Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 392, 2011 г.

**Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык**

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЕМКОСТИ И МОДУЛЯ ПОЛИКОНДЕНСАТОРА И УСТРАНИМЫЕ МНОЖЕСТВА

В данной работе доказаны непрерывность модуля поликонденсатора и равенство ёмкости поликонденсатора и модуля семейства ломаных, соединяющих соответствующие пластины поликонденсатора. Также доказано, что $NC_{p,w}$-множества не влияют на емкость поликонденсатора.

Пусть $G$ – открытое множество в $R^n$. Для произвольного измеримого по Лебегу множества $F \subset R^n$ обозначим через $|F|$ его $n$-мерную меру Лебега; $A_p$ – класс локально интегрируемых функций $w : R^n \to (0, +\infty)$, удовлетворяющих условию Макенхаупта

$$\sup \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w\,dx \left( \frac{1}{|Q|} \int\limits_Q w^{1-q}\,dx \right)^{p-1} < \infty,$$

где супремум берется по всем координатным кубам $Q \subset R^n$, $p, q \in (1, +\infty)$ и $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Обозначим через $L^{p,w}(D)$, где $D$ — открытое множество в $R^n$, класс функций $f : D \to [-\infty, +\infty]$, для которых

$$\|f\|_{p,w} = \left( \int\limits_D |f|^p w\,dx \right)^{1/p} < \infty.$$

Через $L^{p,w}_+(D)$ обозначим класс борелевских функций $f : D \to [0, +\infty]$, $f \in L^{p,w}(D)$.

Пусть $B(x, r)$ – открытый шар с центром в точке $x \in R^n$ радиуса $r > 0$. Определим максимальную функцию

$$Mf(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int\limits_{B(x,r)} |f(y)|\,dy$$

---

*Ключевые слова*: поликонденсатор, емкость поликонденсатора, модуль поликонденсатора, устранимое множество.

Работа выполнена при финансовой поддержке ведущих научных школ РФ (грант НШ–2810-2008.1), РФФИ (грант 08-01-000 28) и ДВО РАН (грант 06-III-A-01-013).

для локально интегрируемой в $R^n$ функции $f$.

Известно (см. [5, Теорема 5.1.1]), что

$$\|Mf(x)\|_{p,w} \leq \mathrm{const}\, \|f\|_{p,w}.$$

Пусть $d(E,F)$, $d(E)$ обозначают соответственно евклидово расстояние между множествами $E$ и $F$, евклидов диаметр $E$ для $E, F \subset R^n$, и пусть $\bar{E}$ – замыкание множества $E$ в топологии $R^n$, $\partial E$ – граница множества $E$.

Для весовой функции $w \in A_p$ обозначим через $L^1_{p,w}(G)$ пространство функций $u : G \to (-\infty, +\infty)$, локально интегрируемых на $G$, имеющих в $G$ обобщённые частные производные и таких, что

$$\|u\|^p_{L^1_{p,w}(G)} = \int\limits_G |\nabla u|^p w\, dx < \infty.$$

Конденсатором назовём набор множеств $\big(F_0, F_1, G\big)$, где $F_0, F_1$ – непустые непересекающиеся компакты на $G$. Определим $(p,w)$-ёмкость с весом $w \in A_p$ конденсатора $\big(F_0, F_1, G\big)$ равенством

$$C_{p,w}\big(F_0, F_1, G\big) = \inf_u \int\limits_G |\nabla u|^p w\, dx,$$

где инфимум берётся по всем функциям $u$ таким, что $u \in L^1_{p,w}(G)$; $u = j$ в некоторой окрестности компакта $F_j$, $j = 0, 1$. Класс всех таких допустимых функций обозначим через $\mathrm{Adm}_{p,w}\big(F_0, F_1, G\big)$.

Кривой в $R^n$ назовём образ числового интервала или отрезка при непрерывном отображении его в $R^n$.

