Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 392, 2011 г.

Г. В. Кузьмина

ЗАДАЧИ О МАКСИМУМЕ ОДНОГО КОНФОРМНОГО ИНВАРИАНТА ПРИ НАЛИЧИИ ВЫСОКОЙ СТЕПЕНИ СИММЕТРИИ

К основным объектам исследования теории задач об экстремальном разбиении относится задача о максимуме взвешенной сумммы

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 M(D_k, a_k) \tag{1}$$

приведенных модулей $M(D_k, a_k)$ областей D_k) в семействе всех систем $D(\mathbf{a}) = \{D_1, \dots, D_n\}$ неналегающих односвязных областей D_k на $\overline{\mathbb{C}}$, удовлетворяющих условию $a_k \in D_k, k = 1, \dots, n$, где $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ – система различных точек; $\alpha = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ – система положительных чисел. Напомним, что $M(D, a) = \frac{1}{2\pi} \log R(D, a)$, где $R(D, a)$ – конформный радиус односвязной области D относительно точки $a \in D$, если $a \neq \infty, M(D, \infty) = -\frac{1}{2\pi} R(D, \infty)$. Максимум суммы (1) будем обозначать через $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n; \alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n; 1, \dots, 1)$ обозначаем через $\mathcal{M}(a_1, \dots, a_n)$. Классические результаты М. А. Лаврентьева, Г. М. Голузина и Л. И. Колбиной дают решение указанной задачи при $n = 2, 3$.

В настоящее время методом экстремальной метрики и методом симметризации получен ряд результатов общего характера в задаче о максимуме суммы (1) (см. [1–3]). Начало этим исследованиям положила работа В. Н. Дубинина (см. [2]), где показано, что для любых n точек на окружности $|z| = 1$ максимум суммы (1) в случае равных значений α_k достигается только для симметричной системы точек.

Задача о максимуме того или иного конформного инварианта, содержащего сумму (1) и взвешенную сумму $\log |a_k - a_l|$, для всех систем точек $\mathbf{a} = \{a_1, \dots, a_n\}$ и всех систем областей $D(\mathbf{a})$ оказывается достаточно сложной (имеется ввиду инвариантность относительно группы Γ дробно-линейных автоморфизмов z-сферы). К немногим исследованиям в этом направлении относятся работы [4, 5].

Ключевые слова: приведенный модуль области, конформный радиус области, конформный инвариант.

Что касается задачи о максимуме функционала

$$J(a_1,\dots,a_n) = 2\pi M(a_1,\dots,a_n) - \frac{2}{n-1}\log\prod_{1\le k<l\le n}|a_k - a_l| \qquad (2)$$

для всех систем точек $a_1,\dots,a_n$, то продвижением в этом вопросе после результатов М. А. Лаврентьева и Г. М. Голузина стало решение этой задачи при $n = 4$ [6, 7], при $n = 5$ задача решена лишь при соответствующих дополнительных предположениях [8, 3]. Максимум величины (2) будем обозначать через J_n.

В силу трудности последней задачи для больших значений n естественно рассматривать системы точек $a_1,\dots,a_n$, обладающие достаточно высокой степенью симметрии.

В данной работе, являющейся первоначальным исследованием в этом вопросе, находится максимум функционала (2) для некоторых систем точек $a_1,\dots,a_n$ общего вида. Сравнение значений функционала (2) для этих систем точек позволяет исключить из рассмотрения некоторые допустимые кофигурации задачи о J_n.

§1

Пусть $n = 2m \ge 6$, $0 < r < 1$, $0 < \alpha \le \pi/m$, $\omega = e^{2i\pi/m}$. Пусть $\{a_1, a_2, \dots, a_{2m}\}$ – система точек, равномерно распределенных на окружностях $|z| = r$ и $|z| = 1/r$:

$$a_1 = 1/r,\quad a_2 = re^{i\alpha},\quad a_3 = \omega/r,\dots,a_{2m-1} = \omega^{m-1}/r,\quad a_{2m} = r\omega^{m-1}e^{i\alpha}.$$

Функционал (2) для указанной системы точек обозначим через $J_{2m}(\alpha, r)$. Через $E(0, e^{i\beta}, e^{-i\beta})$ обозначаем континуум наименьшей емкости, $c(\beta)$ – общая точка трех вналитических дуг, образующих этот континуум при $0 < \beta < \pi/2$.

