Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 392, 2011 г.

Н. В. Проскурин

О НУЛЯХ ДЗЕТА-ФУНКЦИИ ОДНОЙ ТЕРНАРНОЙ КВАДРАТИЧНОЙ ФОРМЫ

Пусть k — целое положительное число. Для $s \in \mathbb{C}$ с $\operatorname{Re} s > k/2$ положим

$$\zeta_k(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r_k(n)}{n^s},$$

где $r_k(n)$ число представлений n квадратичной формой $x_1^2 + \ldots + x_k^2$ над $\mathbb{Z}$, т.е. число решений уравнения $x_1^2 + \ldots + x_k^2 = n$ с $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{Z}$. Ряд в правой части сходится абсолютно и представляет аналитическую функцию в области $\operatorname{Re} s > k/2$. Так определённые функции ζ_k продолжаются аналитически на всю комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и известны как дзета-функции Эпштейна соответствующих квадратичных форм. Для каждого k, функция ζ_k голоморфна всюду, исключая точку $s = k/2$, а функция

$$s \mapsto \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta_k(s)$$

инвариантна относительно замены $s \mapsto k/2 - s$. В этой короткой заметке мы намерены сообщить о результатах наших вычислений нулей функции ζ_3, т.е. дзета-функции Эпштейна квадратичной формы $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$. Проблема распределения нулей функций ζ_k была рассмотрена Зигелем [1] . Однако, развитый в [1] метод не даёт ничего в случае $k = 3$. Заметим, прежде всего, что нетривиальные нули функции ζ_3 расположены на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ симметрично относительно вещественной прямой $\mathbb{R}$ и относительно критической прямой $\operatorname{Re} s = 3/4$. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением нулей, лежащих на полупрямой

$$\operatorname{Re} s = 3/4, \quad \operatorname{Im} s \geq 0, \tag{1}$$

и нулей, лежащих в квадранте

$$\operatorname{Re} s > 3/4, \quad \operatorname{Im} s \geq 0. \tag{2}$$

Наши вычисления показывают, что в пределах $0 \leq \operatorname{Im} s \leq 160000$ имеется 95794 нулей на полупрямой (1) и 202634 нуля в квадранте (2).

Ключевые слова: дзета-функция Эпштейна, распределение нулей.
Работа поддержана РФФИ, грант 11-01-00239-а.

Списки нулей можно найти на сайте `http://www.pdmi.ras.ru/~np`. Все вычисленные нули – простые. Определим $C(T)$ как число нулей функции ζ_3 на критической прямой $\operatorname{Re} s = 3/4$ под условием $0 < \operatorname{Im} s < T$. Вычисления показывают, что с ростом T отношение $C(T)/T$ постепенно стабилизируется вблизи точки 0.6. Пусть $N(T)$ – число всех нулей функции ζ_3 с мнимой частью от 0 до T. Известно, см. [2], что

$$N(T) = \frac{1}{\pi} T \log T - \frac{1}{\pi}(1 + \log \pi)T + O(\log T).$$

Нули функции ζ_3, лежащие в квадранте (2), занумеруем в порядке возрастания мнимой части – $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \ldots$. Для вещественных σ и T определим $N(\sigma, T)$ как число нулей ρ_n функции ζ_3 под условиями $\operatorname{Re} \rho_n > \sigma$ и $0 < \operatorname{Im} \rho < T$. Известно, что