Пусть дано некоторое семейство $\Gamma$ кривых в $R^n$. Определим $(p,w)$-модуль с весом $w \in A_p$ семейства $\Gamma$ следующим образом:

$$m_{p,w}(\Gamma) = \inf_\rho \int\limits_{R^n} \rho^p w\, dx,$$

где инфимум берётся по всем борелевским функциям $\rho : [0, +\infty]$ таким, что $\int\limits_\gamma \rho\, d\mathcal{H}_1 \geq 1$ для всех кривых $\gamma \in \Gamma$. Здесь $\mathcal{H}_1$ — одномерная мера Хаусдорфа. Если кривая спрямляема, то $d\mathcal{H}_1$ можно заменить на $ds$. Класс всех таких допустимых функций (допустимых метрик) обозначим через $\mathrm{adm}_{p,w}(\Gamma)$.

Будем говорить, что кривая $\gamma : (a,b) \to R^n$ соединяет множества $A$ и $B$, если $\gamma(x) \to x_0 \in A$ при $x \to a$ и $\gamma(x) \to x_1 \in B$ при $x \to b$.

Назовём поликонденсатором конструкцию

$$(\mathcal{F}, G) = \{(F_{01}, F_{11}), \dots, (F_{0m}, F_{1m}), G\},$$

где $F_{ik}$ – замкнутые множества, удовлетворяющие условию $F_{0k} \cap F_{1k} = \varnothing$ для любого $k = 1, 2, \dots, m$.

Для поликонденсатора $(\mathcal{F}, G)$ через $\Gamma(\mathcal{F}, G)$ обозначим семейство всех кривых $\gamma \subset G$, соединяющих $F_{0k}$ и $F_{1k}$, $k = 1, 2, \dots, m$. Тогда $(p, w)$-модуль поликонденсатора с весом $w \in A_p$ определим с помощью равенства $m_{p,w}(\mathcal{F}, G) = m_{p,w}(\Gamma(\mathcal{F}, G))$.

Положим

$$\operatorname{adm}_{p,w}\bigl(F_0, F_1, G\bigr) = \operatorname{adm}_{p,w}\bigl(\Gamma\bigl(F_0, F_1, G\bigr)\bigr).$$

Определим $(p, w)$-модуль поликонденсатора с весом $w \in A_p$ равенством

$$m_{p,w}(\mathcal{F}, G) = \inf_{\rho} \int\limits_G \rho^p w \, dx,$$

где инфимум берётся по всем $\rho \in \operatorname{adm}_{p,w}(\mathcal{F}, G)$.

Семейство всех ломаных $\gamma \in \Gamma\bigl(\mathcal{F}, G\bigr)$ таких, что для любых окрестностей $U$ компакта $\bigcup\limits_{k=1}^{m} \bigl(F_{0k} \cup F_{1k}\bigr)$ пересечение $\gamma \cap (G \setminus U)$ содержится в объединении конечного числа звеньев ломаной $\gamma$, обозначим через $\Gamma^0\bigl(\mathcal{F}, G\bigr)$. Положим

$$\operatorname{adm}_{p,w}\bigl(\Gamma^0\bigl(\mathcal{F}, G\bigr)\bigr) = \operatorname{adm}^0_{p,w}\bigl(\mathcal{F}, G\bigr),$$
$$m_{p,w}\bigl(\Gamma^0\bigl(\mathcal{F}, G\bigr)\bigr) = m^0_{p,w}\bigl(\mathcal{F}, G\bigr).$$

Пусть

$$m^0_{p,w}(\mathcal{F}, G) = \inf_{\rho} \int\limits_G \rho^p w \, dx,$$

где инфимум берётся по всем $\rho \in \operatorname{adm}^0_{p,w}(\mathcal{F}, G)$. Определим $(p, w)$-ёмкость поликонденсатора с весом $w \in A_p$:

$$C_{p,w}(\mathcal{F}, G) = \inf_{u} \int\limits_G \max_k |\nabla u_k|^p w \, dx,$$

где инфимум берётся по всем наборам

$$u = (u_1, \dots, u_m), \quad u_k \in \operatorname{Adm}_{p,w}\bigl(F_{0k}, F_{1k}, G\bigr), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Такой набор назовём допустимым для поликонденсатора $(\mathcal{F}, G)$.

