\widetilde{G}_j) < \infty$. Кроме того, если $\Sigma_j = \{\sigma \in \Sigma(F_0, F_1, R^n/E), d(\sigma, F_0 \cup$

$F_1 \cup E) > \frac{1}{j}\}$, где $j \in N$, то $\sigma \cap G_j \subset \sigma \cap \widetilde{G}_j \subset \sigma \cap G$, $d(\sigma \cap \widetilde{G}_j, \partial G) > 0$, $d(\sigma, F_0^j \cup F_1^j, \cup E_0^j,) > \frac{1}{2j}$ для всех $\sigma \in \Sigma_j$.

При условиях предложения 3 справедливо еще одно утверждение.

Предложение 4 (см. [1, теорема 4]).

$$\lim_{j\to\infty} M_{\mathcal{B},q}(F_0^j, F_1^j, G_j/E_0^j) = \lim_{j\to\infty} M^0_{\mathcal{B},q}(F_0^j, F_1^j, \widetilde{G}_j/E_0^j) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E).$$

§2. Устранимые множества для $M_{\mathcal{B},q}\big(\nabla\Sigma(G)\big)$

Определим величины ${C^*}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E)$, $C_{p,w}(F_0, F_1, G/E)$, $M_{\mathcal{B},q}\big(\nabla\Sigma(G)\big) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E)$, $M_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$ в случае, когда E является компактом в R^n. Пусть $\widetilde{F}_j$ – объединение компакта F_j с теми компонентами связности компакта E, которые имеют общие точки с $F_j, j = 0, 1$. $\widetilde{E} = E\backslash(\widetilde{F}_0 \cup \widetilde{F}_1)$. Если $\widetilde{F}_0 \cap \widetilde{F}_1 \neq \varnothing$, то положим ${C^*}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E) = C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) = \infty$, $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) = M_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = 0$. В противном случае положим ${C^*}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G/E) = {C^*}_{\mathcal{A},p}(\widetilde{F}_0 \cap \overline{G}, \widetilde{F}_1 \cap \overline{G}, G/\widetilde{E})$, $C_{p,w}(F_0, F_1, G/E) = C_{p,w}(\widetilde{F}_0 \cap \overline{G}, \widetilde{F}_1 \cap \overline{G}, G/\widetilde{E})$.

Аналогично определим $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E)$, $M_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$.

Определение 1. *Компакт $E \subset G$ назовем устранимым для $(q, \widetilde{w})$-модуля на G $\big($для $(\mathcal{B}, q)$-модуля на $G\big)$, если для любого конденсатора $(F_0, F_1, G_1/E)$, где G_1 – произвольное открытое множество из G, F_0, F_1 – непересекающиеся компакты из G, $\big(\partial G_1\backslash(F_0 \cup F_1)\big) \cap E = \varnothing$, справедливо равенство*

$$M_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G_1/E) = M_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G_1)\big(M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1)\big).$$

Пусть m-мерная клетка, $1 \leq m \leq n$, в дальнейшем обозначает множество в R^n, которое в подходящей декартовой системе координат $Ox_1, \ldots, x_n$ записывается в виде $\{x \in R^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, \ldots, m; x_{m+1} = \ldots = x_n = 0\}$.

Под m-мерным клеточным множеством будем понимать связное объединение конечного числа m-мерных клеток. Если $(n-1)$-мерное клеточное множество K'

1) расположено в гиперплоскости $x_1 = c$;

2) получено в результате объединения $(n-1)$-мерных клеток с ребрами, параллельными координатным осям $Ox_2, Ox_3, \ldots, Ox_n$;
3) записано в виде $\{x = (c, x') \in R^n : x' = (x_2, \ldots, x_n) \in T'\}$,

то множество $K = \{(x, x') : a_1 < x_1 < b_1, x' \in T'\}$ назовем координатным клеточным множеством с основаниями $\sigma_0 = \{(a, x') : x' \in T'\}$, $\sigma_1 = \{(b, x') : x' \in T'\}$, параллельными координатной гиперплоскости $x_1 = 0$.

Аналогично определим координатное клеточное множества с основаниями, параллельными другим координатным плоскостям.

Компакт E назовем $NH_{q,\widetilde{w}}$-множеством ($NH_{\mathcal{B},q}$-множеством) на G, если для фиксированной системы координат $Ox_1, \ldots, x_n$ в R^n и любого координатного клеточного множества с основаниями σ_0, σ_1, $\overline{\Pi} \subset G$, $\big(\partial\Pi \backslash (\sigma_0 \cup \sigma_1)\big) \cap E = \varnothing$, выполняется равенство

$$M_{q,\widetilde{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi/E) = M_{q,\widetilde{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi)\big(M_{\mathcal{B},q}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi/E) = M_{\mathcal{B},q}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi)\big).$$

Лемма 1. *Если E – $NH_{\mathcal{B},q}$-множество на G, то E – нульмерное множество.*

Доказательство. Предположим, что E не является нульмерным множеством и, значит, E имеет невырожденную компоненту связности γ. Тогда ортогональная проекция $p_1(\gamma)$ на одну из координатных осей, например, Ox_1 есть невырожденный отрезок $[a, b]$. Пусть $c = (c_1, 0, \ldots, c_n)$ – середина этого отрезка и $H(c_1) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n : x_1 = c_1\}$, $E(c_1) = H(c_1) \cap E$, $\delta_1 = \min\{d(E, \partial G), \frac{|b-a|}{2}\}$. Зададим покрытие компакта $E(c_1)$ открытыми координатными кубами с центрами в точках $E(c_1)$ и со сторонами, длины которых меньше $\frac{\delta_1}{4\sqrt{n}}$. Как обычно, из этого покрытия извлечем конечное покрытие $Q_1, \ldots, Q_m$. По построению, $\bigcup\limits_{j=1}^{m} \overline{Q}_j \subset G$. Ясно, что $\bigcup\limits_{j=1}^{m} Q_j$ можно представить в виде объединения конечного числа областей $D_1, \ldots, D_s$ без общих внутренних точек. Каждая область D_i, $i = 1, \ldots, s$, пересекается с гиперплоскостью $H(c_1)$ по $(n-1)$-мерному клеточному множеству D_i', составленному из $(n-1)$-мерных координатных клеток. Граница $\partial D_i'$ в топологии гиперплоскости $H(c_1)$ находится на положительном расстоянии β_i от $E \cup \partial G$. Положим $\beta = \min \beta_i$, $i = 1, \ldots, s$. Пусть b' – точка на γ, для которой ортогональная проекция $p_1(b')$ на ось Ox_1 совпадает с точкой b,

аналогично выберем точку a', $a' \in \gamma$, $p_1(a') = a$. Поскольку $H(c_1)$ разделяет точки a', b', то найдется континуум $\gamma_1 \subset \gamma$, соединяющий $H(c_1)$ с точкой b' и расположенный в $H^+(c_1) = \{(x_1, \dots, x_n) \in R^n : x_1 \geq c_1\}$. Аналогично, области $D_1, \dots, D_s$ отделяют множество $E(c_1)$ от точки b. Следовательно, найдется континуум $\gamma_2 \subset \gamma_1$, который будет расположен, например, в $\overline{D}_1$ и будет соединять $E(c_1) \cap D_1$ с $\gamma_1 \cap \partial D_1$. По построению, $d(\gamma \cap \partial D_1, \partial D_1') \geq \beta$. Представим D_1' в виде $\{(c_1, x') : x' \in T_1\}$. Тогда $\Pi = \{x \in R^n : c_1 < x_1 < c_1 + \frac{\beta}{2}, x' \in T_1\}$ – координатное клеточное множество с основаниями $\sigma_0 = \{(c_1, x') : x' \in T_1\}$, $\sigma_1 = \{(c_1 + \frac{\beta}{2}, x') : x' \in T_1\}$, параллельными координатной гиперплоскости $x_1 = 0$. По построению, $\overline{\Pi} \subset G$, $\big(\partial\Pi \setminus (\sigma_0 \cup \sigma_1)\big) \cap E = \varnothing$ и континуум γ соединяет σ_0 и σ_1. Поэтому $M_{\mathcal{B},q}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi/E) = 0$. В силу задания компакта E $M_{\mathcal{B},q}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi/E) = M_{\mathcal{B},q}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi)$. С другой стороны, в силу предложения 1, $M_{\mathcal{B},q}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi) > 0$. Полученное противоречие доказывает лемму 1. □

Лемма 2.

$$\begin{aligned} c_0^{-q} M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) &\leq M_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E) \\ &\leq c_0^q M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E), \end{aligned} \tag{4}$$

где c_0 – постоянная из (1) *и E – множество из определения* $(F_0, F_1, G/E)$ *в п.* 1.

