Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 392, 2011 г.

О. Л. Виноградов, В. В. Жук

ОЦЕНКИ ФУНКЦИОНАЛОВ С ИЗВЕСТНЫМ КОНЕЧНЫМ НАБОРОМ МОМЕНТОВ ЧЕРЕЗ ОТКЛОНЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ, ПОСТРОЕННЫХ НА ОСНОВЕ СРЕДНИХ СТЕКЛОВА И КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

§1. Введение

1.1. Обзор результатов работы. Пусть C – пространство 2π-периодических непрерывных функций с равномерной нормой, $E_n(f)$ – наилучшее приближение функции f тригонометрическими многочленами порядка, меньшего n,

$$\delta_t^r f(x) = \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} C_r^k \, f\Big(x + \frac{rt}{2} - kt\Big)$$

– центральная разность r-го порядка функции f с шагом t,

$$\omega_r(f,h) = \sup_{|t|\leqslant h} \|\delta_t^r f\|$$

– модуль непрерывности функции f с шагом h.

В теории аппроксимации известно много неравенств типа

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=1}^{N} D_k \Psi_k(f), \tag{1.1}$$

где Φ и Ψ_k – функционалы, заданные на пространстве C или его подмножестве. При этом функционалы Ψ_k часто тесно связаны с модулями непрерывности. Вопрос о постоянных D_k в таких неравенствах является предметом специального исследования. Как правило, этот вопрос очень труден, в связи с чем или он вовсе не обсуждается, или для постоянных устанавливаются довольно грубые оценки.

Ключевые слова: наилучшее приближение, модуль непрерывности, точные константы, функции Стеклова.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП Минобрнауки РФ (грант 2010-1.1-111-128-033).

Классическим примером результатов вида (1.1) служит обобщенная теорема Джексона

$$E_n(f) \leqslant D_r(\gamma)\,\omega_r\Big(f, \frac{\gamma\pi}{n}\Big). \tag{1.2}$$

Сейчас мы на примере неравенства (1.2) обсудим один прием, позволяющий устанавливать оценки типа (1.1) для широкого круга функционалов Φ.

Пусть $S_h f$ – функция Стеклова первого порядка функции f с шагом h, то есть

$$S_h f(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{-h/2}^{h/2} f(x+t)\,dt.$$

Оператор S_h^r называется оператором Стеклова порядка r с шагом h и чаще в литературе обозначается $S_{h,r}$. Функции Стеклова могут быть записаны в виде

$$S_h^r f = \frac{1}{h^r}\delta_h^r f^{(-r)},$$

где $f^{(-r)}$ – r-я первообразная функции f, или

$$S_h^r f(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x+th)\psi_r(t)\,dt,$$

где ψ_r – ядро Стеклова, обладающее свойствами: $\psi_r \geqslant 0$, ψ_r четно, $\int\limits_{\mathbb{R}} \psi_r = 1$, $\operatorname{supp}\,\psi_r = \big[-\frac{r}{2}, \frac{r}{2}\big]$. Отправляясь от функций Стеклова, построим аппроксимирующий агрегат

$$\begin{aligned} S_{h,r,m} f &= \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^m (-1)^{j-1} C_{2m}^{m-j} S_{jh}^r f \\ &= f + \frac{2(-1)^{m-1}}{C_{2m}^m}\int\limits_{\mathbb{R}_+} \delta_{th}^{2m} f \psi_r(t)\,dt \\ &= \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^m (-1)^{j-1}\frac{C_{2m}^{m-j}}{(jh)^r}\delta_{jh}^r f^{(-r)}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Очевидно, что справедлива оценка

$$\big\|f - S_{h,r,m} f\big\| \leqslant \frac{2}{C_{2m}^m}\int\limits_{\mathbb{R}_+} \big\|\delta_{th}^{2m} f\big\|\psi_r(t)\,dt \leqslant \frac{1}{C_{2m}^m}\omega_{2m}\Big(f, \frac{rh}{2}\Big). \tag{1.4}$$