Компактное множество $E$ назовём $NC_{p,w}$-множеством, если для любого координатного прямоугольника $\Pi$, $\bar{\Pi} \subset G$, выполняется равенство

$$m_{p,w}\big(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi \setminus E\big) = m_{p,w}\big(\sigma_{0i}, \sigma_{1i}, \Pi\big), \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Назовем функцию кусочно-линейной на множестве $G$, если для любого открытого множества $D$, $\bar{D} \subset G$, её график в $D$ состоит из конечного числа частей гиперплоскостей.

**Лемма 1.** *Существует функция $\alpha(x)$, кусочно-линейная на $G$ и удовлетворяющая условиям: $0 < \alpha(x) < 1$, $\alpha(x) < d(x, \partial G)/2$, $|\nabla\alpha(x)| < 1$ в точках ее дифференцируемости.*

**Доказательство.** Аппроксимируем $G$ последовательностью ограниченных открытых множеств $G_k$ таких, что $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = G$. $\overline{G_{k+1}} \subset G_k$, $k = 1, 2, \ldots$. Для единообразия рассуждений положим $G_0 = G_{-1} = \varnothing$.

При $k \geq 1$ можно построить функцию $\alpha_k$, график которой в $G_{k+1} \cap (G \setminus G_{k-2})$ состоит из конечного числа гиперплоскостей и $\alpha_k = 0$ вне этого множества, $\alpha_k > 0$ в $G_k \setminus G_{k-1}$, $\alpha_k \geq 0$ в $G$. Умножая на константу, можно считать, что $\alpha_k < 1/3$, $|\nabla\alpha_k| < 1/3$ почти всюду на $G$, $\alpha_k < d(x, \partial G)/6$ при $x \in G_{k+1} \setminus G_{k-2}$. Функция $\alpha(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k(x)$ удовлетворяет требуемым свойствам. $\square$

**Замечание.** Для функции $\alpha(x)$ существуют односторонние производные по любому направлению, которые по модулю меньше 1.

**Лемма 2.** *Для любого поликонденсатора $(\mathcal{F}, G)$, для которого*

$$\bigcup_{k=1}^{m} (F_{0k} \cup F_{1k}) \subset \partial G,$$

*любой непрерывной положительной на $G \setminus \{\infty\}$ функции $\rho \in \operatorname{adm}^0_{p,w}(\mathcal{F}, G)$ и для любого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta$-окрестности $F^{\delta}_{0k}$, $F^{\delta}_{1k}$ множеств $F_{0k}$ и $F_{1k}$ и суммируемая функция $\widetilde{\rho}$ такие, что для любой ломаной $\gamma$, соединяющей эти окрестности, выполняются условия*

$$\int_{\gamma} \widetilde{\rho} ds > 1 - \varepsilon, \quad \int_G \widetilde{\rho}^p w dx < \int_G \rho^p w dx + \varepsilon,$$

*где $k = 1, 2, \ldots, m$.*

**Доказательство.** Рассмотрим пару множеств $(F_{01}, F_{11})$. Пусть $F_{i1}^k$, $k = 1, 2, \ldots,$ – открытые множества, исчерпывающие $F_{i1}$ снаружи и такие, что $(\{\infty\}) \cap \partial F_{i1}^k = \varnothing$. Можно считать, что $\infty \notin (F_{01}^1 \cup F_{11}^1)$, $i = 0, 1$, $k = 1, 2, \ldots,$ $F_{01}^1 \cap F_{11}^1 = \varnothing$, а $\Delta_k$ – исчерпание $G$ изнутри открытыми множествами. Если $\infty \in G$, то считаем, что $\infty \in \Delta_1$. Обозначим $W_{ik} = \bar{F}_{i1}^1 \setminus F_{i1}^{k+1}$, $i = 0, 1$, $W_k = W_{0k} \cup W_{1k}$, $G_k = F_{01}^k \cup F_{11}^k$, $d_k$ – расстояние между $\partial G_k \cap \bar{G}$ и $\partial G_{k+1} \cap \bar{G}$, $k = 1, 2, \ldots,$ $W_0 = G \setminus (F_{01}^1 \cup F_{11}^1)$. Возьмем последовательность $\varepsilon_s \downarrow 0$ при $s \to \infty$ такую, что $\varepsilon_1 \le 1$ и

$$2^p \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_s < \frac{\varepsilon}{m}, \qquad \varepsilon_s < d_s \inf_{W_s \cap G} \rho, \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{1}$$

Пусть $k_l$, $l = 1, 2, \ldots,$ – возрастающая последовательность натуральных чисел такая, что $\int\limits_{B_l} \rho^p w dx < \varepsilon_l^{p+1}$, где $B_l = (G \setminus \Delta_{k_l}) \cap W_l$. Положим $B = \bigcup\limits_l B_l$.