Доказательство. Если $M_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) = \infty$, то неравенства (4) очевидны. Пусть теперь $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) < \infty$. Ввиду предложения 2, $M_q(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(F_0, F_1, G/E)|) < \infty$ и, применяя предложение 3, найдем функцию $\rho \wedge |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(F_0^j, F_1^j, G_j/E_0^j)|$ такую, что $\int\limits_{G_j} \rho_j{}^q \, dx = M_q(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(G_j)| + o(1)$. Тогда $\rho_j \wedge |\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma^0(F_0^j, F_1^j, \widetilde{G}_j/E_0^j)|$. В силу монотонности величин $M_{\mathcal{B},q}\big(\nabla\Sigma(G)\big)$, $M_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$ и того факта, что $M_{q,\widetilde{w}}(F_0, F_1, G/E)$ – частный случай модуля $M_{\mathcal{B},q}\big(\nabla\Sigma(G)\big)$, можно последовательность конденсаторов предложении 3 считать также годной, если в этом предложении вместо $M_{\mathcal{B},q}$-модуля семейств $\nabla\Sigma(F_0, F_1, G/E_0)$ рассмотреть $M_{q,\widetilde{w}}$-модуль. При этих предположениях применение неравенства (1) и структурной теоремы для множеств с конечным периметром (см. [1, утверждение 1]) приводит к оценкам

$$1 \leq \int\limits_{G_j} \rho_j |\sqrt{\mathcal{A}}\, \nabla\chi_{B(\sigma),G_j}| = \int\limits_{\sigma \cap G_j} \rho_j |\sqrt{\mathcal{A}}\, \vec{n}| d\mathcal{H}_{n-1} \leq c_0 \int\limits_{\sigma} \rho_j w(x)^{1/p} \, d\mathcal{H}_{n-1}$$

для всех $\sigma \in \Sigma^0(F_0^j, F_1^j, \widetilde{G}_j/E_0^j)$, где $\vec{n}$ – единичный вектор нормали поверхности σ. Здесь учитывается, что приведенная граница множества $B(\sigma)\cap G_j$ (см. [1, определение 3]) отличается от $\sigma\cap G_j$ на множество нулевой $\mathcal{H}_{n-1}$-меры. Следовательно, $\rho_j w^{1/p} c_0 \in \mathrm{Adm}^0_{q,\widetilde{w}}(F_0^j, F_1^j, \widetilde{G}_j/E_0^j)$ и $M^0_{q,w}(F_0^j, F_1^j, \widetilde{G}_j/E_0^j) \le \int\limits_{G_j} \rho_j^q w^{q/p} c_0^q \widetilde{w}\, dx = c_0 \int\limits_{G_j} \rho_j^q\, dx$. Отсюда, переходя к пределу при $j \to \infty$, в силу предложения 4, получим правое неравенство в (4), из которого, в частности, следует, что $M_{q,w}(F_0, F_1, G/E) < \infty$ (см. также лемму 4 и [2, теорема 2]). Повторное проведение рассуждений с заменой $\rho_j \wedge |\sqrt{A}\ \nabla\Sigma(F_0^j, F_1^j,\ G_j/E_0^j)|$ на

$$\rho_j \in \mathrm{Adm}_{q,\widetilde{w}}(F_0^j, F_1^j, G_j/E_0^j)$$

дает левую оценку в (4) □

Лемма 3. *Если E – устранимое множество для $(\mathcal{B}, q)$-модуля на G, то $\mathcal{L}_n(E) = 0$.*

Доказательство. Пусть E – устранимое множество для $(\mathcal{B}, q)$-модуля в G и $\mathcal{L}_n(E) > 0$, $\Pi = \{x \in R^n : a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$ – произвольный координатный прямоугольник, $\mathcal{L}_n(\Pi \cap E) > 0$, $\overline{\Pi} \subset G$, σ_{01}, σ_{11} – противоположные грани Π, параллельные гиперплоскости $x_1 = 0$, $\Pi' = \{x' = (x_2, \dots, x_n) : a_i < x_i < b_i, i = 2, \dots, n\}$. Выберем натуральное число k_0 таким, что для $k \ge k_0$ прямоугольник $\Pi(k) = \{x \in R^n : a_i - \frac{1}{k} < x_i < b_i + \frac{1}{k}, i = 1, \dots, n\}$ вместе со своей границей $\partial\Pi(k)$ содержится в G. Положим $\widetilde{\Pi}(k) = \{x \in R^n : a_1 < x_1 < b_1, a_i - \frac{1}{k} < x_i < b_i + \frac{1}{k}, i = 2, \dots, n\}$; $\widetilde{\sigma}_{01}^{(k)}$, $\widetilde{\sigma}_{11}^{(k)}$ – грани $\widetilde{\Pi}(k)$, параллельные гиперплоскости $x_1 = 0$, $\widetilde{\Pi}'(k) = \{x' = (x_2, \dots, x_n) : a_i - \frac{1}{k} < x_i < b_i + \frac{1}{k}, i = 2, \dots, n\}$.

Пусть σ – компакт в $\Pi(k)\backslash E$, который отделяет $\partial\Pi(k)$ от $\overline{\Pi}$. По построению, $R^n\backslash\sigma = A \cup B$, где A, B – открытые непересекающиеся множества такие, что $\overline{\Pi} \subset A$, $\partial\Pi(k) \subset B$ и пусть G_1 – компонента связности множества A, которая содержит $\overline{\Pi}$. Тогда $\overline{G}_1 \subset \Pi(k)$, $\partial G_1 \cap E = \varnothing$, $\partial G_1 \subset \sigma$. Положим $\sigma_{01}^1(k) = \overline{G_1 \cap \{x : x_1 = a_1\}}$, $\sigma_{11}^1(k) = \overline{G_1 \cap \{x : x_1 = b_1\}}$, $\sigma(c, k) = G_1 \cap \{x : x_1 = c\}$ для $a_1 < c < b_1$, $G_2 = G_1 \cap \{x : a_1 < x_1 < b_1\}$. Пусть $\rho \in \mathrm{Adm}_{q,\widetilde{w}}(\sigma_{01}, \sigma_{11}, \Pi)$. В силу определения ρ и неравенства Гёльдера, имеем

$$1 \le \int\limits_{\Pi\cap\sigma(c,k)} \rho\, d\mathcal{H}_{n-1} \le \int\limits_{\Pi'} \rho(c, x')\, dx'$$

$$\leq \Big(\int\limits_{\Pi'} \rho^q w^{1-q}\,dx'\Big)^{1/q} \Big(\int\limits_{\Pi'} w\,dx'\Big)^{1/p}.$$

Отсюда $\Big(\int\limits_{\Pi'} w\,dx'\Big)^{1-q} \leq \int\limits_{\Pi'} \rho^q w^{1-q}\,dx'$. Интегрируя полученное неравенство по x_1 и учитывая произвол в выборе ρ, находим

$$0 < \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \Big(\int\limits_{\Pi'} w\,dx'\Big)^{1-q} \leq M_{q,\widetilde{w}}(\sigma_{01}, \sigma_{11}, \Pi). \tag{5}$$

Положим $\rho_1 = 0$ на $E \cap \Pi(k)$ и $\rho_1 = 1$ на $\Pi(k) \setminus E$, $|\sigma(c,k)| = \mathcal{H}_{n-1}(\sigma(c,k))$, $h_k = \inf\limits_{a_1 < c < b_1} |\sigma(c,k)|$. По построению, $h_k = h + o(1)$ при $k \to \infty$, где $h = \mathcal{H}_{n-1}(\sigma_{01})$. Очевидно, что $\rho_1/h_k \in \mathrm{Adm}_{q,\widetilde{w}}(\sigma_{01}^1, \sigma_{11}^1, G_2/E)$. Применяя условие (5) к $M_{q,\widetilde{w}}\big(\widetilde{\sigma}_{01}(k), \widetilde{\sigma}_{11}(k), \widetilde{\Pi}(k)\big)$, учитывая лемму 2 и выбор компакта E, имеем

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \Big(\int\limits_{\widetilde{\Pi}'(k)} w\,dx'\Big)^{1-q} \leq M_{q,\widetilde{w}}\Big(\widetilde{\sigma}_{01}(k), \widetilde{\sigma}_{11}(k), \widetilde{\Pi}(k)\Big)$$

$$\leq M_{q,\widetilde{w}}\Big(\sigma_{01}^1(k), \sigma_{11}^1(k), G_2\Big) \leq c_0^q M_{\mathcal{B},q}\Big(\sigma_{01}^1(k), \sigma_{11}^1(k), G_2\Big)$$

$$= c_0^q M_{\mathcal{B},q}\Big(\sigma_{01}^1(k), \sigma_{11}^1(k), G_2/E\Big) \leq c_0^{2q} M_{q,\widetilde{w}}\Big(\sigma_{01}^1(k), \sigma_{11}^1(k), G_2/E\Big)$$

$$\leq c_0^{2q} \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{\widetilde{\Pi}'(k)} \Big(\frac{\rho_1}{h_k}\Big)^q \widetilde{w}\,dx'.$$