Положим $U = S_{h,r,m}$ и представим функцию f по формуле

$$f = \sum_{k=0}^{q-1} U^k(f - Uf) + U^q f,$$

где $rq \geqslant 2m$. По неравенству треугольника

$$E_n(f) \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} E_n\big(U^k(f - Uf)\big) + E_n(U^q f).$$

Оценим каждое слагаемое в сумме, пользуясь известными неравенствами [1, с. 162, теорема 4.1.4]:

$$E_n(f) \leqslant \frac{\mathcal{K}_s}{n^s} E_n(f^{(s)}), \tag{1.5}$$

где

$$\mathcal{K}_s = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k(s+1)}}{(2k+1)^{s+1}}$$

– константы Фавара. Неравенства (1.5) и их аналоги для производных сопряженных функций позволяют варьировать оценки. Мы ограничимся применением неравенств (1.5) при $s = rk$. Пользуясь последним выражением в равенстве (1.3), имеем:

$$\begin{aligned} E_n\big(U^k(f - Uf)\big) &\leqslant \frac{\mathcal{K}_{rk}}{n^{rk}} E_n\Big(\big(U^k(f - Uf)\big)^{(rk)}\Big) \\ &\leqslant \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(nh)^{rk}} \nu_{r,m,k} E_n\big(f - S_{h,r,m} f\big), \end{aligned} \tag{1.6}$$

где величины $\nu_{r,m,k}$ зависят только от выписанных аргументов. При оценке $E_n(U^q f)$ заметим, что $\big(S^q_{h,r,m} f\big)^{(rq)}$ может быть представлено в виде $\frac{1}{h^{rq}} W^q_{h,r,m} \delta^{rq}_h f$, где $W_{h,r,m}$ – сумматорный оператор с коэффициентами, не зависящими от h, и, следовательно,

$$E_n(U^q f) \leqslant \frac{\mathcal{K}_{rq}}{(nh)^{rq}} \mu_{r,m,q} E_n\big(\delta^{rq}_h f\big), \tag{1.7}$$

где величины $\mu_{r,m,q}$ зависят только от выписанных аргументов.

Складывая неравенства (1.6) и (1.7), получаем соотношение

$$E_n(f) \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(nh)^{rk}} \nu_{r,m,k} E_n\big(f - S_{h,r,m} f\big) + \frac{\mathcal{K}_{rq}}{(nh)^{rq}} \mu_{r,m,q} E_n\big(\delta^{rq}_h f\big).$$

Коэффициенты $\nu_{r,m,k}$ и $\mu_{r,m,q}$ могут быть вычислены или хорошо оценены. Учитывая оценку (1.4), получаем:

$$E_n(f) \leqslant \frac{1}{C_{2m}^m} \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(nh)^{rk}} \nu_{r,m,k}\, \omega_{2m}\Big(f, \frac{rh}{2}\Big) + \frac{\mathcal{K}_{rq}}{(nh)^{rq}} \mu_{r,m,q} 2^{rq-2m} \big\|\delta_h^{2m} f\big\|.$$

Подставляя $r = 2$ и $h = \frac{\gamma\pi}{n}$, приходим к неравенству (1.2) с постоянными, которые оказываются в определенном смысле близки к наилучшим при некоторых значениях параметров.

Отметим, что хотя при установлении обобщенной теоремы Джексона мы ограничились применением операторов $S_{h,r,m}$ при $r = 2$, изучение этих операторов представляет самостоятельный интерес и при произвольном r. Они интересны и как аппарат приближения с финитным ядром, гладкость которого возрастает с ростом r, и как источник формул численного дифференцирования, когда для r-й производной остаточный член оценивается через $\omega_{2m}(f^{(r)})$.

Проведенные рассуждения допускают широкие обобщения и позволяют с единой точки зрения рассматривать вопросы теории аппроксимации, которые раньше изучались вне связи друг с другом. В частности, это относится к вопросам приближения функций, заданных на оси, в том числе периодических, на полуоси и на отрезке. В связи с этим мы строим изложение следующим образом: сначала результаты устанавливаются в абстрактном виде для пространств с полунормой и операторов в таких пространствах, затем формулируются частные случаи общих теорем, после чего приводятся некоторые их приложения. Мы планируем посвятить приложениям общих результатов к конкретным методам приближения ряд публикаций. Данная работа перекликается со статьями авторов [2, 3]. В [3], в частности, изложена история вопроса, относящаяся к обобщенной теореме Джексона.