Введём в рассмотрение функцию

$$\rho_1 = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{1}{\varepsilon_s}\right) \rho, & x \in B_s, s = 1, 2, \ldots \\ \rho, & x \in (G \setminus B). \end{cases}$$

Для этой функции выполняются неравенства $\rho_1 \ge \rho$,

$$\int\limits_B \rho_1^p w dx = \sum_{s=1}^{\infty} \int\limits_{B_s} \rho_1^p w dx \le \sum_{s=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon_s}\right)^p \int\limits_{B_s} \rho^p w dx \le 2^p \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon_s < \frac{\varepsilon}{m},$$

как следует из (1). Отсюда

$$\int\limits_G \rho_1^p w dx = \int\limits_{G \setminus B} \rho_1^p w dx + \int\limits_B \rho_1^p w dx \le \int\limits_G \rho^p w dx + \frac{\varepsilon}{m}. \tag{2}$$

Докажем, что существует такое $k$, что для любой ломаной $\gamma$, соединяющей $\partial F_{01}^k$ и $\partial F_{11}^k$ на $G$, имеем неравенство $\int\limits_\gamma \rho_1 ds \ge 1 - \varepsilon$. Если это не выполняется, то для любого $k$ существует ломаная $\gamma_k$, соединяющая $\partial F_{01}^k$ и $\partial F_{11}^k$ на $G$ и такая, что $\int\limits_{\gamma_k} \rho_1 ds < 1 - \varepsilon$. С другой стороны, если для $k \ge s$ существует ломаная $\gamma_k' \subset \gamma_k$, соединяющая $\partial G_s$ и $\partial G_{s+1}$ в

$W_s \cap B$, то

$$d_s \inf_{W_s \cap G} \rho \le \int\limits_{\gamma'_k} \rho ds = \frac{1}{1+1/\varepsilon_s} \int\limits_{\gamma'_k} \rho_1 ds \le \varepsilon_s \int\limits_{\gamma'_k} \rho_1 ds \le \varepsilon_s (1-\varepsilon),$$

что противоречит условию (1). Следовательно, ломаная $\gamma_k$ имеет общие точки с $(G \cap W_s) \setminus B$.

Пусть $x_0(s,k)$ (соответственно, $x_1(s,k)$) — точки некоторой связной части ломаной $\gamma_k$ в $(G \cap W_{0s}) \setminus B$ (соответственно, $(G \cap W_{1s}) \setminus B$).

Выберем последовательность $k_j$ так, чтобы точки $x_i(1,k_j)$ сходились к некоторой точке $x_{i1} \in G \cap W_{i1}$ при $j \to \infty$, $i = 0,1$. Обозначим последовательность $\gamma_{k_j}$ через $\gamma_{1k}$. Так как $\rho$ непрерывна в $G \setminus (\{\infty\} \cup F_{01} \cup F_{11})$, то можно найти открытый шар $v_{i1}$ с центром в точке $x_{i1}$ такой, что для любого отрезка $l$ в этом шаре выполняется условие $\int\limits_l \rho ds < \varepsilon/2^6$. Можно считать, что все $\gamma_{1k}$ пересекают $v_{i1}$.

Аналогично, найдём подпоследовательность $\gamma_{2k}$ последовательности $\gamma_{1k}$, и открытые шары $v_{i2}$ с центрами в точках $x_{i2} \in G \cap W_{i2}$ такие, что для любого отрезка $l$ в этих шарах выполняется $\int\limits_l \rho ds < \varepsilon/2^7$ и каждая ломаная $\gamma_{2k}$ пересекает эти шары, $k = 1,2,\ldots$, $i = 0,1$.