Отсюда, переходя к пределу при $k \to \infty$, находим

$$\int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \Big(\int\limits_{\Pi'} w\,dx'\Big)^{1-q} \leq c_0^{2q} \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{\Pi'} \Big(\frac{\rho_1}{h}\Big)^q \widetilde{w}\,dx'. \tag{6}$$

Пусть Q, $Q \subset \Pi'$, – произвольный $(n-1)$-мерный координатный прямоугольник с рациональными вершинами (координаты вершин – рациональные числа),

$$\Phi_1(x_1, Q) = \int\limits_{Q} \rho_1^q(x_1, x') \cdot \widetilde{w}(x_1, x')\,dx';$$

$$\Phi_2(x_1, Q) = \Big(\int\limits_Q w(x_1, x')\, dx'\Big)^{1-q}.$$

Согласно теореме Фубини, существует множество T, $\mathcal{H}_{n-1}(T) = b_1 - a_1$ такое, что все его точки являются точками Лебега для функций Φ_1, Φ_2 (т.е. точками дифференцируемости интегралов от этих функций) независимо от выбора Q. Выберем теперь $x_1 = c \in T$ таким, что $\mathcal{H}_{n-1}\Big((E \cap \Pi) \cap \{x : x_1 = c\}\Big) > 0$. Заменяя в (6) Π' на Q, a_1 на $c - \delta$, b_1 на $c + \delta$ и деля полученные выражения на 2δ, получим в пределе при $\delta \to 0$

$$c_0^{2q} \int\limits_Q \frac{\rho_1^q}{|Q|^q}\, \widetilde{w}\, dx' \geq \Big(\int\limits_Q w\, dx'\Big)^{1-q}. \tag{7}$$

Учитывая абсолютную непрерывность интегралов $\int\limits_R \rho_1^q\, \widetilde{w}\, dx'$, $\int\limits_R w\, dx'$ для $R \subset \Pi'$, прямоугольник Q в (7) можно считать произвольным $(n-1)$-мерным координатным прямоугольником в Π'. Полагая далее Q $(n-1)$-мерным координатным кубом с центром в точке $(c, c') \in (E \cap \Pi) \cap \{x : x_1 = c\}$, где c' – точки Лебега для $\rho_1^q \widetilde{w}$ и w, перепишем (7) в следующем виде

$$\frac{c_0^{2q} \int\limits_Q \rho_1^q\, \widetilde{w}\, dx'}{|Q|} \geq \frac{\Big(\int\limits_Q w\, dx'\Big)^{1-q}}{|Q|}.$$

Устремляя диаметр Q к нулю, получим противоречие в силу того, что $\rho_1(c, c') = 0$, $w(c, c') > 0$. Следовательно, $\mathcal{L}_n(E) = 0$. Лемма доказана. $\square$

Для описания устранимых множеств нам понадобится условие ε-обхвата для компакта E, $\mathcal{L}_n(E) = 0$, относительно прямой (направления). Возьмем, например, ось Ox_1. Рассмотрим семейство X_1 всех $(n-1)$-мерных гиперплоскостей в R^n, ортогональных оси Ox_1. Индексируем каждую плоскость $H \in X_1$ точкой $a = (c, 0, \ldots, 0)$ пересечения этой гиперплоскости с осью Ox_1. Будем говорить, что некоторое свойство справедливо для $\mathcal{H}_{n-1}$-почти всех $H_a \in X_1$, если множество точек $a \in Ox_1$, для которых данное свойство на H_a не выполнено, имеет нулевую $\mathcal{H}_1$-меру.

Определение 2. *Будем говорить, что компакт E удовлетворяет условию малости обхвата относительно оси Ox_1, если выполнены следующие требования: $\mathcal{L}_n(E) = 0$, для любой функции $\rho \in L_+^{q,\tilde{w}}(R^n)$ и $\mathcal{H}_1$-почти каждой гиперплоскости $H_a \in X_1$, для которой $E_a = H_a \cup E \neq \varnothing$, $\mathcal{H}_{n-1}(E_a) = 0$, для любого $\varepsilon > 0$ можно указать конечную систему областей $D_1, \ldots, D_k$ в ε-окрестности компакта E_a такую, что $E_a \subset \bigcup\limits_{j=1}^{k} D_j$, $\Big(\bigcup\limits_{j=1}^{k} \partial D_j\Big) \cap E = \varnothing$, $\overline{D}_i \cap \overline{D}_j = \varnothing$ для всех $1 \leq i < j \leq k$, $\sum\limits_{j=1}^{k} \int\limits_{\partial D_j = 1} \rho \, d\mathcal{H}_{n-1} < \varepsilon$.*

Сформулированное требование на H_a и на ρ назовем условием ε-обхвата для ρ на H_a.

Нетрудно заметить, что если E удовлетворяет условию малости обхвата относительно оси Ox_1, то для заданной функции $\rho \in L_+^{q,\tilde{w}}(R^n)$ семейство гиперплоскостей H_a, на которых ρ удовлетворяет условию ε-обхвата, можно выбрать одним и тем же для всех $\varepsilon > 0$. Аналогично определим условие малости обхвата компакта E относительно координатных осей $Ox_2, Ox_3, \ldots, Ox_n$ и любой другой прямой (направления).

Известно (см. [2, теоремы 4, 5]) описание устранимых множеств для (q, w)-модуля, которое применительно к нашим рассмотрениям с фиксированной системой координат $Ox_1, \ldots, x_n$ можно сформулировать следующим образом.

Предложение 5. *Пусть E – $NH_{q,\tilde{w}}$-множество в G, $\mathcal{L}_n(E) = 0$. Тогда E удовлетворяет условию малости обхвата относительно координатных осей $Ox_1, Ox_2, \ldots, Ox_n$.*

Замечание. Утверждение предложения 5 остается в силе, если в определении $NH_{q,\tilde{w}}$-множества на G равенство $M_{q,\tilde{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi/E) = M_{q,\tilde{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi)$, где Π – произвольное координатное клеточное множество с основаниями σ_0 и σ_1, $\overline{\Pi} \subset G$, $\big(\partial\Pi \backslash (\sigma_0 \cup \sigma_1)\big) \cap E = \varnothing$, заменить на неравенство

$$cM_{q,\tilde{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi/E) \geq M_{q,\tilde{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi)$$

с постоянной $c \geq 1$, не зависящей от выбора Π.

Пусть U – открытое ограниченное множество в R^n, имеющее конечный периметр, $\partial^* U$ – приведенная граница множества U (см. [10,

11]). Для каждой точки $x \in \partial^* U$ существует единичный вектор $\nu(x)$ такой, что ([12, лемма 3.5, теорема 3.8], [13])

$$2\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}_n\big(B_+(x,r)\cap U\big)}{\alpha\, r^n}=1,\quad 2\lim_{r\to 0}\frac{\mathcal{L}_n\big(B_-(x,r)\cap U\big)}{\alpha\, r^n}=0,$$

где $B_+(x,r) = B(x,r)\cap\{y\in R^n : (y-x)\nu(x) > 0\}$, $B_-(x,r) = B(x,r)\backslash B_+(x,r)$, $\alpha = \mathcal{L}_n\big(B(x,1)\big)$. Этот вектор $\nu(x)$ назовем внутренней нормалью к U в точке x. Тогда элемент векторнозначной меры $\nabla\chi_{U,R^n}$ (см. [1, утверждение 1]) можно записать в виде $\nu(x)|\nabla\chi_{U,R^n}| = \nu(x)d\mathcal{H}_{n-1}|_{\partial^* U}$.

Определение 3. *Матричную функцию $\tilde{w}(x)^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x)}$ назовем непрерывной на G, если для каждой точки $x_0\in G$ и любого $\varepsilon>0$ можно указать такое $\delta>0$, что в евклидовой матричной норме выполняется оценка*

$$|\tilde{w}(x)^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x)}-\tilde{w}(x_0)^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x_0)}|<\varepsilon \quad \text{для всех} \quad x\in G : |x-x_0|<\delta.$$

Очевидно, что это неравенство равносильно

$$|w(x)^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}(x)}-w(x_0)^{1/p}\sqrt{\mathcal{B}(x_0)}|<\varepsilon,$$

которое было использовано для доказательства свойства непрерывности модуля семейства кривых в [14 , теорема 4].