Теорема 1. *При указанных выше условиях справедливо неравенство*

$$J_{2m}(\alpha, r) \le J^*_{2m}(\pi/2, r_m), \qquad (3)$$

где

$$J^*_{2m}(\pi/2, r_m) = \frac{2m}{2m-1}\big\{-2m\log m - \log 2 - (2m-1)\log H(\beta_m) + \log\sin\beta_m\big\}.$$

Здесь β_m, r_m *– решение системы уравнений*

$$c(\beta) = \frac{2(m-1)}{2m-1}\cos\beta, \quad \frac{2r^m}{1+r^{2m}} = \sin\beta.$$

При $m = 3$ $\quad J^*_{2m}(\pi/2, r_m) = -3,272\ldots.$

Доказательство. Рассматриваемая система точек переходит в себя при преобразованиях

$$z \to \omega z, \quad z \to e^{i\alpha}/z,$$

и из результатов единственности метода экстремальной метрики следует, что экстремальная система областей $D_1, \ldots, D_{2m}$ данной задачи обладает соответствующей симметрией. Отсюда следует, что выполняются условия

$$R(D_1, a_1) = R(D_3, a_3) = \cdots = R(D_{2m-1}, a_{2m-1}),$$
$$R(D_2, a_2) = R(D_4, a_4) = \cdots = R(D_{2m}, a_{2m}),$$

следовательно,

$$\prod_{k=1}^{2m} R(D_k, a_k) = \{R(D_1, a_1)R(D_2, a_2)\}^m. \tag{4}$$

Пусть S_k, $k = 1, \ldots, m$, – угол с вершиной в начале координат раствора $2\pi/m$, стороны которого содержат точки $a_{2k-1} = \omega^{k-1}$ и $a_{2k+1} = \omega^k$. При отображении

$$w = f_k(z) = \{\omega^{-(k-1)}z\}^{m/2}$$

углу S_k соответствует верхняя полуплоскость $\Im w < 0$, точкам a_{2k-1}, a_{2k}, a_{2k+1}, a_{2k+2} – точки $b_1 = 1/r_1$, $b_2 = r_1 e^{i\alpha_1}$, $b_3 = -1/r_1$, $b_4 = -r_1 e^{i\alpha_1}$, где

$$r_1 = r^{m/2}, \quad \alpha_1 = m\alpha/2,$$

а области D_{2k-1}, D_{2k}, D_{2k+1}, D_{2k+2} переходят в четверку областей B_1, B_2, B_3, B_4, содержащих соответственно указанные точки,

$$R(D_{2k-1}, a_{2k-1})R(D_{2k}, a_{2k}) = \frac{4}{m^2}R(B_1, b_1)R(B_2, b_2). \tag{5}$$

Обратимся к задаче о максимуме произведения

$$F_4 = \prod_{k=1}^{4} R(B_k, b_k)$$

в семействе всех четверок B_1, B_2, B_3, B_4 неналегающих односвязных областей на w-сфере, содержащих соответственно точки четверки b_1, b_2, b_3, b_4 с заданным ангармоническим отношением. Пусть λ – ангармоническое отношение рассматриваемой четверки точек:

$$\lambda = \left(\frac{1 - r_1^2 e^{i\alpha_1}}{1 + r_1^2 e^{i\alpha_1}}\right)^2.$$

По теореме в [6], устанавливающей максимум соответствующего конформного инварианта для всех четверок точек, обладающих заданным ангармоническим отношением, имеем неравенство

$$\begin{aligned} \log F_4 &= 2\log\{R(B_1, 1/r_1)R(B_2, r_1 e^{i\alpha_1})\} \\ &\le \log\{4^{-10/3}|1 - a^2|^{4/3}\operatorname{cap}^{-4} E(-1, 1, a)\} \\ &+ \frac{2}{3}\log\left\{\frac{4}{r_1^4}(1 - 2r_1^4\cos 2\alpha_1 + r_1^8)\right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

где

$$a = \frac{\lambda + 1}{\lambda - 1} = -\frac{1 + r_1^4 e^{2i\alpha_1}}{2r_1^2 e^{i\alpha_1}},$$

$$a + 1 = -\frac{1}{2r_1^2} e^{-i\alpha_1}\left(1 - r_1^2 e^{i\alpha_1}\right)^2,$$

$$a - 1 = -\frac{1}{2r_1^2} e^{-i\alpha_1}\left(1 + r_1^2 e^{i\alpha_1}\right)^2,$$