1.2. Обозначения. Далее, в дополнение к уже введенным обозначениям, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_+$, $\mathbb{N}$ – множества вещественных, неотрицательных вещественных, целых, неотрицательных целых, натуральных чисел соответственно; $[a : b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}$.

Мы используем следующие обозначения операторов: I – тождественный оператор, T^h – оператор сдвига на шаг h, то есть $T^h f =$

$f(\cdot+h)$; операторы центральной разности и операторы Стеклова определены в пункте 1.1; D – оператор дифференцирования; если f – локально суммируемая на промежутке функция, $\alpha \in \mathbb{N}$, то $D^{-\alpha}f$ означает произвольную первообразную порядка α функции f. В выражениях вида $\delta_h^\alpha D^{-\alpha} f$ уточнение не требуется, так как результат не зависит от выбора первообразной. Пусть еще J – оператор тригонометрического сопряжения или преобразование Гильберта; см., например, [4, с. 170, п. 79] и [5, с. 243, §6.1]; вместо Jf часто употребляется обозначение $\widetilde{f}$.

Пространства функций обозначаются: $UCB(\mathbb{R})$ – пространство ограниченных равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций, а C – пространство 2π-периодических непрерывных функций, с равномерными нормами $\|\cdot\| = \|\cdot\|_\infty$; если $1 \leqslant p < \infty$, то $L_p(\mathbb{R})$ – пространство измеримых, суммируемых на оси с p-й степенью, а L_p – пространство измеримых, 2π-периодических, суммируемых на периоде с p-й степенью функций f, с нормами $\|f\|_p = \left(\int\limits_E |f|^p\right)^{1/p}$, где $E = \mathbb{R}$ или $[-\pi, \pi]$ соответственно; $L_\infty(\mathbb{R})$ – пространство измеримых существенно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f с нормой

$$\|f\|_\infty = \operatorname{vrai\,sup}_{x\in\mathbb{R}} |f(x)|,$$

L_∞ – подпространство 2π-периодических функций из $L_\infty(\mathbb{R})$; $L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ – множество функций, принадлежащих $L_p(E)$ для каждого отрезка E. Если $r \in \mathbb{N}$, то $W_p^{(r)}(\mathbb{R})$ и $W_{p,\mathrm{loc}}^{(r)}(\mathbb{R})$ – множества функций, принадлежащих $L_p(\mathbb{R})$ и $L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ и являющихся r-кратными интегралами от функций из $L_p(\mathbb{R})$ и $L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ соответственно; $W_p^{(0)}(\mathbb{R}) = L_p(\mathbb{R})$, $W_{p,\mathrm{loc}}^{(0)}(\mathbb{R}) = L_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$. Аналогично определяются классы $W_p^{(r)}$ периодических функций. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть $\mathfrak{M}$ – замкнутое подпространство пространства $L_p(\mathbb{R})$ $(1 \leqslant p < \infty)$ или пространства $UCB(\mathbb{R})$ $(p = \infty)$, P – полунорма, заданная на $\mathfrak{M}$. Если выполняются условия:

1) пространство инвариантно относительно сдвига, т.е. для любых $f \in \mathfrak{M}$ и $h \in \mathbb{R}$ будет $T^h f \in \mathfrak{M}$ и $P(T^h f) = P(f)$,

2) существует такая постоянная B, что $P(f) \leqslant B\|f\|_p$ для всех $f \in \mathfrak{M}$,

то будем говорить, что пространство $(\mathfrak{M}, P)$ принадлежит классу $\mathcal{B}$. Примерами пространств класса $\mathcal{B}$ являются: $\big(UCB(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$, $(L_p(\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$ $(1 \leqslant p < \infty)$, пространства периодических функций $\big(C, \|\cdot\|_p\big)$ $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$, а также более общие пространства равномерно непрерывных почти-периодических функций [6], показатели которых принадлежат фиксированному множеству, с различными нормами (равномерной, Степанова, Вейля, Безиковича). Модуль непрерывности порядка r функции f относительно полунормы P определяется равенством

$$\omega_r(f,h)_P = \sup_{0\leqslant t\leqslant h} P\big(\delta_t^r(f)\big).$$

Индекс p у наилучшего приближения, модуля непрерывности и т.п. означает, что $P(f) = \|f\|_p$.