Лемма 4. *Пусть $(F_0,F_1,G_1/E)$ – произвольный конденсатор такой, что $G_1\subset G$, $F_0\cup F_1\subset G_1$, $\partial G_1\cap E=\varnothing$, $(F_0,F_1,G_2/E)$ – конденсатор обладающий аналогичными свойствами, $\overline{G}_2\subset G_1$, $(G_1\setminus G_2)\cap E=\varnothing$. Если $\rho\wedge|\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma^0(F_0,F_1,G_2/E)|$ и $\rho=0$ на $G_1\setminus G_2$, то*

$$\int\limits_{G_1}\rho^q\tilde{w}\,dx\geq M_{\mathcal{B},q}(F_0,F_1,G_1/E). \tag{8}$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $u\in \mathrm{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0,F_1,G_1/E)$. Пусть $\Pi_k\uparrow G_1$ – последовательность полиэдров, выбранных как симплициальные комплексы и, следовательно, скомпонованных из конечных n-мерных симплексов ω без общих внутренних точек, $\overline{G}_2\subset\Pi_k$. Поскольку $\mathcal{A}_p^p(\nabla u)=\int\limits_{G_1}|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u|^p\,dx<\infty$, то k можно считать таким, что интеграл $\int\limits_{G_1\setminus\Pi_k}|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u|^p\,dx$ будет достаточно малым. Кроме того, можно считать, что каждый симплекс ω в Π_k имеет достаточно малый диаметр, обеспечивающий малость колебаний функций u, ∇u

равномерно по всем ω и условие $|\nabla u| = 0$ на тех симплексах ω, для которых $\omega \cap (E \cup F_0 \cup F_1) = \varnothing$. Определим кусочно-линейное отображение L_k на Π_k, которое линейно на каждом симплексе ω и которое в $n+1$ вершинах данного симплекса совпадает с u, вне Π_k положим $L_k = 0$. По построению, $\int\limits_{\Pi_k} |u - L_k|^p w\, dx \to 0$ при $k \to \infty$.

Покажем, что

$$\int\limits_{G_1} |\sqrt{\mathcal{A}}(\nabla u - \nabla L_k)|^p\, dx \to 0 \ \text{ при } \ k \to \infty. \tag{9}$$

Здесь применим рассуждения из [15, 5.2, с. 277], проведенные для $p = 1$, $w \equiv 1$ в R^n.

Действительно, пусть упомянутый выше симплекс ω в Π_k натянут на единичные векторы $e_1, \ldots, e_n$. На каждом ребре l_i симплекса ω, параллельном вектору e_i, $i = \overline{1,n}$, найдется точка M_i такая, что

$$\int\limits_{l_i} (\nabla u - \nabla L_k)\, dx = 0 = \big(\nabla u(M_i) - \nabla L_k(M_i)\big) e_i. \tag{10}$$

Поскольку $\nabla L_k(M_i) = \nabla L_k(M)$, для всех точек $M \in \omega$, то заменяя в (10) точку M_i на M, с учетом малости колебания ∇u на ω получаем, что $\big|\nabla u(M) - \nabla L_k(M)\big| = o(1)$ равномерно по всем ω. Последнее в силу неравенств (1), (2) и интегрируемости функции w на G_1 дает соотношение (9), что, с другой стороны, влечет условие

$$\int\limits_{G_1} |\sqrt{\mathcal{A}} \nabla L_k|^p\, dx \to \int\limits_{G_1} |\sqrt{\mathcal{A}} \nabla u|^p\, dx. \tag{11}$$

Положим $N_t = \{x \in \Pi_k : L_k(x) > t\}$, $E_t = \{x \in \Pi_k : L_k(x) = t\}$ для $t \in (0,1)$; $\tilde{\Sigma}_k^0 = \{\Pi_k \cap \partial N_t, 0 < t < 1\}$. Поскольку L_k линейно на ω, то $E_t \cap \omega$ – $(n-1)$-мерный симплекс, либо $E_t \cap \omega = \omega$, либо $E_t \cap \omega = \varnothing$. Отсюда $\tilde{\Sigma}_k^0 \subset \Sigma^0(F_0, F_1, \Pi_k/E)$ и $E_t \in \tilde{\Sigma}_k^0$ для всех $t \in (0,1)$, исключая конечное число значений $t = t_1, \ldots, t = t_m$. Положим $n(x) = \frac{\nabla L_k(x)}{|\nabla L_k(x)|}$ на $\Pi_k \cap \partial N_t$ для $t \in (0,1) \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$. Тогда $n(x)$ – внутренняя нормаль к N_t в точке $x \in E_t$. Для $t = t_1, \ldots, t_m$ отождествим $n(x)$ с точкой $(0, \ldots, 0)$. По теореме Кронрода–Федерера (см. [11]) и в силу условия

$\rho \wedge |\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\tilde{\Sigma}_k^0|$ имеем

$$1 \le \int\limits_0^1 dt \int\limits_{E_t} \rho\tilde{w}^{1/q}|\sqrt{\mathcal{A}}\,n|\,d\mathcal{H}_{n-1} = \int\limits_0^1 dt \int\limits_{E_t} \rho\tilde{w}^{1/q}\frac{\sqrt{\mathcal{A}}\nabla L_k(x)}{|\nabla L_k(x)|}\,d\mathcal{H}_{n-1}$$

$$= \int\limits_{G_1} \rho\tilde{w}^{1/q}|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla L_k(x)|\,dx \le \Big(\int\limits_{G_1}\rho^q\,\tilde{w}\,dx\Big)^{1/q}\Big(\int\limits_{G_1}|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla L_k(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}.$$

Отсюда, устремляя $k \to \infty$ и учитывая (11), получим

$$\int\limits_{G_1}\rho^q\,\tilde{w}\,dx \ge \Big(\int\limits_{G_1}|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla u(x)|^p\,dx\Big)^{-q/p}.$$

Наконец, переход в последнем неравенстве к инфимуму по u вместе с предложением 1 дает нужную оценку (8). □

Как видно из доказательства леммы 4, утверждение этой леммы можно переформулировать следующим образом.

Следствие 1. *В условиях леммы* 4 *и в обозначениях из ее доказательства имеет место соотношение*

$$\rho \wedge |\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\ \widetilde{\Sigma}_k^0|$$

для всех $k \ge 1$ *независимо от выбора* $u \in \mathrm{adm}_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G_1/E)$, *что влечет оценку* (8).

В дальнейшем единичный вектор $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ отождествим с точкой $(\nu_1, \ldots, \nu_n)$ на единичной сфере $S(0,1) = \partial B(0,1)$. Будем говорить, что множество направлений имеет нулевую $\mathcal{H}_{n-1}$-меру, если соответствующие множество точек на сфере $S(0,1)$ имеет нулевую $\mathcal{H}_{n-1}$-меру.

Лемма 5. *Пусть* S_1 *– множество направлений в* R^n *нулевой* $\mathcal{H}_{n-1}$-*меры;* $(F_0, F_1, G_1/E)$, $(F_0, F_1, G_2/E)$ *– конденсаторы, определенные в лемму* 4. *Если* ρ *– непрерывная функция на* G_1 *с компактным носителем на* G_2, $\rho \wedge |\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\tilde{\Sigma}^0(F_0, F_1, G_2/E)|$, *где* $\tilde{\Sigma}^0(F_0, F_1, G_2/E) = \{\tau = \sigma \cap G_2, \sigma \in \Sigma^0(F_0, F_1, R^n/E)$ *и* σ *не содержит* $(n-1)$-*мерных симплексов, ортогональных направлениям из* $S_1\}$ *и* $\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}$ *– непрерывная функция на* G, *то*

$$\int\limits_{G_1}\rho^q\,\tilde{w}\,dx \ge M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть имеют место определения и обозначения из доказательства леммы 4. Пусть G_3, G_4 – два полиэдра такие, что $F_0 \cup F_1 \subset G_3$, $\overline{G}_2 \subset G_3$, $\overline{G}_3 \subset G_4$, $\overline{G}_4 \subset G_1$. На полиэдр Π_k, $k \geq 1$, наложим условие: $\overline{G}_4 \subset \Pi_k$. Как видно из следствия к лемме 4, достаточно доказать, что

$$\int\limits_{E_t} \rho\tilde{w}^{1/q}|\sqrt{\mathcal{A}}\,n|\,d\mathcal{H}_{n-1} = \int\limits_{E_t\cap G_3} \rho\tilde{w}^{1/q}|\sqrt{\mathcal{A}}\,n|\,d\mathcal{H}_{n-1} \geq 1$$

для всех $t \in (0,1) \setminus \{t_1, \ldots, t_m\}$.