Продолжим этот процесс до бесконечности и рассмотрим диагональную последовательность $\gamma_{kk}$. Для любого натурального $k$ изменим ломаную $\gamma_{kk}$ следующим образом. Заменим какую-либо связную часть ломаной $\gamma_{kk}$, содержащуюся в шаре $v_{is}$, двумя радиусами шара $v_{is}$, идущими в некоторые две точки множества $\gamma_{kk} \cap \partial v_{is}$. Проводим эти действия для $i = 0,1$ и любого $s = 1,2,\ldots$ Обозначим полученную ломаную через $\tau_k$. Для ломаной $\tau_k$ имеем неравенство $\int\limits_{\tau_k} \rho ds < 1 - 3\varepsilon/4$.

Пусть $\Gamma_0$ – семейство спрямляемых ломаных, соединяющих $x_{01}$ и $x_{11}$ на $G \setminus (E_0 \cup E_1)$, и пусть $\Gamma_{ij}$ – семейство спрямляемых ломаных на $G \setminus (F_{01} \cup F_{11})$, соединяющих точки $x_{ij}$ и $x_{i,j+1}$, $i = 0,1$, $j \ge 1$. Имеем:

$$\inf_{C \in \Gamma_0} \int\limits_C \rho ds + \sum_{j=1}^{k-1} \inf_{C \in \Gamma_{0j}} \int\limits_C \rho ds + \sum_{j=1}^{k-1} \inf_{C \in \Gamma_{1j}} \int\limits_C \rho ds \le \int\limits_{\tau_k} \rho ds \le 1 - 3\varepsilon/4$$

для любого $k \ge 1$. Выберем дуги $C_0 \in \Gamma_0$, $C_{0j} \in \Gamma_{0j}$, $C_{1j} \in \Gamma_{1j}$, $j \ge 1$, такие, что

$$\int\limits_{C_0} \rho ds < \inf_{C \in \Gamma_0} \int\limits_C \rho ds + \varepsilon/8, \quad \int\limits_{C_{ij}} \rho ds < \inf_{C \in \Gamma_{ij}} \int\limits_C \rho ds + \varepsilon/2^{j+3},$$

$j \geq 1$, $i = 0, 1$. Рассмотрим ломаную $\widetilde{\gamma} = \cdots + C_{02} + C_{01} + C_0 + C_{11} + C_{12} + \cdots$. Она соединяет множества $F_{01}$ и $F_{11}$ в $G$ и удовлетворяет условию

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}} \rho ds = \int\limits_{C_0} \rho ds + \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{C_{0j} \cup C_{1j}} \rho ds < 1 - \frac{3\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{j+2}} < 1,$$

что противоречит допустимости функции $\rho$. Следовательно, существует $k$ такое, что для любой ломаной $\gamma$, соединяющей $\partial F_{0k}$ и $\partial F_{1k}$ на $G$, имеем неравенство $\int\limits_{\gamma} \rho_1 ds \geq 1 - \varepsilon$.

Проведя такие же рассуждения для остальных множеств $F_{ik}$, $i = 0, 1$, $k = 2, \ldots, m$, получим функции $\rho_2, \ldots, \rho_m$ с аналогичными свойствами. Рассмотрим функцию $\widetilde{\rho} = \max\limits_k \rho_k$. Легко проверить, что она удовлетворяет утверждению теоремы. □

Отметим, что в доказательстве использованы построения из [5, лемма 2.4.5]. Для конденсаторов в случае $p = n$, $w \equiv 1$ эта теорема была доказана в [1].

**Лемма 3.** *Инфимум в определении модуля $m^0$ для поликонденсатора, удовлетворяющего условиям предыдущей леммы, можно брать по допустимым функциям, непрерывным на $G$.*

**Доказательство.** Если $m^0_{p,w}(\mathcal{F}, G) = \infty$, то можно взять $\rho \equiv \infty$. Поэтому далее считаем, что $m^0_{p,w}(\mathcal{F}, G) < \infty$.