Если $s \in \mathbb{Z}_+$, то положим

$$\mathfrak{M}^{(s)} = \big\{f \in W^{(s)}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}) \cap \mathfrak{M} : D^s f \in \mathfrak{M}\big\},$$
$$\widetilde{\mathfrak{M}}^{(s)} = \big\{f \in \mathfrak{M} : Jf \in W^{(s)}_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}),\ \ D^s Jf \in \mathfrak{M}\big\};$$

если $s \in \mathbb{N}$, то положим $\mathfrak{M}^{(-s)} = \mathfrak{M}$,

$$\widetilde{\mathfrak{M}}^{(-s)} = \big\{f \in \mathfrak{M} : \forall h > 0\ JS_h^s f \in \mathfrak{M}\big\}.$$

Отметим, что если $\mathfrak{M}$ – замкнутое инвариантное относительно сдвига подпространство пространства C или L_p где $p \in [1, +\infty)$, то $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(-s)} = \mathfrak{M}$ при всех $s \in \mathbb{N}$, поскольку $JS_h^s f$ есть свертка f с суммируемым ядром [7]. При всех $s \in \mathbb{Z}$ обозначим $\mathfrak{M}^{(s,0)} = \mathfrak{M}^{(s)}$, $\mathfrak{M}^{(s,1)} = \widetilde{\mathfrak{M}}^{(s)}$.

Если $\alpha \in \mathbb{N}$, то запись $\delta_h^\alpha D^{-\alpha} Jf$ будет означать то же, что и $J\delta_h^\alpha D^{-\alpha} f$. В таком же смысле можно говорить о модуле непрерывности функции $D^{-\alpha} Jf$. Запись $\delta_h^\alpha D^{-\alpha} Jf$ можно понимать и буквально, трактуя первообразную в смысле обобщенных функций. Это соглашение позволяет единым образом записывать производные и первообразные сопряженных функций, не обращая винмание на порядок операций.

Считаем, что композиция $G \circ F$ определена на множестве тех x из области определения F, для которых $F(x)$ принадлежит области определения G. Функции доопределяются в точке устранимого разрыва по непрерывности; в других случаях символ $\frac{0}{0}$ понимается как 0. Предупредим читателя, что мы отказываемся от общепринятого соглашения $0 \cdot (+\infty) = 0$ и полагаем $0 \cdot (+\infty) = +\infty$. Поясним это соглашение.

Если $(\mathfrak{M}, P)$ – пространство с полунормой, $\mathfrak{N}$ – подпространство $\mathfrak{M}$, $U\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ – линейный оператор, то полунорма оператора U определяется формулой

$$N_P(U) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \frac{P(Uf)}{P(f)}.$$

Из определения ясно, что для всех $f \in \mathfrak{N}$ верно неравенство

$$P(Uf) \leqslant N_P(U)P(f). \tag{1.8}$$

Если P – норма, то из равенства $P(f) = 0$ следует $f = 0$, а тогда и $P(Uf) = 0$; поэтому при обычном соглашении $0 \cdot (+\infty) = 0$ неравенство (1.8) трактуется как равенство $0 = 0$, даже если $N_P(U) = +\infty$. Однако, если P – всего лишь полунорма, то при $N_P(U) = +\infty$ из равенства $P(f) = 0$ нельзя заключить, что $P(Uf) = 0$. Поэтому, применяя неравенства вида (1.8), следует либо оговорить, что $N_P(U) < +\infty$, либо принять соглашение $0 \cdot (+\infty) = +\infty$. Для упрощения формулировок мы выбрали последний способ. Следует, однако, иметь в виду, что выбранное соглашение не позволяет вносить нулевой множитель под знак расходящегося положительного ряда.