Пусть U – объединение компонент связности открытого множества $G_3 \setminus E_t$, в котором содержится компакт F_1. По построению, U – полиэдр и $\partial U \in \Sigma^0(F_0, F_1, R^n/E)$ Поскольку

$$\int\limits_{E_t\cap G_3} \rho\tilde{w}^{1/q}|\sqrt{\mathcal{A}}\,n|\,d\mathcal{H}_{n-1} \geq \int\limits_{\partial U} \rho\tilde{w}^{1/q}|\sqrt{\mathcal{A}}\,n|\,d\mathcal{H}_{n-1},$$

то для справедливости леммы 5 достаточно установить неравенство

$$\int\limits_{\partial U} \rho\tilde{w}^{1/q}|\sqrt{\mathcal{A}}\,n|\,d\mathcal{H}_{n-1} \geq 1. \tag{13}$$

По построению ∂U состоит из конечного числа $(n-1)$-мерных симплексов Q, пересекающихся попарно по множеству нулевой $\mathcal{H}_{n-1}$-меры. Если $\partial U \cap G_2 \in \tilde{\Sigma}^0(F_0, F_1, G_2/E)$, то неравенство (13) очевидно. В противном случае рассмотрим последовательность вращений T_j вокруг точки $O = (0, \ldots, 0)$ (ортогональное линейное преобразование R^n в себя, $T_j(0) = 0$), мало отличающееся в матричной евклидовой норме от тождественного преобразования T. Каждое вращение T_j можно выбрать так, что $T_j(\partial U) \in \Sigma^0(F_0, F_1, R^n/E)$, $T_j(Q)$ не лежит на гиперплоскостях, ортогональных направлениям из S_1, $T_j(\overline{U}) \subset G_4$, $|T_j(x) - T(x)| < \frac{1}{j}$ на $\overline{G}_4$.

В силу равномерной непрерывности матричной функции $\tilde{\rho}(x) = \rho(x)\tilde{w}(x)^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x)}$ на $\overline{G}_4$ и того факта, что внутренняя нормаль (для U) $n(x) =$ const на Q, внутренняя нормаль (для $T_j(U)$) $n(x) =$ const на $T_j(Q)$, можно разбить Q на $(n-1)$-мерные симплексы $Q_1, \ldots, Q_s$

достаточно малого диаметра $\delta > 0$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{i=1}^{s} \Big| \int\limits_{Q_i} |\tilde{\rho}(x_i)n(x_i)|\, d\mathcal{H}_{n-1} - \int\limits_{Q_i} |\tilde{\rho}(x)n(x)|\, d\mathcal{H}_{n-1} \Big| = o(1),$$

$$\sum_{i=1}^{s} \Big| \int\limits_{T_j(Q_i)} |\tilde{\rho}(T_j(x_i))n(T_j(x_i))|\, d\mathcal{H}_{n-1} - \int\limits_{T_j(Q_i)} |\tilde{\rho}(T_j(x))n(T_j(x))|\, d\mathcal{H}_{n-1} \Big| = o(1), \tag{14}$$

где x_i – фиксированная точка из Q_i.

Ввиду равенств

$$I_i = \int\limits_{Q_i} |\tilde{\rho}(x_i)n(x_i)|\, d\mathcal{H}_{n-1} = |\tilde{\rho}(x_i)n(x_i)|\mathcal{H}_{n-1}(Q_i),$$

$$\tilde{I}_i = \int\limits_{T_j(Q_i)} |\tilde{\rho}(T_j(x_i))n(T_j(x_i))|\, d\mathcal{H}_{n-1} = |\tilde{\rho}(T_j(x_i))n(T_j(x_i))|\mathcal{H}_{n-1}(T_j(Q_i)),$$

$\mathcal{H}_{n-1}(Q_i) = \mathcal{H}_{n-1}(T_j(Q_i))$ и соотношений (1), (2) справедлива оценка при $\delta < \frac{1}{j}$

$$|I_i - \tilde{I}_i| \le \Big(\max_{|x'-x''| \le \frac{1}{j}; x', x'' \in \overline{G}_4} |\tilde{\rho}(x') - \tilde{\rho}(x'')| + \max_{\overline{G}_4} \rho\, c_0 |n(x_i) - n(T(x_i))| \Big) \mathcal{H}_{n-1}(Q_i)$$

Отсюда и из (14), суммируя по всем Q_i, Q, получим, что

$$\Big| \int\limits_{T_j(\partial U)} |\tilde{\rho}(x)n(x)| d\mathcal{H}_{n-1} - \int\limits_{\partial U} |\tilde{\rho}(x)n(x)| d\mathcal{H}_{n-1} \Big| = o(1)$$

В силу выбора T_j имеем $T_j(\partial U) \cap G_2 \in \tilde{\Sigma}^0(F_0, F_1, G_2/E)$ и, значит,

$$\int\limits_{T_j(\partial U)} \rho(x)\tilde{w}^{1/q} |\sqrt{\mathcal{A}}\, n(x)| d\mathcal{H}_{n-1} \ge 1,$$

что влечет при $j \to \infty$ неравенство (13). Отсюда, учитывая следствие из леммы 4, получим требуемое неравенство (12). $\square$

Определение 4. *Пусть $(F_0, F_1, G_1/E)$ – произвольный конденсатор такой, что $G_1 \subset G$, $F_0 \cup F_1 \subset G_1$, $\partial G_1 \cap E = \varnothing$ и G_{1k}, $k \geq 1$, – любая последовательность открытых множеств, для которой*

$$\overline{G}_{1k} \subset G_{1k+1}, \quad F_0 \cup F_1 \subset G_{1k}, \quad \partial G_{1k} \cap E = \varnothing, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} G_{1k} = G_1.$$

Если $\lim\limits_{k\to\infty} C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G_{1k}/E) = C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G_1/E)$ независимо от выбора контакта E, $E \cap \partial G = \varnothing$, то будем говорить, что емкость $C^*_{\mathcal{A},p}$ аппроксимируема изнутри на G.

Отметим, что $C_{p,w}$-емкость аппроксимируема изнутри на G в силу совпадения с (p, w)-модулем семейства составных кривых, соединяющих пластины конденсатора $(F_0, F_1, G_1/E)$ (см. [9]).

Можно показать, что $C^*_{\mathcal{A},p}$ будет аппроксимируема изнутри на G, если выполнено определение 3.

Пусть выполнено определение 4 и $(F_0, F_1, G_1/E)$ – конденсатор такой, что $G_1 \subset G$, $F_0 \cup F_1 \subset G$, $\big(\partial G_1 \backslash (F_0 \cup F_1)\big) \cap E = \varnothing$. Здесь вообще говоря, в отличие от конденсатора $(F_0, F_1, G_1/E)$ в определении 4 множество $(F_0 \cup F_1) \cap \partial G_1$ может быть непустым, аналогично множество $(\partial G_1 \cap E)$ также может быть непустым. По определению емкости $C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G_1/E)$, можно подобрать множество $F_j(k)$, $\overline{F}_j(k) \subset G$, $k \geq 1$, такое, что $F_j(k)$ состоит из конечного числа областей без общих внутренних точек, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial F_j(k)) < \infty$, $\overline{F}_j(k+1) \subset F_j(k)$, $F_j \subset F_j(k)$, $F_j(k)$ лежит в $\frac{1}{k}$-окрестности компакта F_j, $\partial F_j(k) \cap E = \varnothing$, $j = 0, 1$, $F_0(k) \cap F_1(k) = \varnothing$, и

$$C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G_1/E) \leq C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G_{1k}/E) \leq C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G_1/E) + \frac{1}{k},$$

где $G_{1k} = G_1 \cup F_0(k) \cup F_1(k)$.

Выберем открытое множество D_k, $k \geq 1$, $\overline{D}_k \subset G_1$, $\mathcal{H}_{n-1}(\partial D_k) < \infty$, $\overline{D}_k \subset D_{k+1}$, $\partial D_k \cap E = \varnothing$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} D_k = G_1$ так, чтобы в силу определения 4 выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G_1/E) - \frac{1}{k} &\leq C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G_1(k)/E) \\ &\leq C^*_{\mathcal{A},p}(F_0, F_1, G_1/E) + \frac{1}{k}, \end{aligned} \tag{15}$$

где $G_1(k) = D_k \cup F_0(k) \cup F_1(k)$. Последовательность $(F_0, F_1, G_1(k)/E)$, $k \geq 1$, назовем аппроксимирующей для конденсатора $(F_0, F_1, G_1/E)$.

Аналогично, для $(F_0, F_1, G_1/E)$ построим еще одну аппроксимирующую последовательность $(F_0, F_1, G_1^*(k)/E)$, $k \geq 1$, для которой $\overline{G}_1^*(k) \subset G_1(k)$, для всех $k \geq 1$.

