Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 392, 2011 г.

В. Н. Дубинин

О СОХРАНЕНИИ КОНФОРМНОЙ ЕМКОСТИ ПРИ ОТОБРАЖЕНИИ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

Введение

Хорошо известны приложения емкостей конденсаторов и симметризации в геометрической теории функций комплексного переменного (см., например, [1, 2]). Конформная емкость сохраняется при однолистных отображениях и не возрастает при отображении произвольными мероморфными функциями. В последнем случае возникает вопрос о равенстве емкости образа конденсатора с емкостью исходного конденсатора. Наряду с проблемами единственности для симметризационных преобразований этот вопрос естественно рассматривался при исследовании геометрических свойств аналитических функций [2–7]. По-видимому, утверждение о том, что равенство емкостей возможно только при однолистных отображениях относится к фольклору. Вместе с тем, в литературе встречаются лишь частные случаи такого утверждения, относящиеся к специальным конденсаторам. В недавней работе С.Поулиасиса [8] рассматриваются конденсаторы вида (D, K), где D – открытое собственное подмножество $\overline{\mathbb{C}}$, а K – компактное подмножество D. Автор показывает, что при определенных условиях для мероморфной в D функции f равенство

$$\operatorname{cap}(D, K) = \operatorname{cap}(f(D), f(K))$$

имеет место в том и только в том случае, когда f – инъекция в D. Для доказательства этого факта в [8] используется представление конформной (вариационной) емкости через гринову емкость подходящей пластины [9]. Конденсаторы вида (D, K) часто встречаются в литературе. Однако на практике эффективнее более общая конструкция, когда пластины конденсатора E_0 и E_1 расположены на замыкании некоторого открытого множества B, а функция f мероморфна лишь в

Ключевые слова: конформная емкость, конденсатор, емкость конденсатора, мероморфная функция.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00038) и ДВО РАН (грант 09-II-СО-01-004).

поле этого конденсатора $B \setminus (E_0 \cup E_1)$. Такие конструкции исследовались по-существу еще много лет назад [3]. В данной заметке доказывается теорема об однолистности мероморфной функции в случае сохранения емкости в ситуации, указанной выше. Условия на конденсатор и функцию f близки соответствующим условиям в работе [10] (см., также [11]). Метод доказательства отличен от [8] и намного проще.

§1. Основные понятия и формулировки результатов

Пусть B – открытое множество на комплексной плоскости $\overline{\mathbb{C}}$. *Конденсатором* в $\overline{B}$ назовем тройку $C = (B, E_0, E_1)$, где E_0 и E_1 – пара непустых непересекающихся замкнутых множеств $E_k \subset \overline{B}$, $k = 0, 1$. Открытое в $\overline{B}$ множество $G = \overline{B} \setminus (E_0 \cup E_1)$ будем называть *полем* конденсатора C, а множества E_0, E_1 – *пластинами* этого конденсатора. *Емкость* $\operatorname{cap} C$ конденсатора C определяется как точная нижняя граница интегралов Дирихле

$$I(v, G) := \int\limits_G |\nabla v|^2 d\sigma$$

по всем *допустимым функциям* v, т.е. вещественнозначным функциям v, непрерывным в $\overline{B}$, удовлетворяющим условию Липшица внутри множества B, за исключением, может быть, конечного числа точек, и равным k на E_k, $k = 0, 1$. Всюду ниже рассматриваются только те конденсаторы, у которых объединение пластин содержит границу множества B. Если существует вещественная функция ω, непрерывная в $\overline{B}$, равная нулю на E_0, единице на E_1 и гармоническая в G, то ее называют *потенциальной функцией* конденсатора C. В общем случае через ω будем обозначать решение обобщенной задачи Дирихле в G с граничными значениями k на E_k, $k = 0, 1$ (см. [9, гл. IV,§3]). Конденсатор $C = (B, E_0, E_1)$ назовем *правильным*, если для любой связной компоненты G' поля $G = \overline{B} \setminus (E_0 \cup E_1)$ конденсатор $(G', \overline{G'} \cap E_0, \overline{G'} \cap E_1)$ определен и имеет положительную емкость. Например, если D – открытое множество и K – компакт в D такой, что $\operatorname{cap}(D, K, \partial D) > 0$ и для каждой связной компоненты D' множества D логарифмическая емкость $\operatorname{c}(K \cap D') > 0$, то конденсатор $(D, K, \partial D)$ правильный (ср. [8]). Последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ конденсаторов $C_n = (B, E_0^n, E_1^n)$ назовем *исчерпанием* конденсатора $C = (B, E_0, E_1)$, если $E_k^n \supset E_k^{n+1}$,

$n = 1, 2, \ldots$, и $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_k^n = E_k$, $k = 0, 1$. Можно показать, что для любого конденсатора C существует исчерпание, состоящее из конденсаторов C_n, поля которых ограничены аналитическими жордановыми кривыми. Если ω_n – потенциальная функции конденсатора C_n из такого исчерпания, то $\omega_n \rightrightarrows \omega$ при $n \to \infty$ равномерно внутри G. Поэтому

$$I(\omega, G) = \lim_{n\to\infty} I(\omega_n, G) = \lim_{n\to\infty} \operatorname{cap} C_n = \operatorname{cap} C.$$