$E(-1, 1, a)$ – континуум наименьшей емкости, содержащий точки $-1, 1, a$. Имеем

$$|1 - a^2|^{1/2} \le \frac{1}{2}(|1 + a| + |1 - a|) \le \frac{1}{2r_1^2}(1 + r_1^4).$$

Положим

$$\sin\beta = \frac{2r_1^2}{1 + r_1^4}, \quad \rho = \frac{1 + r_1^4}{2r_1^2} = \frac{1}{\sin\beta}.$$

В силу известного результата теории емкости, емкость континуума $E(-1, 1, a)$ при движении точки a по дуге эллипса $\{a : |a+1| + |a-1| = 2\rho\}$ от точки пересечения этого эллипса с положительной вещественной полуосью до точки его пересечения с положительной мнимой полуосью монотонно убывает и минимум емкости достигается в точке $a = i\sqrt{\rho^2 - 1}$. Следовательно, справедливо неравенство

$$\operatorname{cap} E(-1, 1, a) \ge \operatorname{cap} E(-1, 1, i\sqrt{\rho^2 - 1} = \rho \operatorname{cap} E(0, e^{-i\beta}, e^{i\beta}) := \rho H(\beta).$$

Полагая $\operatorname{cap} E(0, e^{-i\beta}, e^{i\beta}) = H(\beta)$, получаем

$$|1-a^2|^{4/3}\operatorname{cap}^{-4}E(-1,1,a) \le \rho^{8/3-4}H^{-4}(\beta) = \left\{\frac{\sin^{1/3}(\beta)}{H(\beta)}^4\right\} := \phi^4(\beta).$$

В силу симметрии в расположении точек a_k,

$$\begin{aligned}\prod_{k\ne l}|a_k-a_l| &= \left\{\prod_{k=2}^{2m} a_1-a_k| \times \prod_{l=1,l\ne 2}^{2m}|a_2-a_l|\right\}^m\\ &= \left\{\prod_{k=1}^{m-1}|1/r-\omega^k/r| \times \prod_{k=1}^{m}|1/r-\omega^k re^{i\alpha}|\right.\\ &\left.\times \prod_{k=1}^{m}|re^{i\alpha}-\omega^k/r| \times \prod_{k=1}^{m-1}|re^{i\alpha}-\omega^k re^{i\alpha}|\right\}^m\\ &= \{m^2/r^{2m}(1-2r^{2m}\cos m\alpha + r^{4m})\}^m,\end{aligned}$$

следовательно,

$$\log\prod_{1\le k<l\le 2m} = \frac{1}{2}m\log\left\{\frac{m^2}{r_1^4}(1-2r_1^4\cos 2\alpha_1 + r_1^8)\right\}.$$

Из (4), (5), (6) и последнего равенства находим

$$\begin{aligned}J_{2m}(\alpha,r) &\le m\log\left\{\frac{4}{m^2}R(B_1,1/r_1)R(B_2,r_1e^{i\alpha_1})\right\}\\ &- \frac{m}{2m-1}\log\left\{\frac{m^2}{r_1^4}(1-2r_1^4\cos 2\alpha_1+r_1^8)\right\}\\ &\le \frac{m}{2}\left[2\log\frac{4}{m^2} + \log\{4^{-10/3}\phi^4(\beta)\}\right.\\ &\left.+ 2/3\log\left\{\frac{4}{r_1^4}\big(1-2r_1^4\cos 2\alpha_1+r_1^8\big)\right\}\right]\\ &- \frac{m}{2m-1}\log\left\{\frac{m^2}{r_1^4}\big(1-2r_1^4\cos 2\alpha_1+r_1^8\big)\right\}.\end{aligned}$$

Максимум правой части последнего неравенства достигается при $\alpha = \pi/2$:

$$J_{2m}(\alpha, r) \le \frac{m}{2}\log\left\{4^{-10/3}\phi^4(\beta)\right\} + m/3\log\left\{\frac{4}{r_1^4}\left(1+r_1^4\right)^2\right\}$$
$$- \frac{m}{2m-1}\log\left\{\frac{m^2}{r_1^4}\left(1+r_1^4\right)^2\right\} + m\log\frac{4}{m^2}$$
$$= 2m\left\{\log\{\phi(\beta)\} - \frac{2m}{2m-1}\log m - \frac{2m(m-2)}{3(2m-1)}\log\sin\beta - \frac{1}{2m-1}\log 2\right\}.$$