Тогда, принимая во внимание предложение 1 и монотонность модуля системы мер, получим, что

$$M_q\big(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(F_0, F_1, G_1(k)/E)|\big) \leq M_q\big(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(F_0, F_1, G_1^*(k)/E)|\big),$$

для всех $k \geq 1$.

Установим необходимые и достаточные условия устранимости множеств для $(\mathcal{B}, q)$-модуля на G. Как обычно, множество $O(K, \delta) = \bigcup\limits_{x \in K} B(x, \delta)$ назовем δ-окрестностью множества $K \subset R^n$, где $\delta > 0$.

Теорема 1. *Если компакт $E \subset G$, $\mathcal{L}_n(E) = 0$, – устранимое множество для $(\mathcal{B}, q)$-модуля на G, то E удовлетворяет условию малости обхвата относительно любого направления в R^n. Обратно, если компакт $E \subset G$, $\mathcal{L}_n(E) = 0$, удовлетворяет условию малости обхвата относительно любого направления в R^n и на G выполняются условия, указанные в определениях* 3 *и* 4, *то E – устранимое множество для $(\mathcal{B}, q)$-модуля на G.*

Доказательство. *Необходимость.* Если E – устранимое множество для $(\mathcal{B}, q)$-модуля на G, то $E - NH_{\mathcal{B},q}$-множество на G. Это и лемма 2 дают оценки

$$\begin{aligned} M_{q,\bar{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi/E) &\geq c_0^{-q}\, M_{\mathcal{B},q}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi/E) \\ &= c_0^{-q}\, M_{\mathcal{B},q}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi) \geq c_0^{-2q}\, M_{q,\bar{w}}(\sigma_0, \sigma_1, \Pi) \end{aligned}$$

для произвольного координатного клеточного множества Π с основаниями σ_0, σ_1, где $\overline{\Pi} \subset G$, $\big(\partial\Pi \backslash (\sigma_0 \cup \sigma_1)\big) \cap E = \varnothing$.

Тем самым, в силу предложения 5 и замечания к нему, компакт E удовлетворяет условию малости обхвата относительно координатных осей выбранной системы координат. Варьируя систему координат, приходим к необходимости условия теоремы 1.

Достаточность. Пусть компакт E, $\mathcal{L}_n(E) = 0$, удовлетворяет условию малости обхвата относительно любого направления в R^n. Заметим, что из определения малости обхвата относительно n попарно ортогональных направлений сразу следует нульмерность компакта E. Рассмотрим произвольный конденсатор $(F_0, F_1, G_1/E)$ из определения устранимого множества для $(\mathcal{B}, q)$-модуля на G. Если $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E)$

$= \infty$, то тем более $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1) = \infty$ и, следовательно, равенство $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1)$ выполнено. Пусть теперь $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E) < \infty$. В силу предложения 2, $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E) = M_q\big(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(F_0, F_1, G_1/E)|\big)$. В свою очередь,

$$M_q\big(|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma|\big) = M_{q,\tilde{w}}\big(\tilde{w}^{1/q}|\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma|\big)$$

(см. [14, с. 62]). Учитывая, что определение 3 выполнено, будем дальше рассматривать величину $M_{q,\tilde{w}}\big(|\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma(F_0, F_1, G_1/E)|\big)$, обозначенную далее для удобства через $M^*_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1/E)$. Пусть

$$(F_0, F_1, G_1^*(k)/E), \quad (F_0, F_1, G_1(k)/E), \quad k \geq 1,$$

– две аппроксимирующие последовательности для конденсатора $(F_0, F_1, G_1/E)$, где $\overline{G}_1^*(k) \subset G_1(k)$ для всех $k \geq 1$ (см. (15) и ниже). Тогда в силу предложения 1,

$$M^*_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1^*(k)/E) = M^*_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1/E) + o(1),$$

$$M^*_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1(k)/E) = M^*_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1/E) + o(1) \ \text{ при } \ k \to \infty.$$

Поскольку $\partial G_1^*(k) \cap E = \partial G_1(k) \cap E = \varnothing$, то последовательности

$$(F_0, F_1, G_1^*(k)), \quad (F_0, F_1, G_1(k)), \quad k \geq 1,$$

можно считать аппроксимирующими последовательностями для конденсатора (F_0, F_1, G_1) и, значит,

$$M^*_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1^*(k)) \to M^*_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1),$$

$$M^*_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1(k)) \to M^*_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1) \text{ при } k \to \infty.$$

Фиксируем k и пусть $\rho \wedge |\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma^0(F_0, F_1, G_1^*(k)/E)|$. Положим $\rho = 0$ на $R^n \setminus \Big(G_1^*(k) \setminus \big(F_0 \cup F_1 \cup (E \cap G_1^*(k))\big)\Big)$. Очевидно, что

$$\rho \wedge |\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\Sigma^0(F_0, F_1, R^n/E)|.$$

В силу равномерной непрерывности $\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}$ на компакте $\overline{G}_1(k)$ выберем по заданному $\varepsilon_1 \in (0,1)$ положительное число δ_1,$0 < \delta_1 < \frac{d(\partial G_1(k), \overline{G}_1^*(k))}{4}$ таким, чтобы в евклидовой матричной норме выполнялось условие

$$|\tilde{w}(x)^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x)} - \tilde{w}(x')^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x')}| < \varepsilon_1$$

$$\text{для всех} \quad x, x' \in \overline{G}_1(k), \quad |x - x'| < \delta_1.$$

Пусть $\rho_r(x) = \frac{1}{|B(0,r)|} \int\limits_{B(0,r)} \rho(x+y)\,dy$, где

$$|B(x,r)| = \mathcal{L}_n(B(x,r)), 0 < r < \delta_1.$$

По определению $\rho_r(x)$ имеет компактный носитель $\operatorname{supp}\rho_r$ на $G_1(k)$, $d(\operatorname{supp}\rho_r, \partial G_1(k)) > 3\delta_1$. Ввиду условий

$$\rho_r(x) \le M\rho(x), \quad \|M\rho(x)\|_{q,\bar{w}} \le \mathrm{const}\,\|\rho(x)\|_{q,\bar{w}},$$

где $M\rho(x)$ – максимальная функция Харди, то $\rho_r(x) \to \rho(x)$ $\mathcal{L}_n$-почти всюду на R^n при $r \to 0$. Это влечет условие $\|\rho_r(x) - \rho(x)\|_{q,\bar{w}} \to 0$ при $r \to 0$. Положим $\Sigma_j^0 = \{\sigma \in \Sigma^0(F_0, F_1, R^n) : d(\sigma, F_0 \cup F_1) > \frac{1}{j}\}, j \in N$. Ясно, что $\Sigma_j^0 \subset \Sigma_{j+1}^0$. Покажем, что $\rho_r(x)(1-\varepsilon_1)^{-1} \wedge |\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma_j^0)|$ для $r < \frac{1}{j}$. Действительно пусть $\sigma \in \Sigma_j^0$ и $T_y(x) = x+y$. Задав любой вектор y и $|y| < r$, получим, в силу выбора r, j, что $T_y(\sigma) \in \Sigma^0(F_0, F_1, R^n)$. Далее, поскольку σ состоит из конечного числа $(n-1)$-мерных замкнутых симплексов, пересекающихся попарно по множеству нулевой $\mathcal{H}_{n-1}$- меры и расположенных на конечном числе гиперплоскостей $H_1 \dots H_s$, то для $\mathcal{L}_n$- почти всех y, $|y| < r$, для которых $H_i \cap E \ne \varnothing, i = 1 \dots s$, выполняется условие малости ε_2-обхвата относительно ρ (см. определение 2) с заданным $\varepsilon_2 \in (0,1)$. Для каждого такого y можно указать конечное число попарно непересекающихся замкнутых областей $D_1, \dots, D_m$ таких, что $E \cap T_y(\sigma) \subset \bigcup\limits_{i=1}^m D_i$, $\sum\limits_{i=1}^m \int (\rho+1)\,d\mathcal{H}_{n-1} < \varepsilon_2$, $(\bigcup\limits_{i=1}^m \partial D_i) \cap E = \varnothing$, $(\bigcup\limits_{i=1}^m D_i) \subset O(T_y(\sigma), \varepsilon_2)$. Если $0 < \varepsilon_2 < d(T_y(\sigma), F_0 \cup F_1)$, то поверхность $\sigma_y = \big(T_y(\sigma) \setminus (\bigcup\limits_{i=1}^m D_i)\big) \cup (\bigcup\limits_{i=1}^m \partial D_i) \in \Sigma(F_0, F_1, R^n)$.