Предположим теперь, что для данного конденсатора $C = (B, E_0, E_1)$ имеется функция f, мероморфная в B и такая, что $f(E_0) \cap f(E_1) \cap \partial f(B) = \varnothing$. Здесь $f(E_k)$ – множество предельных значений $f(z)$, когда z стремится к E_k, $k = 0, 1$. Тогда определен конденсатор

$$f(C) := (f(B), f(E_0), f(E_1) \cap \partial f(B)).$$

Из теоремы 8.6 книги [11] следует, что при условии $f(E_0 \cap \partial B) \subset \partial f(B)$ справедливо неравенство

$$\operatorname{cap} C \geq \operatorname{cap} f(C)$$

(ср. [10, теорема 1]). Основным результатом данной статьи является

Теорема 1. *Пусть $C = (B, E_0, E_1)$ – правильный конденсатор, $E_0 \cup E_1 \supset \partial B$, и пусть функция f мероморфна на множестве B, причем выполняются условия: $f(E_0) \cap f(E_1) \cap \partial f(B) = \varnothing$ и $f(E_0 \cap \partial B) \subset \partial f(B)$. Предположим, что $\operatorname{cap} C = \operatorname{cap} f(C)$. Тогда для любых различных точек z_1, z_2 множества $B \setminus E_1$ равенство $f(z_1) = f(z_2)$ влечет за собой включения $z_k \in E_0$, $k = 1, 2$.*

Отсюда немедленно вытекает

Следствие 1. *Пусть в условиях теоремы выполняется $E_0 \cup E_1 = \partial B$. Тогда равенство*

$$\operatorname{cap} C = \operatorname{cap} f(C) \tag{1}$$

является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция f была однолистной в поле конденсатора C.

Нетрудно видеть, что требование $E_0 \cup E_1 = \partial B$ существенно для необходимости в следствии 1, но излишне для достаточности. В этом случае при условии равенства емкостей образ конденсатора имеет вид

$$f(C) = (f(B), f(E_0), f(E_1)).$$

Следствие 2 ([8, С. Поулиасис]). *Пусть D открытое множество и K компакт в D такой, что* $\operatorname{cap}(D, K, \partial D) > 0$ *и для каждой связной компоненты D' множества D логарифмическая емкость* $\mathrm{c}(K \cap D') > 0$. *Пусть f – мероморфная в D функция, отличная от константы в каждой связной компоненте D. Тогда равенство*

$$\operatorname{cap}(D, K, \partial D) = \operatorname{cap}(f(D), f(K), \partial f(D)) \tag{2}$$

выполняется в том и только в том случае, когда f однолистна в D.

Можно показать, что теорема 1 и следствие 1 имеют место также и в том случае, когда B – область, а под границей B понимается совокупность простых концов.

§2. Доказательства

Для доказательства теоремы 1 предположим, что существуют две различные точки $z_1, z_2 \in B \setminus E_1$ такие, что $f(z_1) = f(z_2) := w_0$ и одна из них, скажем z_1, принадлежит полю G конденсатора C. Так как функция f мероморфна в B и отлична от постоянной в каждой связной компоненте поля G, то существуют окрестности U_1 точки z_1, U_2 точки z_2 и V точки w_0 такие, что $U_1 \cup U_2 \subset B$, $\overline{U_1} \subset G$, $U_1 \cap U_2 = \varnothing$, $f(U_1) = f(U_2) = V \subset f(B)$. Если точка $z_2 \in G$, то можно считать, что $\overline{U_2} \subset G$. В случае $z_2 \in E_0$ считаем, что для решения обобщенной задачи Дирихле ω выполняется неравенство

$$\min\left\{\omega(z) : z \in \overline{U_1}\right\} > \max\left\{\omega(z) : z \in \overline{U_2}\right\}.$$

В указанных условиях существует число $\delta > 0$ такое, что

$$I(\omega, U_1 \cup U_2) = \sum I(\omega \circ f^{-1}, V) \geq I(v, V) + \delta, \tag{3}$$

где $v(w) = \min\{\omega(z) : z \in U_1 \cup U_2,\ f(z) = w \in V\}$, а суммирование производится по всем ветвям обратной функции f^{-1}. (Например, окрестность V разрезаем вдоль некоторого отрезка, соединяющего точку w_0 с ∂V. В окрестности с разрезом выделяем конечное число ветвей функции f^{-1} и берем сумму интегралов от функций $\omega \circ f^{-1}$.) Рассмотрим исчерпание $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ конденсатора C конденсаторами C_n, поле каждого из которых ограничено аналитическими жордановыми кривыми. Обозначим через ω_n потенциальную функцию конденсатора C_n, $n = 1, 2, \ldots$. По определению исчерпания существует номер N

такой, что для всех $n > N$ окрестность U_1 принадлежит полю конденсатора C_n, а в случае $z_2 \in G$ окрестность U_2 также принадлежит этому полю, причем, ввиду (3) выполняются неравенства

$$I(\omega_n, U_1 \cup U_2) \geq I(v_n, V) + \frac{\delta}{2}, \quad n > N, \tag{4}$$