$$N(\sigma, T) \ll T, \quad \text{если} \quad \sigma > 1, \tag{3}$$

и также

$$N(\sigma, T) \gg T \log T, \quad \text{если} \quad \sigma < 1. \tag{4}$$

Здесь $T \to \infty$ и постоянные в $\gg$ и в $\ll$ зависят только от σ. Оценка (3) является следствием теоремы о среднем квадратичном для ζ_3 (см. [2, II], теорема 2) и известного общего принципа (см. [3], 9.623). Оценка (4) получена в [4]. В пределах наших вычислений обнаруживается 6388 нулей, лежащих вне критической полосы, т.е. нулей ρ_n с $\operatorname{Re} \rho_n > 3/2$. Среди них наибольшую вещественную часть $1.80122487\ldots$ имеет нуль ρ_{43829}. Вычисления показывают, что отношение $N(3/2, T)/T$ близко к 0.04 и почти не меняется с ростом T. Ниже на рисунке изображена гистограмма распределения точек $\sigma_n = \operatorname{Re} \rho_n$. Для интервала $I \subset (3/4, \infty)$ и вещественного T определим $N_I(T)$ как число нулей ρ_n функции ζ_3 под условиями $\operatorname{Re} \rho_n \in I$ и $0 < \operatorname{Im} \rho < T$. Предположим, что для каждого компактного интервала $I \subset (3/4, 1)$ существует

$$\iota(I) = \lim_{T \to \infty} N_I(T)/T.$$

Если это предположение правильно (а оно хорошо согласуется с нашими вычислениями), то можно поставить вопрос о плотности меры ι относительно меры Лебега, т.е. о представлении

$$\iota(I) = \int_I f(x)\, dx$$

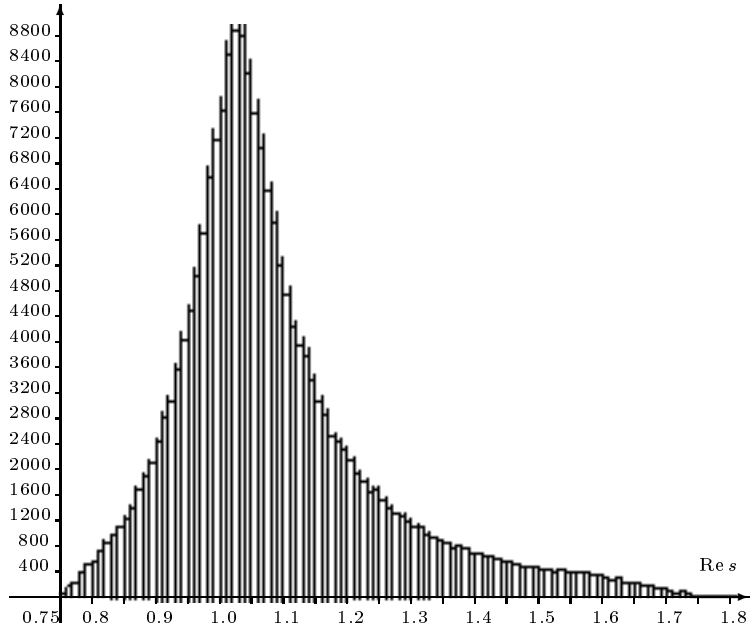

Рис. 1. Гистограмма распределения точек σ_1, σ_2, $\ldots, \sigma_{202634}$. Отрезок $[0.75, 1.81]$ разбит на 106 отрезков длины 0.01. Если $[a, b]$ – один из этих отрезков, то высота столбика над ним равна числу тех n, для которых $a < \sigma_n \leq b$.

с некоторой вещественной функцией f. Функция

$$x \mapsto -(x - 3/4)\log(1 - x)$$

выглядит как возможный "кандидат" на роль f (с точностью до нормирующего множителя). Наших вычислений, однако, не достаточно для того, чтобы определить функцию f с высокой степенью уверенности.

Литература

1. C. L. Siegel, *Contributions to the theory of the Dirichlet L-series and the Epstein zeta-functions.* — Ann. Math. **44** (1943), No. 2, 143–172.

2. О. М. Фоменко, *О дзета-функции Эпштейна*, I, II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **286** (2002), 169–178; **371** (2009), 157–170.
3. E. C. Titchmarsh, *The theory of functions*. Oxford University Press, 1939.
4. K. Ramachandra, A. Sankaranarayanan, *Hardy's theorem for zeta-functions of quadratic forms*. — Proc. Indian Acad. Sci. **106**, No. 3 (1996), 217–226.

Proskurin N. V. On the zeros of one ternary quadratic form zeta function.

The author reports on computation of the zeros of the Epstein zeta-function of the quadratic form $x^2 + y^2 + z^2$.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки, 27
Санкт-Петербург 191023,
Россия

E-mail: np@pdmi.ras.ru

Поступило 19 октября 2011 г.