Используя формулу для производной $\frac{d}{d\beta}H(\beta)$ в [9], находим

$$\frac{d}{d\beta}\log\phi(\beta) = \frac{c(\beta) - \frac{2}{3}\cos\beta}{\sin\beta},$$

где $c(\beta)$ – общая точка трех дуг, образующих континуум $E(0, e^{-i\beta}, e^{i\beta})$ при $0 < \beta < \pi/2$. Обозначая выражение в правой части последнего равенства через $F_m(\beta)$, находим

$$\frac{dF_m}{d\beta} = 2m\frac{c(\beta) - \frac{2}{3}\cos\beta}{\sin\beta} - \frac{4m(m-2)\cos\beta}{3(2m-1)\sin\beta}$$
$$= \frac{2m}{\sin\beta}\left(c(\beta) - \frac{2(m-1)\cos\beta}{2m-1}\right).$$

Как показано в [9], уравнение $c(\beta) - k\cos\beta = 0$ имеет единственное решение при любом $0 \le k \le 1$.

Следовательно, максимум функционала $J_{2m}(\alpha, r)$ достигается в случае, указанном в формулировке теоремы, и только в этом случае, и справедливо неравенство (3).

Из условий, определяющих величину $c(\beta)$ и емкость $H(\beta) = \operatorname{cap} E(0, e^{i\beta}, E^{-i\beta})$ (см. [9, теорема 1.5]), находим значение $J_{2m}(\pi/2, r_m)$ при $m = 3$. □

Замечание 1. Приведенное доказательство теоремы 1 существенно использует теорему в [6].

Альтернативное доказательство теоремы 1 основывается на рассмотрении ассоциированного квадратичного дифференциала исследуемой задачи, аналитическое выражение для этого дифференциала легко устанавливается при помощи соображений симметрии. Таким

путем устанавливается прямая связь данной задачи с задачей о емкости $H(\beta) = \mathrm{cap}E(0, e^{i\beta}, e^{-i\beta})$. Требуемое свойство емкости устанавливается при помощи градиентной теоремы о зависимости модуля экстремально- метрической проблемы от простого полюса ассоциированного квадратичного дифференциала (см. [10, 11]).

Рассуждения доказательства теоремы 1 распространяются на случаи $r = 1$ и $\alpha = 0$. Имеем два следствия.

Следствие 1. *При всех $n = 2m \geq 6$, $0 < r \leq 1$, $0 < \alpha \leq \frac{\pi}{m}$ справедливо строгое неравенство*

$$J_{2m}(\alpha, 1) < J^*_{2m}\left(\frac{\pi}{m}, r_m\right).$$

Таким образом, при всех $2m \geq 4$ система $2m$ точек $a_k = e^{i\pi k/m}$, $k = 0, \ldots, 2m-1$, симметрично расположенных на окружности $|z| = 1$, не реализует максимума J_{2m} функционала (2).

Следствие 2. *При любых $2m \geq 6$ и $0 < r < 1$ справедливо строгое неравенство*

$$J_{2m}(0, r) < J^*_{2m}\left(\frac{\pi}{m}, r_m\right).$$

Таким образом, система $2m$ точек, являющихся точками пересечения m лучей, выходящих их начала координат под равными углами друг к другу, с окружностями $|z| = r$ и $|z| = 1/r$, не реализует максимума функционала (2).

§2

Пусть $n = 2m + 2 \geq 6$, $\omega = e^{2i\pi/m}$, $0 < \lambda \leq 1/2m$, $\alpha = 2\pi\lambda$. Пусть $\mathbf{a} = \{a_1, \ldots, a_{2m}, 0, \infty\}$, где $\{a_1, \ldots, a_{2m-1}\}$ и $\{a_2, \ldots, a_{2m}\}$ – системы равноотстоящих точек окружности $|z| = 1$:

$$a_1 = 1, \ldots, a_{2m-1} = \omega^{m-1}; \quad a_2 = e^{i\alpha}, \ldots, a_{2m} = e^{i\alpha}\omega^{m-1}.$$

Функционал (2) для указанных систем точек $\mathbf{a}$ обозначим через $J_n(\alpha)$.