где $v_n(w) = \min\{\omega_n(z) : z \in U_1 \cup U_2,\ f(z) = w \in V\},\ n > N$. Введем функции

$$\widetilde{v}_n(w) = \begin{cases} 0, & w \in f(E_0), \\ 1, & w \in f(E_1) \cap \partial f(B), \\ \min\{v_n(z) : f(z) = w\}, & w \in f(B). \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что каждая функция $\widetilde{v}_n$ является допустимой для конденсатора $f(C)$, и, следовательно,

$$I(\widetilde{v}_n, f(B)) \geq \operatorname{cap} f(C), \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Учитывая выше сказанное и неравенство (4), приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} I(\omega_n, B) &= I(\omega_n, U_1 \cup U_2) + I(\omega_n, B \setminus (U_1 \cup U_2)) = I(\omega_n, U_1 \cup U_2) \\ &+ \sum_{f^{-1}(w) \notin U_1 \cup U_2} I(\omega_n \circ f^{-1}, V) + \sum I(\omega_n \circ f^{-1}, f(B) \setminus V) \\ &\geq I(v_n, V) + \frac{\delta}{2} + \sum_{f^{-1}(w) \notin U_1 \cup U_2} I(\omega_n \circ f^{-1}, V) + I(\widetilde{v}_n, f(B) \setminus V) \\ &\geq I(\widetilde{v}_n, f(B)) + \frac{\delta}{2} \geq \operatorname{cap} f(C) + \frac{\delta}{2}. \end{aligned}$$

Здесь суммирование производится по всем ветвям обратной функции f^{-1} либо по всем ветвям со значениями вне $U_1 \cup U_2$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем противоречие:

$$\operatorname{cap} C \geq \operatorname{cap} f(C) + \delta/2.$$

Теорема 1 доказана. □

Если в условиях следствия 2 функция f однолистна в D, то очевидно выполняется равенство (2). Наоборот, пусть имеет место равенство (2). Положим $B = D,\ E_0 = K,\ E_1 = \partial D$. Тогда равенство (2) перепишется в виде (1):

$$\operatorname{cap} C = \operatorname{cap} f(C) \quad (C = (B, E_0, E_1)).$$

В условиях следствия 2 конденсатор C является правильным и выполняются условия теоремы 1, согласно которой функция f однолистна в $B \setminus E_0 = D \setminus K$. По известному критерию однолистности заключаем, что f однолистна в каждой связной компоненте множества D. Отсюда вытекает однолистность в D. Действительно, если существуют две различные связные компоненты D_1 и D_2 множества D с непустым пересечением $f(D_1) \cap f(D_2)$, то согласно теореме 1

$$f(D_1) \cap f(D_2) = f(K \cap D_1) \cup f(K \cap D_2),$$

что противоречит открытости этого пересечения.

Автор выражает благодарность Л. В. Ковалеву за полезные замечания по поводу приведенных доказательств.

Литература

1. W. K. Hayman, *Multivalent functions.* Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1994.
2. В. Н. Дубинин, *Симметризация в геометрической теории функции комплексного переменного.* — Успехи мат. наук **49** (1994), 3–76.
3. T. Kubo, *Hyperbolic transfinite diameter and some theorems on analytic functions in an annulus.* — J. Math. Soc. Japan **10** (1958), 348–364.
4. И. П. Митюк, *Принцип симметризации для кольца и некоторые его применения.* — Сиб. мат. журн. **6** (1965), 1282–1291.
5. И. П. Митюк, *Некоторые свойства функций, регулярных в многосвязной области.* — Докл. АН СССР **164** (1965), 495–498.
6. И. П. Митюк, *Симметризационные методы и их применение в геометрической теории функций. Введение в симметризационные методы.* Изд-во Кубанского ун-та, Краснодар, 1980.
7. И. П. Митюк, *Применение симметризационных методов в геометрической теории функций.* Изд-во Кубанского ун-та, Краснодар, 1985.
8. S. Pouliasis, *Condenser capacity and meromorphic functions.* — Comput. methods and funct. theory **11** (2011), 237–245.
9. Н. С. Ландкоф, *Основы современной теории потенциала.* М., 1966.
10. H. Kloke, *Some inequalities for the capacity of plane condensers.* — Results Math. **9** (1986), 82–94.
11. В. Н. Дубинин, *Емкости конденсаторов и симметризация в геометрической теории функций комплексного переменного.* Владивосток, 2009.
12. T. Ransford, *Potential theory in the complex plane.* — London Math. Soc. Student Texts **28**, Cambridge Univ. Press., 1995.

V. N. Dubinin On the preservation of conformal capacity under meromorphic functions.

It is proved that a meromorphic function that preserves the capacity of a plane condenser is univalent in the field of the condenser.

Дальневосточный
федеральный университет,
ул. Суханова 8, Владивосток 690950,
Россия
E-mail: dubinin@iam.dvo.ru

Поступило 28 сентября 2011 г.