Если произведение операторов UV имеет смысл, то

$$N_P(UV) \leqslant N_P(U)N_P(V).$$

Пусть еще $\mathcal{F}(\mathfrak{M})$ – множество полуаддитивных функционалов $\Phi\colon \mathfrak{M} \to \mathbb{R}_+$, то есть таких, что $\Phi(f + g) \leqslant \Phi(f) + \Phi(g)$ для любых $f, g \in \mathfrak{M}$. Если при этом $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, $U\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$ – линейный оператор, то полагаем

$$N_P(\Phi, U) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} \frac{\Phi(f)}{P(Uf)}.$$

Из определения следует, что для всех $f \in \mathfrak{N}$ верно неравенство

$$\Phi(f) \leqslant N_P(\Phi, U)P(Uf). \tag{1.9}$$

§2. Общие оценки для операторов в пространствах с полунормой

Предлагаемая общая схема оценки функционалов основана на следующем тождестве.

Лемма 2.1. *Пусть U – линейный оператор в векторном пространстве, $p, q \in \mathbb{Z}_+$. Тогда*

$$I = \left(\sum_{k=0}^{q} C_{p+k}^{p} U^k\right)(I-U)^{p+1} + \left(\sum_{l=0}^{p} C_{q+l}^{q}(I-U)^l\right)U^{q+1}. \tag{2.1}$$

Доказательство. Докажем, что многочлен

$$P(z) = 1 - \left(\sum_{k=0}^{q} C_{p+k}^{p} z^k\right)(1-z)^{p+1} - \left(\sum_{l=0}^{p} C_{q+l}^{q}(1-z)^l\right)z^{q+1}$$

нулевой; отсюда и будет следовать равенство (2.1) для многочлена от оператора U. Обозначим

$$T_q(z) = \sum_{k=0}^{q} C_{p+k}^{p} z^k, \quad S_p(z) = \sum_{l=0}^{p} C_{q+l}^{q}(1-z)^l.$$

Сумма T_q есть многочлен Тейлора порядка q функции $z \mapsto (1-z)^{-p-1}$ с центром в нуле. Поэтому все производные функции

$$z \mapsto 1 - T_q(z)(1-z)^{p+1} = (1-z)^{p+1}\big((1-z)^{-p-1} - T_q(z)\big)$$

порядка $l \in [0:q]$ в точке 0 равны нулю. Для функции $z \mapsto S_p(z)z^{q+1}$ последнее очевидно. Следовательно, $P^{(l)}(0) = 0$ при всех $l \in [0:q]$.

Аналогично, заменяя z на $1-z$ и меняя p и q ролями, заключаем, что $P^{(k)}(1) = 0$ при всех $k \in [0:p]$. Поскольку многочлен P имеет не менее $p+q+2$ корней с учетом кратности, а его степень не больше $p+q+1$, он нулевой. □

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{M}$ – векторное пространство, $\mathfrak{N}$ – подпространство $\mathfrak{M}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{N})$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, P_k – полунормы на $\mathfrak{M}$, $U\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, $A_k\colon U^k(\mathfrak{N}) \to \mathfrak{M}$ – линейные операторы. Тогда для всех $f \in \mathfrak{N}$*

$$\Phi\left(f - U^q \sum_{l=0}^{p} C_{q-1+l}^{q-1}(I-U)^l f\right) \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} C_{p+k}^{p} N_{P_k}(\Phi, A_k) P_k\big(A_k U^k (I-U)^{p+1} f\big).$$

Доказательство. Применим лемму 2.1, заменив параметр q на $q-1$. По полуаддитивности функционала Φ имеем:

$$\Phi\biggl(f - U^q \sum_{l=0}^{p} C_{q-1+l}^{q-1}(I-U)^l f\biggr) = \Phi\biggl(\sum_{k=0}^{q-1} C_{p+k}^{p} U^k (I-U)^{p+1} f\biggr)$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{q-1} \Phi\bigl(C_{p+k}^{p} U^k (I-U)^{p+1} f\bigr).$$