Теорема 2. *Пусть $n = 2m + 2 \leq 6$, $\quad 0 < \alpha \leq \pi/m$. Имеет место неравенство*

$$J_n(\alpha) \leq J^*_n(\pi/m),$$

где

$$J_n^*(\pi/m) = -\frac{1}{m}\big\{(m-1)^2\log(m-1) + (m+1)^2\log(m+1)\big\} - \frac{2m}{2m+1}\big\{\log m - 2m\log 2\big\}.$$

При $m = 2$ *имеем* $J_6^*(\pi/2) = -3.2802$.

Экстремальной системой областей данной задачи служит система круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q(z)dz^2 = -\frac{1}{4\pi^2}\,\frac{(z^{2m}+\kappa^{2m})(z^{2m}+1/\kappa^{2m})dz^2}{z^2(z^{2m}-1)^2},$$

где

$$\kappa^m + 1/\kappa^m = 2m.$$

Доказательство. Следуем экстремально-метрическому подходу, неоднократно использованному при решении задач об экстремальном разбиении. Пусть S_{2k-1} и S_{2k}, $k = 1,\dots,m$, – углы, ограниченные лучами, выходящими из начала координат и проходящими соответственно через точки a_{2k-1}, a_{2k} и точки a_{2k}, a_{2k+1}. При отображении

$$w_1 = \left(\frac{z}{a_{2k-1}}\right)^{1/2\lambda} \tag{7}$$

углу S_{2k-1} соответствует верхняя полуплоскость $\Im w_1 > 0$ w_1-плоскости, а точкам $a_{2k-1}, 0$, a_{2k}, ∞ – точки $1, 0$, -1, ∞. На w_1-сфере рассмотрим экстремальную конфигурацию задачи о $\mathcal{M}(1, 0, -1, \infty; 1, 2\lambda, 1, 2\lambda)$. Эта конфигурация образуется системой круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q_1(w_1)dw_1^2 = -\frac{4\lambda^2}{4\pi^2}\,\frac{(w_1^2-\kappa_1^2)(w_1^2-1/\kappa_1^2)dw_1^2}{w_1^2(w_1^2-1)^2}, \tag{8}$$

нули которого $\pm\kappa_1$, $\pm 1/\kappa_1$ определяются условием

$$\kappa_1^2 + 1/\kappa_1^2 = 2 - 1/\lambda^2.$$

Аналогично, при отображении

$$w_2 = \left(\frac{z}{a_{2k}}\right)^{1/(2/m-2\lambda)} \tag{9}$$

углу S_{2k} соответствует верхняя полуплоскость $\Im w_2 > 0$, а точкам $a_{2k}, 0, a_{2k+1}, \infty$ – точки $1, 0, -1, \infty$. На w_2-сфере рассмотрим экстремальную конфигурацию задачи о $\mathcal{M}(1, 0, -1, \infty; 1, \frac{2}{m} - 2\lambda, 1, \frac{2}{m} - 2\lambda)$.

Эта конфигурация образуется системой круговых областей квадратичного дифференциала

$$Q_2(w_2)dw_2^2 = -\frac{(\frac{2}{m}-2\lambda)^2}{4\pi^2}\ \frac{(w_2^2-\kappa_2^2)(w_2^2-1/\kappa^2)dw_2}{w_2^2(w_2^2-1)^2}, \tag{10}$$

где

$$\kappa_2^2 + 1/\kappa_2^2 = 2 - \frac{1}{(\frac{1}{m}-\lambda)^2}.$$

Структура траекторий и ортогональных траекторий дифференциалов (8) и (10) весьма проста. Так, система полосообразных областей дифференциала $-Q_1(w_1)dw_1^2$ симметрична относительно вещественной оси w_1-плоскости и эта ось представляет собой объединение замыканий ортогональных траекторий дифференциала (8), являющихся линиями симметрии для полосообразных областей дифференциала $-Q_1(w_1)dw_1^2$. Тем же свойством обладает дифференциал (10).

Метрика $|Q_1(w_1)|^{1/2}|dw_1|$ является экстремальной метрикой проблемы модуля $\mathcal{M}(1,0,-1,\infty;1,2\lambda,1,2\lambda)$, метрика $|Q_2(w_2)|^{1/2}|dw_1|$ – экстремальной метрикой проблемы модуля $\mathcal{M}(1,0,-1,\infty;-1,\frac{2}{m}-2\lambda,1,\frac{2}{m}-2\lambda)$. Посредством отображений (7) и (9) эти Q_j-метрики индуцируют метрики соответственно в углах S_{2k-1} и $S_{2k}, k=1,\dots,m$, на z-сфере.

