Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 392, 2011 г.

В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков

О ПОЛИНОМАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА ДУГАХ ОКРУЖНОСТИ

Неравенствам для полиномов посвящена обширная литература (см., например, библиографию в [1, 2]). В последнее время значительное внимание уделяется полиномам с ограничениями на дугах единичной окружности [3–8]. Ранее такие полиномы изучались в работах [9, 10], причем в случае алгебраических полиномов речь шла об ограничениях на дугах окружности [10], а в эквивалентной задаче для тригонометрических полиномов ограничения приходились на отрезок меньший, чем период [9]. Нами был предложен новый подход к получению неравенств для полиномов и рациональных функций, основанный на развитии идей И. П. Митюка [11] об изменении внутреннего радиуса и функции Грина заданной области при отображениях этой области регулярными функциями [12–14]. В данной заметке показывается, что из принципа мажорации для мероморфных функций [12–14] вытекают новые теоремы типа покрытия, искажения и оценки модуля произведения старшего и свободного коэффициентов алгебраического полинома с ограничениями на дугах окружности. В отличие от предыдущих авторов [4–7] мы не требуем, чтобы нули полинома располагались на заданных дугах окружности, и расматриваем не только максимальное, но и минимальное отклонение модуля полинома от нуля.

Работа состоит из двух частей. В первой части приводятся теоремы для полиномов, непосредственно вытекающие из принципа мажорации, примененного к подходящей мероморфной функции, и зависящие от функции Грина и внутреннего радиуса дополнительных к дугам окружности областей. В случае одной дуги значение функции Грина и внутреннего радиуса можно вычислить. Соответствующие утверждения для алгебраических полиномов в данной ситуации представлены во второй части нашей работы.

Ключевые слова: теоремы покрытия и искажения, неравенства для полиномов, полиномы Чебышева, принципы мажорации.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-0038) и ДВО РАН (грант 11-Ш-В-01М-004).

§1. Полиномы с ограничениями на дугах единичной окружности

Всюду ниже Γ – объединение конечного числа непересекающихся замкнутых невырожденных дуг единичной окружности $|z| = 1$, $D = \overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma$, $g_B(z, \zeta)$ – функция Грина области B и $r(B, z)$ – внутренний радиус области B относительно точки z [15].

Для алгебраического полинома

$$P(z) = c_n z_n + \cdots + c_0, \quad c_n \neq 0 \tag{1}$$

с комплексными коэффициентами c_k, $k = 0, \ldots, n$ введем обозначения.

$$m = m(P, \Gamma) = \min\{|P(z)| : z \in \Gamma\},$$
$$M = M(P, \Gamma) = \max\{|P(z)| : z \in \Gamma\}.$$

Теорема 1. *Пусть P – полином степени n, и пусть $f(z) = P(z)\overline{P(1/\overline{z})}$. Тогда для любой точки z выполняется неравенство*

$$|2f(z) - M^2 - m^2 + 2\sqrt{(f(z) - M^2)(f(z) - m^2)}| \leq$$
$$\leq (M^2 - m^2) \exp\{n(g_D(z, 0) + g_D(1/\overline{z}, 0))\}$$

(при любом выборе значения корня в левой части). Равенство в точке $z \neq 0, \infty$ и $z \notin \Gamma$ при некотором значении корня достигается в том и только том случае, когда функция f осуществляет полное $2n$-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ областью D.

Доказательство. Области D и $G = \overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ имеют классические функции Грина. Функция f мероморфна в D и имеет в области D только два полюса: в точке $z = 0$ и точке $z = \infty$, каждый порядка не более, чем n. Кроме того, при стремлении точки z к множеству Γ все предельные граничные значения функции f лежат на отрезке $[m^2, M^2]$. По теореме 1 работы [14] в точках области D справедливо неравенство

$$g_G(f(z), \infty) \leq n(g_D(z, \infty) + g_D(z, 0)),$$

причем равенство в точках $z \neq 0$ и ∞ выполняется тогда и только тогда, когда $G = f(D)$ и функция f осуществляет полное $2n$-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ областью D. Из симметрии области D относительно окружности $|z| = 1$ имеем

$$g_D(z, \infty) = g_D(1/\overline{z}, 0).$$

Осталось заметить, что

$$g_G(w,\infty) = \log\left|\frac{2w - M^2 - m^2}{M^2 - m^2} + \sqrt{\left(\frac{2w - M^2 - m^2}{M^2 - m^2}\right)^2 - 1}\right|.$$

Теорема доказана. □

Теорема 2. *Для коэффициентов полинома вида* (1) *справедливо неравенство*

$$|c_n c_0| \le \frac{1}{4}(M^2 - m^2) r^{2n}(D, 0).$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда функция $f(z) = P(z)\overline{P(1/\overline{z})}$ *осуществляет полное* $2n$*-кратное накрытие области* $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ *областью* D.