Пусть $\varepsilon > 0$ и пусть функция $\rho$ допустима для $m^0_{p,w}(\mathcal{F}, G)$ и такая, что

$$\int\limits_G \rho^p w \, dx < m^0_{p,w}(\mathcal{F}, G) + \varepsilon.$$

Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \rho_\varepsilon(x) &= \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} \rho(x + \varepsilon\alpha(x)y) \, dy \\ &= \frac{1}{\varepsilon^n \alpha(x)^n |B(0,1)|} \int\limits_{B(x,\varepsilon\alpha(x))} \rho(y) \, dy. \end{aligned}$$

Она непрерывна на $G$ и стремится к $\rho$ в $L^{p,w}(G)$ при $\varepsilon \to 0$ по лемме 2.4.4 из [5]. Пусть кривая $\gamma \in \Gamma^0(\mathcal{F}, G)$. Имеем

$$\int\limits_{\gamma} \rho_\varepsilon \, ds = \frac{1}{|B(0,1)|} \int\limits_{B(0,1)} \int\limits_{\gamma} \rho(x + \varepsilon\alpha(x)y) \, ds(x) \, dy.$$

Рассмотрим внутренний интеграл. Пусть $z(x) = x + \varepsilon\alpha(x)y$. Тогда

$$\int\limits_{\gamma} \rho(x + \varepsilon\alpha(x)y) \, ds(x) = \int\limits_{z^{-1}(\gamma)} \rho(z) \frac{ds(x)}{ds(z)} ds(z) \geq \frac{1}{1+\varepsilon},$$

так как $\dfrac{ds(z)}{ds(x)} = \dfrac{dx}{ds} + \varepsilon \dfrac{d\alpha}{ds} y \leq 1 + \varepsilon$ и кривая $z^{-1}(\gamma) \in \Gamma^0(\mathcal{F}, G)$.

Отсюда получаем, что функция $(1+\varepsilon)\rho_\varepsilon \in \mathrm{adm}^0_{p,w}(\mathcal{F}, G)$ и

$$\begin{aligned} m^0_{p,w}(\mathcal{F}, G) &\leq \int\limits_{G} (1+\varepsilon)^p \rho_\varepsilon^p w \, dx \leq (1+\varepsilon)^p \left( \int\limits_{G} \rho^p w \, dx + o(1) \right) \\ &\leq (1+\varepsilon)^p \left( m^0_{p,w}(\mathcal{F}, G) + o(1) \right) \end{aligned}$$

при $\varepsilon \to 0$. Лемма доказана. □

Из лемм 2 и 3 аналогично теореме 2.4.2 из [5] выводится следующая

**Теорема 1.** *Пусть $(\mathcal{F}, G)$ – поликонденсатор, удовлетворяющий условиям леммы 2; $F^n_{ik}$ — замкнутые множества такие, что $F^n_{ik} \supset F^{n+1}_{ik}$, $n = 1, 2, \ldots$, и*

$$\bigcup_n F^n_{ik} = F_{ik}, \quad i = 0, 1, \quad k = 1, 2, \ldots, m;$$

$$(\mathcal{F}_n, G) = \{(F^n_{01}, F^n_{11}), \ldots (F^n_{0m}, F^n_{1m}), G\}.$$

*Тогда $m^0_{p,w}(\mathcal{F}_n, G) \to m^0_{p,w}(\mathcal{F}, G)$ при $n \to \infty$.*

**Доказательство.** Напишем $\Gamma$, $\Gamma_n$, $M$, $M_n$ вместо $\Gamma(\mathcal{F}, G)$, $\Gamma(\mathcal{F}_n, G)$, $m^0_{p,w}(\mathcal{F}, G)$, $m^0_{p,w}(\mathcal{F}_n, G)$, соответственно. Имеем $M_n \geq M$ и поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} M_n \geq M$. Следовательно, далее можно предположить, что $M < \infty$.

Сначала рассмотрим случай, когда $F^n_{ik}$ представляют собой замкнутые $\frac{1}{n}$-окрестности множеств $F_{ik}$, $i = 0, 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $n = 1, 2, \ldots$.