Отсюда, ввиду условий (1), (2), полагая $\mu_\sigma = |\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\chi_{B(\sigma),R^n}|$, получим, что

$$1 \le \int \rho\,\mu_{\sigma_y} = \int\limits_{\sigma_y \cap G_1^*(k)} \rho|\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x)}\nu(x)|\,d\mathcal{H}_{n-1}$$

$$\le \int\limits_{T_y(\sigma)\setminus E} \rho|\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x)}\nu(x)|\,d\mathcal{H}_{n-1} + \sum_{i=1}^m \int\limits_{\partial^* D_i} \rho|\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x)}\nu(x)|\,d\mathcal{H}_{n-1}$$

$$\le \int\limits_{T_y(\sigma)\setminus E} \rho|\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x)}\nu(x)|\,d\mathcal{H}_{n-1} + c_0 \sum_{i=1}^m \int\limits_{\partial^* D_i} \rho|\nu(x)|\,d\mathcal{H}_{n-1}$$

$$\leq \int\limits_{T_y(\sigma)} \rho|\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x)}\nu(x)|\,d\mathcal{H}_{n-1} + c_0\varepsilon_2 = \int \rho\,\mu_{T_y(\sigma)} + c_0\varepsilon_2.$$

Здесь $\nu(x)$ – внутренняя нормаль соответственно к $T_y\big(B(\sigma)\big)$, D_i, $i = 1, \ldots, m$; в дальнейшем положим $O_2 = O(\overline{G}_1^*(k), 2\delta_1)$, $O_3 = O(\overline{G}_1^*(k), 3\delta_1)$.

Устремляя ε_2 к нулю, получим, что для указанных y выполняется $\rho \wedge \mu_{T_y(\sigma)}$. Отсюда, если учесть, что $|y| < r$, внутренняя нормаль $\nu(x)$ к $B(\sigma)$ в точке $x \in \sigma$ совпадает с внутренней нормалью к $T_y\big(B(\sigma)\big)$ в точке $x + y$, имеем

$$(1-\varepsilon_1)^{-1}\int \rho_r\,\mu_\sigma = (1-\varepsilon_1)^{-1}\int\limits_{\sigma\cap O_2} \rho_r|\tilde{w}(x)^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x)}\nu(x)|\,d\mathcal{H}_{n-1}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon_1)^{-1}}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} dy \int\limits_{\sigma\cap O_2} \rho(x+y)|\tilde{w}(x)^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(x)}\nu(x)|\,d\mathcal{H}_{n-1}$$

$$= \frac{(1-\varepsilon_1)^{-1}}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} dy \int\limits_{T_y(\sigma)\cap O_3} \rho(z)|\tilde{w}(z-y)^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(z-y)}\nu(z)|\,d\mathcal{H}_{n-1}$$

$$\geq (1-\varepsilon_1)^{-1}\Bigg(\frac{1}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} dy \int\limits_{T_y(\sigma)\cap O_3} \rho(z)|\tilde{w}(z)^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}(z)}\nu(z)|\,d\mathcal{H}_{n-1}$$

$$-\varepsilon_1\frac{1}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} dy \int\limits_{T_y(\sigma)\cap O_3} \frac{|\nu(z)|}{c_0}\,d\mathcal{H}_{n-1}\Bigg)$$

$$\geq (1-\varepsilon_1)^{-1}\Bigg(\frac{1}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} dy \int\limits_{T_y(\sigma)} \rho(z)|\tilde{w}^{1/q}(z)\sqrt{\mathcal{A}(z)}\nu(z)|\,d\mathcal{H}_{n-1}$$

$$-\varepsilon_1\frac{1}{|B(0,r)|}\int\limits_{B(0,r)} dy \int\limits_{T_y(\sigma)} \rho(z)|\tilde{w}^{1/q}(z)\sqrt{\mathcal{A}(z)}\nu(z)|\,d\mathcal{H}_{n-1}\Bigg) \geq 1.$$

Тем самым $\rho_r(x)(1-\varepsilon_1)^{-1} \wedge |\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma_j^0)|$ для $0 < r < \frac{1}{j}$.

Возьмем теперь конденсатор $(F_0, F_1, G_1(k))$ и заменим в нем компакты F_0, F_1 соответственно на $F_{0\delta} = \overline{O(F_0,\delta)}$ и $F_{1\delta} = \overline{O(F_1,\delta)}$. В силу монотонности модуля,

$$M_{\mathcal{B},q}(F_{0\delta}, F_{1\delta}, G_1(k)) \to M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1(k)) \text{ при } \delta \to 0.$$

Фиксируем малое $\delta > 0$ и выберем $j \in N$ таким, чтобы $\delta > \frac{1}{j}$. В силу $\overline{O}_2 \subset G_1(k)$ и выбора j

$$\rho_r(x)(1-\varepsilon_1)^{-1} \wedge |\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma^0(F_{0\delta}, F_{1\delta}, O_2)|.$$

По лемме 4, положив в ней $G_1 = G_1(k)$, $G_2 = O_2$, $F_0 = F_{0\delta}$, $F_1 = F_{1\delta}$, $E = \varnothing$, имеем

$$M_{\mathcal{B},q}(F_{0\delta}, F_{1\delta}, G_1(k)) \leq \int\limits_{G_1(k)} \big(\rho_r(x)(1-\varepsilon_1)\big)^q \tilde{w}\, dx.$$

В последнем неравенстве, переходя к пределу при $r \to 0$, а затем при $j \to \infty$ и $\varepsilon_1 \to 0$, получим

$$M_{\mathcal{B},q}(F_{0\delta}, F_{1\delta}, G_1(k)) \leq \int\limits_{G_1^*(k)} \rho(x)^q \tilde{w}\, dx.$$

Ввиду произвола в выборе ρ, $\rho \wedge |\tilde{w}^{1/q}\sqrt{\mathcal{A}}\nabla\Sigma^0(F_0, F_1, G_1^*(k)/E)|$,

$$M_{\mathcal{B},q}(F_{0\delta}, F_{1\delta}, G_1(k)) \leq M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1^*(k)/E) = M^*_{q,\tilde{w}}(F_0, F_1, G_1^*(k)/E).$$

Устремляя сначала δ к нулю, затем $k \to \infty$, получим

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1) \leq M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E).$$

Значит, равенство, $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E) = M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1)$ выполняется и в случае $M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G_1/E) < \infty$, что доказывает нашу теорему. □

Заменяя в доказательстве достаточности условия теоремы 1 семейство Σ_j^0 на семейство $\tilde{\Sigma}_j^0 = \{\sigma \in \Sigma_j^0 : \sigma$ не содержит $(n-1)$-мерных симплексов, ортогональных направлениям из $S_1, \mathcal{H}_{n-1}(S_1) = 0\}$ и применяя вместо леммы 4 лемму 5, теорему 1 можно усилить следующим образом.

Теорема 2. *Если компакт $E \subset G$, $\mathcal{L}_n(E) = 0$, удовлетворяет условию малости обхвата для всех направлений в R^n, исключая множество S_1 нулевой $\mathcal{H}_{n-1}$-меры, и выполнены определения* 3, 4, *то E – устранимое множество для $(\mathcal{B}, q)$-модуля в G.*

§3. Устранимые множества конечной $\mathcal{H}_1$-меры.

Дадим два приложения теорем 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть выполнены определения* 3, 4 *и компакт* $E \subset G$ *имеет конечную* $\mathcal{H}_1$*-меру. Если ортогональная проекция* $\text{пр}_i E$ *множества* E *на координатную* x_i*-ось имеет нулевую* $\mathcal{H}_1$*-меру для* $i = 1, \dots, n$, *то* E *– устранимое множество для* $(\mathcal{B}, q)$*-модуля в* G.

Доказательство. Из условия $\mathcal{H}_1(E) < \infty$ сразу следует (см. [16, теорема 2.10.11, 3.3.12]), что E можно представить в виде $E_1 \cup E_2$, где E_1 – счетное $(\mathcal{H}_1, 1)$-спрямляемое борелевское множество, а E_2 – вполне $(\mathcal{H}_1, 1)$-неспрямляемое множество и ортогональная проекция E_2 на $\mathcal{H}_{n-1}$-почти все направления равна 0. По теореме 3.2.29 из [16, с. 281] $\mathcal{H}_1$-почти все точки E_1 содержатся в объединении некоторого семейства 1-мерных многообразий класса 1 пространства R^n. Поскольку $0 \le \mathcal{H}_1(\text{пр}_i E_1) \le \mathcal{H}_1(\text{пр}_i E) = 0$, $i = 1, \dots, n$, то $\mathcal{H}_1(E_1) = 0$.