Доказательство. Из неравенства И. П. Митюка [11] (см. также [12, Следствие 1] имеем

$$|c_n c_0| \le \frac{r^n(D,\infty)}{r(G,\infty)} \exp\{n g_D(0,\infty)\},$$

причем равенство выполняется только в случае, указанном в теореме 2. Легко видеть, что

$$\log|z| + g_D(z,0) \equiv g_D(z,\infty).$$

Поэтому

$$\log r(B,0) = g_D(0,\infty).$$

Наконец, прямые вычисления дают

$$r(\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2], \infty) = \frac{1}{\operatorname{cap}([m^2, M^2])} = \frac{4}{M^2 - m^2}.$$

Теорема доказана. □

Если $c_n = 1$ и все нули полинома P расположены на дугах Γ, то $m = 0$, $|c_0| = 1$ и неравенство теоремы 2 имеет вид

$$M(P, \Gamma) \ge 2r^{-n}(D, 0)$$

(ср. [4, с. 953], [7, с. 177–178]).

Обозначим через $\omega(z, E, \Omega)$ гармоническую меру множества $E \subset \partial\Omega$ в точке z относительно области Ω. В случае $\Omega = D$ плотность

гармонической меры определяется следующим образом:

$$\varpi(\zeta, e^{i\varphi}) = \frac{\partial}{\partial\varphi}\omega(\zeta, \Gamma \cap \{e^{i\theta} : 0 \le \theta \le \varphi\}, D), \ \ \zeta \in D, \ \ e^{i\varphi} \in \Gamma.$$

Теорема 3. *Для полинома P вида* (1) *имеет место неравенство*

$$|(|P(z)|^2)'_\varphi| \le 2\pi n \varpi(\infty, z)\sqrt{(M^2 - |P(z)|^2)(|P(z)|^2 - m^2)}, \qquad (2)$$

где $z = e^{i\varphi} \in \Gamma$. Равенство в (2) *достигается тогда и только тогда, когда функция $f(z) = P(z)\overline{P(1/\overline{z})}$ осуществляет полное $2n$-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$ областью D.*

Доказательство. Функция f, заданная в области D, удовлетворяет условиям, при которых справедливо следствие 2 работы [12], если в качестве G взята область $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [m^2, M^2]$. Следовательно,

$$\frac{|P'(z)\overline{P(1/\overline{z})} + P(z)\overline{P'(1/\overline{z})}(-1/z^2)|}{\sqrt{(M^2 - |P(z)|^2)(|P(z)|^2 - m^2)}} = \frac{|zP'(z)\overline{P(z)} - \overline{z}\overline{P'(z)}P(z)|}{\sqrt{(M^2 - |P(z)|^2)(|P(z)|^2 - m^2)}}$$

$$= \frac{2|\operatorname{Im} zP'(z)\overline{P(z)}|}{\sqrt{(M^2 - |P(z)|^2)(|P(z)|^2 - m^2)}} \le n\left(\frac{\partial g_D(z,\infty)}{\partial n^\pm} + \frac{\partial g_D(z,0)}{\partial n^\pm}\right),$$

где $z \in \Gamma$, а $\frac{\partial}{\partial n^+}$ означает дифференцирование вдоль радиуса от центра единичной окружности, а $\frac{\partial}{\partial n^-}$ – в противоположном направлении. Из того факта, что

$$\varpi(\zeta, z) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial g_D(z,\zeta)}{\partial n^+} + \frac{\partial g_D(z,\zeta)}{\partial n^-}\right], \ \ z \in \operatorname{int}(\Gamma),$$

следует

$$2|\operatorname{Im} zP'(z)\overline{P(z)}| \le \pi n\,(\varpi(\infty, z) + \varpi(0, z))\sqrt{(M^2 - |P(z)|^2)(|P(z)|^2 - m^2)}.$$

Здесь под $\operatorname{int}(\Gamma)$ понимается множество Γ, из которого исключены концы образующих его дуг. Ввиду симметрии области D

$$\varpi(\infty, z) = \varpi(0, z), \quad z \in \operatorname{int}(\Gamma).$$

Для завершения доказательства неравенства осталось заметить, что

$$|\operatorname{Im} zP'(z)\overline{P(z)}| = \left|\operatorname{Im}\frac{zP'(z)}{P(z)}P(z)\overline{P(z)}\right| = \frac{1}{2}|(|P(z)|^2)'_\varphi|.$$