Пусть дано $\varepsilon > 0$, функция $\rho \in \mathrm{adm}^0_{p,w}(\mathcal{F}, G)$ такая, что $\int\limits_G \rho^p w\, dx < M + \varepsilon$. По лемме 2, существуют число $n_0$ и функция $\rho_{n_0}$ такая, что

$$\int\limits_\gamma \rho_{n_0}\, ds \geq 1 - \varepsilon, \qquad \int_G \rho^p_{n_0} w dx < \int_G \rho^p w dx + \varepsilon,$$

для любой кривой $\gamma \in \Gamma^0(\mathcal{F}_{n_0}, G)$. Отсюда получим, что

$$\frac{\rho_{n_0}}{1-\varepsilon} \in \mathrm{adm}^0_{p,w}(\mathcal{F}_{n_0}, G)$$

и поэтому

$$M_{n_0} \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} \int_G \rho^p_{n_0} w\, dx < \frac{1}{(1-\varepsilon)^p} \int_G \rho^p w\, dx + \varepsilon < \frac{1}{(1-\varepsilon)^p}(M + 2\varepsilon).$$

Так как последовательность $M_n$ монотонно убывающая, то при $n > n_0$

$$M_n \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)^p}(M + 2\varepsilon),$$

поэтому, переходя к пределу при $n \to \infty$ и используя произвол в выборе $\varepsilon$, докажем теорему в этом случае.

Обозначим последовательность поликонденсаторов, рассмотренных выше, через $(\mathcal{G}_n, G) = \{(G^n_{01}, G^n_{11}), \ldots (G^n_{0m}, G^n_{1m}), G\}$. Если $(\mathcal{F}_n, G)$ – произвольная последовательность поликонденсаторов, указанных в условии теоремы, то для любого $n$ существует $n'$ такое, что $G^n_{ik} \supset F^{n'}_{ik}$ для $i = 0, 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, так как в противном случае мы получили бы, что пересечение непустых замнкутых множеств

$$\bigcap_{s=1}^{\infty} (F^s_{ik} \setminus (G^n_{ik} \setminus \partial G^n_{ik})) = \varnothing.$$

Отсюда следует, что при всех $i, k$ и $s > n'$ $G^n_{ik} \supset F^s_{ik}$. Значит, $\lim\limits_{s\to\infty} M_s \leq m^0_{p,w}(\mathcal{G}_n, G)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим $\lim\limits_{s\to\infty} M_s \leq M$. Теорема доказана в общем случае. $\square$

**Теорема 2.** *Если для поликонденсатора*

$$(\mathcal{F}, G) = \{(F_{01}, F_{11}), \ldots (F_{0m}, F_{1m}), G\}$$

*множества $F_{ik}$ удовлетворяют условию $F_{ik} \subset \partial G$, $i = 0, 1$, $k = 1, 2, \ldots, m$, то*

$$C_{p,w}(\mathcal{F}, G) = m^0_{p,w}(\mathcal{F}, G).$$

**Доказательство.** Неравенство $C_{p,w}(\mathcal{F},G) \geq m^0_{p,w}(\mathcal{F},G)$ следует из равенства модуля и емкости поликонденсатора [2], а также того факта, что $m_{p,w}(\mathcal{F},G) \geq m^0_{p,w}(\mathcal{F},G)$. В случае $m^0_{p,w}(\mathcal{F},G) = \infty$ теорема доказана. Предположим, что $m^0_{p,w}(\mathcal{F},G) < \infty$. Докажем обратное неравенство. Пусть дано $\varepsilon > 0$ и пусть $\rho \in \mathrm{adm}^0(\mathcal{F},G)$ – непрерывная на $G$ функция такая, что $\int\limits_G \rho^p w\,dx < m^0(\mathcal{F},G) + \varepsilon$. Используя лемму 2, построим соответствующую функцию $\widetilde{\rho}$. Положим $\widetilde{\rho} = 0$ на множествах $F^\delta_{ik}$, $i = 0,1$, $k = 1,2,\ldots,m$, указанных в лемме 2. Рассмотрим функцию