Применяя к каждому слагаемому оценку (1.9), получаем требуемое. □

Теорема 2.1. *Пусть $\mathfrak{M}$ – векторное пространство, $\mathfrak{N}$ – подпространство $\mathfrak{M}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{N})$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, P_k – полунормы на $\mathfrak{M}$, $U\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, $A_k\colon U^k(\mathfrak{N}) \to \mathfrak{M}$ – линейные операторы. Тогда для всех $f \in \mathfrak{N}$*

$$\begin{aligned}\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} C_{p+k}^{p} N_{P_k}(\Phi, A_k) P_k\bigl(A_k U^k (I-U)^{p+1} f\bigr) \\ + N_{P_q}(\Phi, A_q) P_q\biggl(A_q U^q \sum_{l=0}^{p} C_{q-1+l}^{q-1}(I-U)^l f\biggr).\end{aligned} \tag{2.2}$$

Если, кроме того, для всех $g \in \mathfrak{N}$ будет

$$C_{p+q}^{p} N_{P_q}(\Phi, A_q) P(A_q U^q g) \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.3}$$

то для всех $f \in \mathfrak{N}$

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{p+k}^{p} N_{P_k}(\Phi, A_k) P_k\bigl(A_k U^k (I-U)^{p+1} f\bigr). \tag{2.4}$$

Доказательство. 1. Докажем неравенство (2.2). Применим лемму 2.1, заменив параметр q на $q-1$. По полуаддитивности функционала Φ имеем:

$$\Phi(f) \leqslant \Phi\biggl(\sum_{k=0}^{q-1} C_{p+k}^{p} U^k (I-U)^{p+1} f\biggr) + \Phi\biggl(U^q \sum_{l=0}^{p} C_{q-1+l}^{q-1}(I-U)^l f\biggr).$$

Остается оценить первое слагаемое по лемме 2.2, а второе – по неравенству (1.9).

2. Докажем неравенство (2.4). Устремим в правой части неравенства (2.2) q к ∞. Первая сумма стремится к сумме ряда в правой

части (2.4). Докажем, что оставшееся слагаемое стремится к нулю. Оно не превосходит суммы

$$\sum_{l=0}^{p} C_{q-1+l}^{q-1} \lambda_{q,l}, \tag{2.5}$$

где

$$\lambda_{q,l} = N_P(\Phi, A_q) P(A_q U^q (I-U)^l f).$$

Из условия (2.3) следует, что $C_{p+q}^{p} \lambda_{q,l} \to 0$ при $q \to \infty$. При всех $l \in [0{:}\,p]$, $q \in \mathbb{N}$ верно неравенство $C_{q-1+l}^{q-1} \leqslant C_{p+q}^{p}$, поскольку

$$\frac{C_{q-1+l}^{q-1}}{C_{p+q}^{p}} = \frac{p}{p+q} \cdot \ldots \cdot \frac{l+1}{l+1+q} \cdot \frac{q}{l+q} \leqslant 1.$$

Поэтому каждое слагаемое в сумме (2.5), а значит, и вся сумма стремится к нулю. □

Замечание 2.1. В лемме 2.2 и теореме 2.1 при вычислении величин $N_{P_k}(\Phi, A_k)$ можно брать супремум не по множеству $U^k(\mathfrak{N})$, как в их определении, а по его подмножеству $U^k(I-U)(\mathfrak{N})$. Далее мы пренебрегаем этой возможной выгодой.

Сформулируем варианты леммы 2.2 и теоремы 2.1, в которых $p = 0$, а все полунормы P_k совпадают. При $p = 0$ равенство (2.1) после замены q на $q-1$ принимает вид

$$I = \sum_{k=0}^{q-1} U^k (I-U) + U^q.$$

Общие утверждения при $p > 0$ в этой работе применяться не будут. Случай разных полунорм найдет применение в §5 о приближении сплайнами.