Утверждение о знаке равенства следует из соответствующего утверждения теоремы 2 работы [13] или следствия 1 работы [14]. Теорема доказана. □

§2. Случай одной дуги

Ниже приводятся следствия теорем 1–3 в случае, когда множество Γ состоит из одной дуги. Положим по определению

$$\Gamma_\alpha = \{z = e^{i\varphi} : -\alpha \le \varphi \le \alpha\}, \quad 0 < \alpha \le \pi.$$

Следствие 1 (ср. [3, теорема 1]). *Для полинома P вида* (1) *и любых точек z имеет место неравенство*

$$\begin{aligned}
&|2P(z)\overline{P(1/\overline{z})} - M^2 - m^2 \\
&+ 2\sqrt{(P(z)\overline{P(1/\overline{z})} - M^2)(P(z)\overline{P(1/\overline{z})} - m^2)}| \\
&\le (M^2 - m^2)|i\cos\frac{\alpha}{2}\Phi(i\frac{z-\cos\alpha}{\sin\alpha}) \\
&+ \sin\frac{\alpha}{2}|^n|i\cos\frac{\alpha}{2}\Phi(i\frac{1-z\cos\alpha}{z\sin\alpha}) + \sin\frac{\alpha}{2}|^n,
\end{aligned}$$

где $m = m(P, \Gamma_\alpha)$, $M = M(P, \Gamma_\alpha)$, а Φ — однозначная ветвь функции

$$\zeta = \omega + \sqrt{\omega^2 - 1}$$

во внешности дуги окружности, соединяющей точки ± 1 и проходящей через точку $i\,\mathrm{tg}(\alpha/2)$, $\Phi(\infty) = \infty$. Равенство в любой точке z достигается, например, для полинома

$$P_\alpha(z) = \begin{cases} \prod\limits_{k=1}^{n/2}(z^2 - 2a_k z + 1), & \text{при четных } n, \\ (z-1)\prod\limits_{k=1}^{(n-1)/2}(z^2 - 2a_k z + 1), & \text{при нечетных } n, \end{cases}$$

где $a_k = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\pi(2k-1)}{n}$.

Доказательство. Неравенство следствия 1 вытекает из теоремы 1 и легко проверяемых соотношений

$$\begin{aligned}
g_{\overline{\mathbb{C}}\setminus\Gamma_\alpha}(z,\infty) &= \log|i\cos\frac{\alpha}{2}\Phi(i\frac{z-\cos\alpha}{\sin\alpha}) + \sin\frac{\alpha}{2}|, \\
g_{\overline{\mathbb{C}}\setminus\Gamma_\alpha}(z,0) &= \log|i\cos\frac{\alpha}{2}\Phi(i\frac{1-z\cos\alpha}{z\sin\alpha}) + \sin\frac{\alpha}{2}|.
\end{aligned}$$

Докажем случай равенства. Будем считать, что $M = 1$ и $m = 0$. В силу теоремы 1 равенство достигается тогда и только тогда, когда функция $f(z) = P(z)\overline{P(1/\overline{z})}$ осуществляет полное $2n$-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0,1]$ областью D. Легко видеть, что в случае одной

дуги такой функцией является, например, суперпозиция следующих отображений:

$$\zeta = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right), \quad u = -\frac{2\zeta}{1-\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}$$

и

$$w = \frac{1}{2}(T_n(u) + 1),$$

где $T_n(z)$ – полином Чебышева первого рода степени n.

На дуге Γ_α функция $f(z) \equiv |P(z)|^2$. Нулям экстремального полинома P соответствуют точки u_k такие, что $T_n(u_k) = -1$. Если n четное, пусть $n = 2r$, то $u_k = \cos(\pi(2k-1)/n)$, $k = 1, \ldots, r$, а если n нечетное, $n = 2r - 1$, то $u_k = \cos(\pi(2k-1)/n)$, $k = 1, \ldots, r$ и $u_{r+1} = -1$. Таким образом, корни полинома P есть корни уравнений

$$-(z + \frac{1}{z}) + 2\cos^2\frac{\alpha}{2} = 2u_k \sin^2\frac{\alpha}{2},$$

или, что тоже самое, уравнений

$$z^2 - 2a_k z + 1 = 0,$$

где

$$a_k = (-u_k \sin^2\frac{\alpha}{2} + \cos^2\frac{\alpha}{2}), \quad k = 1, \ldots, r.$$

При нечетных n число k принимает также значение $r + 1$. Поскольку неравенство следствия 1 не меняется при умножении полинома P на константу, то в качестве экстремального полинома можно взять, например, полином P_α. Теорема доказана. □

Впервые экстремальный полином из следствия 1 был найден в работе Л. С. Маергойза и Н. Н. Рыбаковой [5] в связи с решением задачи о наименьшем отклонении от нуля полиномов на дуге окружности (см. также [6]). Соответствующие тригонометрические полиномы рассматривались ранее В. С. Виденским [9].