Положим

$$\rho(z)|dz| = \begin{cases} |Q_1(f_{2k-1}(z)|^{1/2}|f_{2k-1}(z)'|\,|dz|, & z\in S_{2k-1},\\ |Q_2(f_{2k}(z)|^{1/2}|f_{2k}(z)'|\,|dz|, & z\in S_{2k};\quad k=1,\dots,m.\end{cases}$$

Метрика $\rho(z)|dz|$ является допустимой метрикой проблемы модуля $\mathcal{M}(a_1,a_2,\dots,a_{2m},0,\infty;1,1,\dots,1)$. Действительно, из отмеченной выше структуры ортогональных траекторий дифференциалов (8) и (10) следует, что каждая кривая, гомотопная точечной кривой в одной из точек $a_1,a_2,\dots,a_m,0,\infty$, имеет в ρ-метрике длину ≥ 1. Учитывая изменение приведенного модуля области при конформном гомеоморфизме, отсюда получаем неравенство ($\mathcal{M}(a_1,a_2,\dots,a_{2m};0,\infty;1,1,\dots,1)$ обозначаем через $M(\alpha)$, λ и $1/m-\lambda$ обозначаем через λ_1 и λ_2):

$$\begin{aligned} M(\alpha) \leq m\{&\pi M(-1,0,1,\infty;1,2\lambda_1,1,2\lambda_1)+\log 2\lambda_1\\ &+\pi M(-1,0,1,\infty;1,2\lambda_2,1,2\lambda_2)+\log 2\lambda_2\}.\end{aligned}$$

Наконец, используя очевидное тождество

$$\pi M(-1,1,0,\infty;1,1,2\lambda,2\lambda) = 2\pi M(1,0,\infty;1,\lambda,\lambda)-\log 2,$$

приходим к следующему неравенству для $M(\alpha)$:

$$M(\alpha) \le m\{2\pi M(1,0,\infty;1,\lambda_1,\lambda_1) + \log\lambda_1 \\ + 2\pi M(1,0,\infty;1,\lambda_2,\lambda_2) + \log\lambda_2\}.$$

Используя выражение для $M(1,0,\infty;1,\lambda,\lambda)$, следующее из хорошо известного результата Л. И. Колбиной [12], получаем неравенство

$$M(\alpha) \le m\left\{g(\lambda) + g\left(\frac{1}{m} - \lambda\right)\right\}, \tag{11}$$

где

$$g(\lambda) = -\frac{1}{2}\big\{(1-2\lambda)^2\log(1-2\lambda) + (1+2\lambda)^2\log(1+2\lambda) - 8\lambda^2\log 2\lambda - 2\log 4\lambda\big\}.$$

В силу симметрии в расположении точек a_k,

$$\prod_{k\ne l}|a_k - a_l| = \left\{\prod_{k=2}^{2m}|a_1 - a_k| \times \prod_{l=1,l\ne 2}^{2m}|a_2 - a_l|\right\}^m$$

$$= \left\{\prod_{k=1}^{m-1}|1-\omega^k| \times \prod_{k=1}^{m}|1-\omega^k e^{i\alpha}| \times \prod_{k=1}^{m}|e^{i\alpha}-\omega^k| \times \prod_{k=1}^{m-1}|e^{i\alpha}-e^{i\alpha}\omega^k|\right\}^m$$

$$= \{m^2|1-e^{im\alpha}|^2\}^m = \left\{2m\sin\frac{m\alpha}{2}\right\}^{2m},$$

откуда

$$\log\prod_{1\le k,l\le 2m,\quad k\ne l}|a_k - a_l| = 2m\log\left\{2m\sin\frac{m\alpha}{2}\right\}. \tag{12}$$

Из (11) и (12) получаем

$$J_n(\alpha) \le m\left\{g\left(\lambda) + g(\frac{1}{m} - \lambda\right)\right\} - \frac{2m}{2m+1}\log 2m\sin(m\pi\lambda).$$

Максимум правой части последнего равенства достигается при $\lambda = 1/2m$, т.е. при $\alpha = \pi/m$:

$$J_n(\alpha) \le J_n^*(\pi/m) = 2mg\left(\frac{1}{2m}\right) - \frac{2m}{2m+1}\log 2m,$$