$$v_k(x) = \inf_{\gamma^k_x} \int\limits_{\gamma^k_x} \widetilde{\rho}\,ds,$$

где инфимум берется по ломаным $\gamma^k_x$, соединяющим $F_{0k}$ и точку $x$ на $G$, $k = 1,2,\ldots,m$. Очевидно, что $v_k = 0$ в окрестности компакта $F_{0k}$, $v_k \geq 1-\varepsilon$ в окрестности $F_{1k}$, $v_k \geq 0$, $|\nabla v_k| \leq \rho$ почти всюду на $G$. Отсюда следует, что набор функций $(u_1,\ldots,u_m) \in \mathrm{Adm}^0_{p,w}(\mathcal{F},G)$, где $u_k = \min\left(1, \frac{v_k}{1-\varepsilon}\right)$, $k = 1,2,\ldots,m$. Итак, имеем следующую цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} C_{p,w}(\mathcal{F},G) &\leq \int\limits_G \max_k |\nabla u_k|^p w\,dx \\ &\leq (1-\varepsilon)^{-p} \int\limits_G \rho^p w\,dx \leq (1-\varepsilon)^{-p}\left(m^0(\mathcal{F},G) + \varepsilon\right). \end{aligned}$$

В силу произвольности $\varepsilon$ теорема доказана. □

**Теорема 3.** *$NC_{p,w}$-множества не влияют на емкость и модуль поликонденсатора, то есть для любого $NC_{p,w}$-множества $E$ и любого поликонденсатора $(\mathcal{F},G)$ выполнены равенства*

$$m_{p,w}(\mathcal{F},G) = m_{p,w}(\mathcal{F},G\setminus E), \qquad C_{p,w}(\mathcal{F},G) = C_{p,w}(\mathcal{F},G\setminus E).$$

**Доказательство.** Очевидно, что $C_{p,w}(\mathcal{F},G\setminus E) \leq C_{p,w}(\mathcal{F},G)$. Пусть набор функций $v = (v_1,\ldots,v_m) \in \mathrm{Adm}(\mathcal{F},G\setminus E)$ такой, что

$$\int\limits_{G\setminus E} \max_k |\nabla v_k|^p\,dx < C_{p,w}(\mathcal{F},G\setminus E) + \varepsilon.$$

По теореме 9 из [3], каждую функцию $v_k$ можно продолжить до функции $v'_k$ на всё множество $G$ таким образом, что выполняется условие $v'_k \in L^1_{p,w}(G)$. Тогда $v' = (v'_1, \dots, v'_m) \in \mathrm{Adm}(\mathcal{F}, G)$. Следовательно,

$$C_{p,w}(\mathcal{F}, G) \le \int\limits_G \max_k |\nabla v'_k|^p \, dx = \int\limits_{G \setminus E} \max_k |\nabla v_k|^p \, dx < C_{p,w}(\mathcal{F}, G \setminus E) + \varepsilon.$$

В силу произвольности $\varepsilon$ теорема доказана. □

## Литература


1. В. В. Асеев, *NED-множества, лежащие в гиперплоскости.* — Сиб. мат. ж. **50**, (2009), 760–775.
2. В. В. Асеев, Б. Ю. Султанов, *Модули поликонденсаторов и изоморфизмы пространств следов непрерывных фунций класса $W^1_n$.* Препринт. Сиб. отд. АН СССР. Ин-т математики. No. 31. Новосибирск, 1989.
3. И. Н. Демшин, Ю. В. Дымченко, В. А. Шлык, *Критерии нуль-множеств для весовых соболевских пространств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **276** (2001), 52–82.
4. В. А. Шлык, Ю. В. Дымченко, *Геометрические критерии устранимых множеств.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **357** (2008), 75–88.
5. M. Ohtsuka, *Extremal length and precise functions*, GAKUTO International Series. Mathematical Sciences and Applications, **19**. Gakkōtosho Co., Ltd., Tokyo, 2003.



Dymchenko Yu. V., Shlyk V. A. Some properties of the capacity and module of a polycondenser and removable sets.

The paper proves the continuity of the module of a polycondenser and the equality of the polycondenser's capacity and the module of a family of broken lines connecting the plates of the polycondenser. Also it is proved that sets that are removable for the condenser capacity are also removable for polycondenser capacity.



Дальневосточный государственный университет,
ул. Суханова 8,
Владивосток 690950,
Россия

*E-mail*: dymch@mail.ru

*E-mail*: shlyknv@yandex.ru


Поступило 31 мая 2011 г.