Следствие 2. *Для полинома P вида* (1) *и $\Gamma = \Gamma_\alpha$ имеет место точная оценка*

$$|c_n c_0| \le \frac{M^2 - m^2}{4\sin^{2n}(\alpha/2)}.$$

Равенство достигается в том же случае, что и в следствии 1.

Доказательство. Требуемое неравенство вытекает из теоремы 2, если заметить, что

$$r(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma_\alpha, 0) = r(\overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma_\alpha, \infty) = \frac{1}{\mathrm{cap}\Gamma_\alpha} = \frac{1}{\sin(\alpha/2)}.$$

Случай равенства следует из соответствующей части следствия 1. Следствие доказано. □

Если, дополнительно, все нули полинома P лежат на дуге Γ_α, то следствие 2 эквивалентно соответствующим утверждениям А. Л. Лукашова, С. В. Тышкевича и Л. С. Маергойза, Н. Н. Рыбаковой о полиноме, наименее уклоняющемся от нуля на дуге окружности с нулями на этой дуге (см. [4–7]).

Следствие 3 (ср. [9], а также [3, теорема 2])**.** *Для полинома P вида* (1) *и $z \in \Gamma_\alpha$ имеет место неравенство*

$$|(|P(z)|^2)'_\varphi| \le \frac{n|z+1|\sqrt{(M^2 - |P(z)|^2)(|P(z)|^2 - m^2)}}{|\sqrt{z^2 - 2z\cos\alpha + 1}|}. \tag{3}$$

Равенство достигается в том же случае, что и в следствии 2.

Доказательство. Следуя работе [16] (см. также [7]), получаем

$$\omega(\infty, \gamma, \overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma_\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\gamma \left| \frac{S(\tau)}{\sqrt{H(\tau)}} \right| \left| \frac{d\tau}{\tau} \right|,$$

где γ – объединение конечного числа замкнутых дуг, содержащихся в Γ_α, а $S(z)$ – самовзаимный многочлен первой степени, то есть $S(z) = z\overline{S(1/\overline{z})}$, нормированный условием

$$iS(0) = \sqrt{H(0)},$$

и $H(z) = -(z - e^{-i\alpha})(z - e^{i\alpha})$. Поэтому, $S(z) = z + 1$. Отсюда

$$\omega(\infty, \gamma, \overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma_\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\gamma \left| \frac{\tau + 1}{\sqrt{-(\tau^2 - 2\tau\cos\alpha + 1)}} \right| \left| \frac{d\tau}{\tau} \right|.$$

Вычисляя полность гармонической меры, получаем

$$\begin{aligned}\varpi(\infty, e^{i\varphi}) &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\omega(\infty, \Gamma_\alpha \cap \{e^{i\theta} : 0 \le \theta \le \varphi\}, \overline{\mathbb{C}}_z \setminus \Gamma_\alpha) \\ &= \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\varphi \left|\frac{e^{i\theta}+1}{\sqrt{-(e^{2i\theta}-2e^{i\theta}\cos\alpha+1)}}\right| d\theta\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left|\frac{e^{i\varphi}+1}{\sqrt{-(e^{2i\varphi}-2e^{i\varphi}\cos\alpha+1)}}\right|.\end{aligned}$$

Неравенство (3) следует теперь из неравенства (2).

Случай равенства следует из соответствующей части следствия 2 Следствие доказано. □

В заключение отметим, что экстремальный полином в следствиях 1–3 может быть представлен в виде

$$P_\alpha(z) = 2\varepsilon\sin^n(\alpha/2)\sqrt{z^n}T_n\left(\frac{\sqrt{z}-1/\sqrt{z}}{2i\sin(\alpha/2)}\right),$$

где $T_n(z)$ – полином Чебышева первого рода степени n, а ε – любое число такое, что $|\varepsilon| = 1$ (ср. [7]).