и равенство достигается только в указанном случае, что и доказывает утверждение теоремы. □

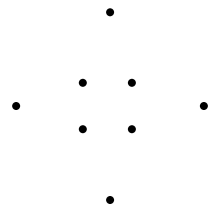

Рис. 1

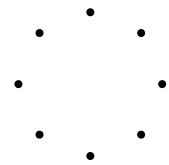

Рис. 2

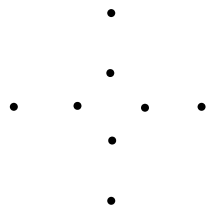

Рис. 3

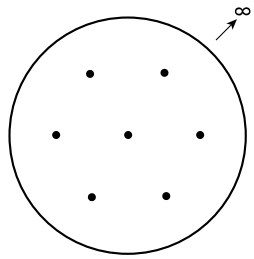

Рис. 4

Замечание 2. Как показывают теоремы 1 и 2, экстремальные конфигурации этих теорем удовлетворяют неравенству

$$J_6^*(\pi/2) < J_6^*(\pi/2, r_3),$$

следовательно, при $n = 6$ экстремальная конфигурация теоремы 2 не реализует максимума J_6 функционала (2).

В дополнение к теореме 2 отметим, что значение функционала (2) для системы точек $\{\pm 1, \pm ih, 0, \infty\}$, где $h > 0$, не превосходит максимума $J_6^*(\pi/2)$ теоремы 2. Действительно, указанная система точек Г-эквивалентна системе $\{\pm 1, e^{\pm i\gamma}, 0, \infty\}$, где $0 < \gamma < \pi$, и рассуждение, аналогичное доказательству теоремы 2, показывает, что максимум функционала (2) для последней системы достигается при $\gamma = \pi/2$, т.е.равен максимуму $J_6^*(\pi/2)$ теоремы 2.

Экстремальные системы точек теоремы 1, следствия 1, следствия 2 и теоремы 2 при $n = 8$ изображены соответственно на рис. 1, 2, 3 и 4.

Литература

1. Г. В. Кузьмина, *Методы геометрической теории функций.* — Алгебра и анализ **9** (1997), вып. 5, 1–50.
2. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* — Успехи мат. наук **49** (1994), 13–76.
3. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Владивосток, 2009.
4. Е. Г. Емельянов, *К задаче о максимуме произведения степеней конформных радиусов неналегающих областей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2002), 103–114.
5. Е. Г. Емельянов, *Конформно-инвариантные функционалы на римановой сфере.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 134–154.
6. Г. В. Кузьмина, *К задаче о максимуме произведения конформных радиусов неналегающих областей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **100** (1980), 131–145.
7. С. И. Федоров, *О максимуме одного конформного инварианта в задаче о неналегающих областях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **112** (1981), 172–183.
8. Г. В. Кузьмина, *К вопросу об экстремальном разбиении римановой сферы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **185** (1990), 72–95.
9. Г. В. Кузьмина, *Модули семейств кривых и квадратичные дифференциалы.* — Труды Мат ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР **139** (1980), 1–243.
10. Е. Г. Емельянов, *К задачам об экстремальном разбиении.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **154** (1986), 76–89.
11. А. Ю. Солынин, *Модули и экстремально-метрические проблемы.* — Алгебра и анализ **11** (1999), вып. 1, 3–86.
12. Л. И. Колбина, *Некоторые экстремальные задачи в конформном отображении.* — Докл. АН СССР **84** (1952), 865–868.

Kuz'mina G. V. Problems on the maximum of a conformal invariant in the presence of a high degree of symmetry.

The problem on the maximum of the conformal invariant

$$2\pi\sum_{k=1}^{n} M(D_k, a_k) - \frac{2}{n-1}\prod_{1\le k<l\le n}|a_k - a_l|,$$

for all systems of points $\{a_1,\dots,a_n\}$ and all systems $\{D_1,\dots,D_n\}$ of nonoverlapping simply connected domains satisfying the condition $a_k \in D_k$, $k = 1,\dots,n$, is investigated. Here $M(D,a)$ is the reduced module of a domain D with respect to a point $a \in D$. It is assumed that n is even

and systems of points $a_1, \ldots, a_n$ under consideration have a high degree of symmetry.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: kuzmina@pdmi.ras.ru

Поступило 30 сентября 2011 г.