Отсюда для $\mathcal{H}_{n-1}$-почти всех направлений компакт E удовлетворяет условию малости обхвата. По теореме 2, компакт E - устранимое множество для $(\mathcal{B}, q)$-модуля в G. □

В формулировке следующего результата будем считать, что $w = 1$ в R^n, $p = n$, $q = \frac{n}{n-1}$. Кроме того, положим в этом случае

$$M_{\mathcal{B},q}(F_0, F_1, G/E) = M^*(F_0, F_1, G/E),$$

$$M_{q,\vec{w}}(F_0, F_1, G/E) = M(F_0, F_1, G/E).$$

Если $F_0 = \partial B(x_0, r_1)$, $F_1 = \partial B(x_0, r_2)$, где $0 < r_1 < r_2$, то (см. [1, 17])

$$M(\partial B(x_0, r_1), \partial B(x_0, r_2), B(x_0, r_2)) \to \infty, \tag{16}$$

при $r_1 \to 0$. Пусть теперь E – компакт и τ – компонента связности компакта E такая, что для $x_0 \in \tau$ и $\tau \subset B(x_0, r_2)$

$$M(\tau, \partial B(x_0, r_2), B(x_0, r_2/E)) = \infty.$$

Тогда (см. [18]) τ – вырожденная компонента связности множества E, $\tau = \{x_0\}$, и $M(\{x_0\}, \partial B(x_0, r), B(x_0, r)/E) = \infty$ для любого $r \in (0, +\infty)$.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия определений* 3, 4 *и* $E \subset G$ *– компакт конечной* $\mathcal{H}_1$*-меры. Тогда* E *– устранимое множество для*

$(\mathcal{B}, \frac{n}{n-1})$-модуля тогда и только тогда, когда E – нульмерное множество и E представимо в виде объединения двух борелевских множеств E_1 и E_2, где $\mathcal{H}_1(E_1) = 0$ и $M(\{x_0\}, \partial B(x_0, r), B(x_0, r)/E) = \infty$ для любой точки $x_0 \in E_2$ и любого $r > 0$.

Доказательство. *Необходимость.* Пусть E – устранимое множество для $(\mathcal{B}, \frac{n}{n-1})$-модуля в G. Тогда по лемме 1 E – нульмерное множество. В силу леммы 2 и условия (16), имеем

$$\begin{aligned} &M(\{x_0\}, \partial B(x_0, r), B(x_0, r)/E) \\ &\geq c_0^{-\frac{n}{n-1}} M^*(\{x_0\}, \partial B(x_0, r), B(x_0, r)/E) \\ &= c_0^{-\frac{n}{n-1}} M^*(\{x_0\}, \partial B(x_0, r), B(x_0, r)) \\ &\geq c_0^{-\frac{2n}{n-1}} M(\{x_0\}, \partial B(x_0, r), B(x_0, r)) = \infty \end{aligned}$$

для каждой точки $x_0 \in E$ и $r > 0$, что доказывает необходимость условия теоремы.

Достаточность. Возьмем декартову систему координат $Ox_1, ..., x_n$ в R^n и рассмотрим гиперплоскости, ортогональные оси Ox_1.

Пусть множество E представимо в виде объединения борелевских множеств E_1 и E_2 с нужными свойствами. Известно (см. [16, 2.10.11])

$$\mathcal{H}_1(E_2) \geq \int N(p_1/E_2, y)\, d\mathcal{L}_1(y)$$

где p_1 – ортогональная проекция E_2 на ось Ox_1, $N(p_1/E_2, y)$ – число точек из E_2, проектирующихся в точку $y \in Ox_1$. Тогда для $\mathcal{L}_1$-почти ($\mathcal{H}_1$-почти) всех $y \in Ox_1$ число точек множества $p_1^{-1}(y)$ будет конечным. Выберем теперь гиперплоскость H, $Ox_1 \perp H$, такой, чтобы H не содержала точек E_1 и для точки $y \in H \cap Ox_1$ имело место условие $\operatorname{card} p_1^{-1}(y) < \infty$.

Покажем, что на H для заданной функции $\rho \in L_+^{\frac{n}{n-1}}(R^n)$ выполняется условие ε-обхвата. Действительно, для заданного $\varepsilon > 0$ рассмотрим семейство $\Sigma = \Sigma(\{x_1\}, \partial B(x_1, r), B(x_1, r)/E)$, где $x_1 \in E_2 \cap H$ и $r > 0$. Тогда найдется поверхность $\sigma_1 \in \Sigma$, для которой $\int\limits_{\sigma_1} (\rho + 1)\, d\mathcal{H}_{n-1} < \frac{\varepsilon}{N}$, где $N = \operatorname{card} p_1^{-1}(y)$. Если это условие не выполнено, то $\frac{\rho+1}{\varepsilon} N \wedge \operatorname{Adm} \Sigma$ и, значит, $M(\{x_1\}, \partial B(x_1, r), B(x_1, r)/E) < \infty$, что противоречит выбору множества E_2. Аналогично, построим поверхности $\sigma_2, \ldots, \sigma_N$ для остальных точек $x_2, \ldots, x_N$ из $H \cap E_2$. Выбор $\sigma_1, \ldots, \sigma_N$ можно осуществить так, что бы они сами не пересекались и не пересекались

компоненты дополнения $D_1, \dots, D_N$ к $\sigma_1, \dots, \sigma_N$, содержащие соответственно точки $x_1, \dots, x_N$. По построению, $D_1, \dots, D_N$ – требуемые области из определения ε-обхвата для ρ на H. Тем самым установлено условие малости обхвата множества E относительно Ox_1.

Очевидно, что такие же рассуждения можно провести для любого другого направления. Следовательно, для E выполнено условие малости обхвата относительно всех направлений в R^n. По теореме 1, компакт E – устранимое множество для $(\mathcal{B}, \frac{n}{n-1})$ модуля в G. $\square$

Литература

1. П. А. Пугач, В. А. Шлык, *Обобщенные емкости и полиэдральные поверхности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **383** (2010), 148–178.
2. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *О достаточности семейства полиэдральных поверхностей в методе модулей и устранимые множества.* — Мат. заметки **90** (2011), 216–230.
3. В. В. Асеев, *NED-множества, лежащие в гиперплоскости.* — Сиб. мат. ж. **50** (2009), 967–986.
4. Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Достаточность семейства ломаных в методе модулей и устранимые множества.* — Сиб. мат. журн. **51** (2010), 1298–1315
5. L. I. Hedberg, *Removable singularities and condenser capacities.* — Ark. Mat. **12** (1974), 181–201.
6. И. Н. Демшин, В. А. Шлык, *Критерии устранимых множеств для весовых пространств гармонических функций.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 62–73.
7. B. Muckenhoupt, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal functions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **192** (1972), 207–226.
8. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions.* — GAKUTO International Series, Mathematical Sciences and Applications **19**, Gakkōtosho Co., Ltd, Tokyo, 2003.
9. В. А. Шлык, *Весовые емкости, модули конденсаторов и исключительные множества по Фюгледе.* — Докл. РАН **332** (1993), 428–431.
10. Л. К. Эванс, Р. Ф. Гариепи, *Теория меры и тонкие свойства функций.* Новосибирск, 2002.
11. В. М. Миклюков, *Введение в негладкий анализ.* Изд-во ВолГУ, Волгоград, 2008.
12. Э. Джусти, *Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации.* М., 1989.
13. E. De Giorgi, *Nuovi teoremi relativi alle misure $(r-1)$-dimensionali in uno spazio ad r dimensioni.* — Ricerche Mat. **4** (1955), 95–113.
14. W. P. Ziemer, *Weakly Differentiable Functions: Sobolev Spaces and Functions of Bounded Variation.* Springer-Verlag, New York, 1989
15. H. Aikawa, M. Ohtsuka, *Extremal length of vector measures.* — Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. **24** (1999), 61–88.
16. Г. Федерер, *Геометрическая теория меры.* М., 1987.

17. А. В. Сычев, *Модули и пространственные квазиконформные отображения.* Новосибирск, 1983.
18. В. А. Шлык, *Топологически устранимые компакты для пространственных квазиконформных отображений.* — Дальневосточный мат. сб. **1**, (1995), 63–67.

Pugach P. A., Shlyk V. A. Removable sets for the generalized module of surface's family.

Necessary and sufficient conditions for a set to be a removable set of the generalized module of a surface family are obtained and applied to sets of finite length.

Владивостокский филиал
Российской Таможенной Академии,
ул. Стрелковая, 16в,
690034 Владивосток, Россия
E-mail: 679097@mail.ru

Поступило 5 мая 2011 г.

Дальневосточный
государственный университет,
ул. Суханова, 8,
690950 Владивосток, Россия
E-mail: shlykva@yandex.ru