Действительно, заметим, что $M(P_\alpha, \Gamma_\alpha) = 2\sin^n(\alpha/2)$, а $m(P_\alpha, \Gamma_\alpha) = 0$. Рассмотрим образ дуги Γ_α при отображении функцией

$$f(z) = P_\alpha(z)\overline{P_\alpha(1/\overline{z})}.$$

Для любого вещественного φ имеем

$$\begin{aligned}&P_\alpha(e^{i\varphi})\overline{P_\alpha(1/\overline{e^{i\varphi}})} = P_\alpha(e^{i\varphi})\overline{P_\alpha(e^{i\varphi})} \\ &= 4\sin^{2n}(\alpha/2)\varepsilon e^{ni\varphi/2}T_n\left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\alpha/2)}\right)\overline{\varepsilon}e^{-ni\varphi/2}T_n\left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\alpha/2)}\right) \\ &= 4\sin^{2n}(\alpha/2)T_n^2\left(\frac{\sin(\varphi/2)}{\sin(\alpha/2)}\right).\end{aligned}$$

Следовательно, когда точка $z = e^{i\varphi}$ пробегает дугу Γ_α, ее образ при отображении функцией f пробегает отрезок $[0, 4\sin^{2n}(\alpha/2)]$ $2n$ раз. Остается заметить, что f – рациональная функция порядка $2n$. Следовательно, f осуществляет полное $2n$-кратное накрытие области $\overline{\mathbb{C}}_w \setminus [0, 4\sin^{2n}(\alpha/2)]$ областью D.

Литература

1. P. Borwein, T. Erdelyi, *Polynomials and Polynomial Inequalities.* Graduate Texts in Mathematics, 161. Springer-Verlag, New York, 1995.
2. Q. I. Rahman, G. Schmeisser, *Analytic theory of polynomials.* London Mathematical Sosiety Monographs. New Series, **26**. The Charendon Press, Oxford Univ. Press, Oxford, 2002.
3. А. В. Олесов, *О применении конформных отображений к неравенствам для тригонометрических полиномов.* — Мат. заметки **76** (2004), No. 3, 396–408.
4. С. В. Тышкевич, *О чебышёвских полиномах на дугах окружности.* — Мат. заметки **81** (2007), No. 6, 952–954.
5. Л. С. Маергойз, Н. Н. Рыбакова, *Многочлены Чебышева с нулевым множеством на дуге окружности и смежные вопросы.* Препринт 312М, Институт физики им. Л.В. Киренского СО РАН, Красноярск, 2008, 1–16.
6. Л. С. Маергойз, Н. Н. Рыбакова, *Многочлены Чебышёва с нулевым множеством на дуге окружности.* — Докл. РАН **246** (2009), No. 1, 26–28.
7. A. L. Lukashov, S. V. Tyshkevich, *Extremal polynomials on arcs of the circle with zeros on these arcs.* — J. Contemp. Math. Anal., Armen. Acad. Sci. **44** (2009), No. 1, 172–179.
8. В. В. Арестов, А. С. Менделев, *О тригонометрических полиномах, наименее уклоняющихся от нуля.* — Докл. РАН **425** (2009), No. 6, 733–736.
9. В. С. Виденский, *Экстремальные оценки производной тригонометрического полинома на отрезке, меньшем чем период.* — Докл. АН СССР. **130** (1960), No. 1, 13–16.
10. J. P. Thiran, C. Detaille, *Chebyshev polynomials on circular arcs in the complex plane.* — In: Progress approximation theory, 771–786, Acad. Press, Boston, MA, 1991.
11. И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы.* Кубанский гос. ун-т, Краснодар (1980).
12. В. Н. Дубинин, С. И. Калмыков, *Принцип мажорации для мероморфных функций.* — Мат. сб. **198** (2007), No. 12, 37–46.
13. С. И. Калмыков, *Принципы мажорации и некоторые неравенства для полиномов и рациональных функций с предписанными полюсами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ. **357** (2008), 143–157.
14. В. Н. Дубинин, *О принципах мажорации для мероморфных функций.* — Мат. заметки **84** (2008), 803–808.
15. T. Ransford, *Potential theory in the complex plane.* Cambridge Univ. Press., Cambridge (1995).
16. F. Peherstorfer, R. Steinbauer, *Strong asymptotics of orthonormal polynomials with the aid of Green's function.* — SIAM J. Math. Anal. **32** (2000), 385–402.

Dubinin V. N., Kalmukov S. I. On polynomials with constraints on circular arcs.

For polynomials with prescribed minimal and maximal values of their moduli on a collection of circular arcs it is shown that new covering and distortion theorems and a modulus estimates for a product of leading and free coefficients follow from a majorization principle for meromorphic functions proved by the authors earlier. As corollaries, recent results on polynomials with additional constraints on zeros established by other mathematicians are obtained.

Дальневосточный
федеральный университет,
ул. Суханова 8, Владивосток 690950,
Россия

E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

E-mail: sergeykalmykov@inbox.ru

Поступило 5 мая 2011 г.