Лемма 2.3. *Пусть $(\mathfrak{M}, P)$ – пространство с полунормой, $\mathfrak{N}$ – подпространство $\mathfrak{M}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{N})$, $q \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $U\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, $A_k\colon U^k(\mathfrak{N}) \to \mathfrak{M}$ – линейные операторы. Тогда для всех $f \in \mathfrak{N}$*

$$\Phi\bigl(f - U^q f\bigr) \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} N_P(\Phi, A_k) P\bigl(A_k U^k (I-U) f\bigr).$$

Теорема 2.2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P)$ *– пространство с полунормой,* $\mathfrak{N}$ *– подпространство* $\mathfrak{M}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{N})$, $q \in \mathbb{N}$, $U\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$, $A_k\colon U^k(\mathfrak{N}) \to \mathfrak{M}$ *– линейные операторы. Тогда для всех* $f \in \mathfrak{N}$

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} N_P(\Phi, A_k) P\big(A_k U^k (I-U) f\big) + N_P(\Phi, A_q) P\big(A_q U^q f\big).$$

Если, кроме того, для всех $g \in \mathfrak{N}$ *будет*

$$N_P(\Phi, A_q) P(A_q U^q g) \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{2.6}$$

то для всех $f \in \mathfrak{N}$

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} N_P(\Phi, A_k) P\big(A_k U^k (I-U) f\big).$$

В приложениях теоремы 2.1 операторы определенным образом раскладываются на множители. При этом можно сформулировать условие, которое влечет соотношение (2.6) и удобнее для проверки.

Теорема 2.3. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P)$ *– пространство с полунормой,* $\mathfrak{N}$ *– подпространство* $\mathfrak{M}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{N})$, $q \in \mathbb{N}$, $U\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $U(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{N}$, $C : \mathfrak{N} \to \mathfrak{M}$, $CU|_{\mathfrak{N}} = UC$,

$$B_k : C\big(U^k(\mathfrak{N})\big) \to \mathfrak{M}, \quad A_k = B_k C|_{U^k(\mathfrak{N})}, \quad k \in [0\colon q-1], \tag{2.7}$$

$A_q\colon U^q(\mathfrak{N}) \to \mathfrak{M}$, *операторы* U, C, B_k, A_k *линейны. Тогда для всех* $f \in \mathfrak{N}$

$$\begin{aligned} \Phi(f) \leqslant &\sum_{k=0}^{q-1} N_P(\Phi, A_k) P\big(B_k U^k (I-U) C f\big) \\ &+ N_P(\Phi, A_q) P\big(A_q U^q f\big), \end{aligned} \tag{2.8}$$

$$\begin{aligned} \Phi(f) \leqslant &\left(\sum_{k=0}^{q-1} N_P(\Phi, A_k) N_P(B_k U^k)\right) P\big((I-U) C f\big) \\ &+ N_P(\Phi, A_q) P\big(A_q U^q f\big). \end{aligned} \tag{2.9}$$

Если операторы A_k *и* B_k *заданы соотношениями* (2.7) *при всех* $k \in \mathbb{Z}_+$, *то для всех* $f \in \mathfrak{N}$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} N_P(\Phi, A_k) N_P(B_k U^k)\right) P\big((I-U) C f\big). \tag{2.10}$$

Доказательство. Легко убедиться в том, что операторы в условии теоремы определены корректно. Применение теоремы 2.2 и неравенства (1.8) сразу приводит к оценкам (2.8) и (2.9). Докажем неравенство (2.10). Если

$$\sum_{k=0}^{\infty} N_P(\Phi, A_k) N_P(B_k U^k) = +\infty,$$

то оно считается верным в силу соглашения $0 \cdot (+\infty) = 0$. Пусть

$$\sum_{k=0}^{\infty} N_P(\Phi, A_k) N_P(B_k U^k) < +\infty. \tag{2.11}$$

Достаточно проверить выполнение условия (2.6), после чего применить теорему 2.2. Для всех $g \in \mathfrak{N}$

$$P(A_q U^q g) = P(B_q C U^q g) = P(B_q U^q C g) \leqslant N_P(B_q U^q) P(Cg).$$

Из сходимости ряда следует стремление его общего члена к нулю, откуда и вытекает соотношение (2.6). □

Замечание 2.2. Как видно из доказательства теоремы 2.3, при выполнении условия (2.11) для всех $f \in \mathfrak{N}$ справедливо неравенство

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} N_P(\Phi, A_k) P\big(B_k U^k (I - U) C f\big).$$

Далее мы будем опускать это неравенство и формулировать результат в виде (2.10), не упоминая о сходимости ряда.

Особенно важен в теореме 2.3 случай $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$, $C = I$.

Теорема 2.4. *Пусть $(\mathfrak{M}, P)$ – пространство с полунормой, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $q \in \mathbb{N}$, $U \colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$,*

$$A_k : U^k(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{M}, \quad k \in [0 : q],$$

операторы U, A_k линейны. Тогда для всех $f \in \mathfrak{M}$

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} N_P(\Phi, A_k) P\big(A_k U^k (I - U) f\big) + N_P(\Phi, A_q) P\big(A_q U^q f\big),$$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} N_P(\Phi, A_k) N_P(A_k U^k)\right) P\big((I - U) f\big) + N_P(\Phi, A_q) P\big(A_q U^q f\big).$$

Если операторы A_k заданы при всех $k \in \mathbb{Z}_+$, то для всех $f \in \mathfrak{M}$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} N_P(\Phi, A_k) N_P(A_k U^k)\right) P\big((I-U)f\big).$$

В дальнейших приложениях функционал Φ задается на всем пространстве $\mathfrak{M}$.

Сформулируем вариант теоремы 2.4, в котором все операторы A_k суть степени одного оператора.

Теорема 2.5. *Пусть $(\mathfrak{M}, P)$ – пространство с полунормой, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $q \in \mathbb{N}$, $U\colon \mathfrak{M} \to \mathfrak{M}$, $Q\colon U(\mathfrak{M}) \to \mathfrak{M}$ – линейные операторы, причем $QUf = UQf$ для всех $f \in U(\mathfrak{M})$; $R = QU$. Тогда для всех $f \in \mathfrak{M}$*

$$\begin{aligned}
&\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} N_P(\Phi, Q^k) P\big(R^k (I-U)f\big) + N_P(\Phi, Q^q) P(R^q f),\\
&\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} N_P(\Phi, Q^k) N_P(R^k)\right) P\big((I-U)f\big)\\
&\qquad + N_P(\Phi, Q^q) P(R^q f),\\
&\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} N_P(\Phi, Q^k) N_P(R^k)\right) P\big((I-U)f\big).
\end{aligned} \tag{2.12}$$

В работе авторов [2] доказывалась и использовалась часть теоремы 2.5, состоящая из неравенства (2.12) и его уточнения по замечанию 2.2, а также обобщение этих неравенств с произвольным выбором параметра p в лемме 2.1.

§3. Оценки функционалов в пространствах класса $\mathcal{B}$

3.1. Линейные комбинации средних Стеклова и дифференцирование. До сих пор на пространство не накладывалось никаких требований; даже требования, чтобы элементами пространства были функции. В данной работе теорема 2.1 будет применяться в пространствах класса $\mathcal{B}$. Дальнейшая конкретизация теоремы 2.1 связана с выбором операторов и разложением их на множители.

В роли A_k будут выступать операторы D^{s_k} или $D^{s_k} J$, где J – оператор тригонометрического сопряжения. Величины

$$N_P(\Phi, D^s) = \sup_{f \in \mathfrak{M}^{(s)}} \frac{\Phi(f)}{P(D^s f)}, \quad N_P(\Phi, D^s J) = \sup_{f \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(s)}} \frac{\Phi(f)}{P(D^s J f)},$$

называются моментами и сопряженными моментами функционала Φ порядка $s \in \mathbb{Z}_+$ относительно полунормы P. Моменты многих важных функционалов известны точно или оценены, что позволяет применять к таким функционалам теоремы §2.

В роли U будут выступать линейные комбинации средних Стеклова

$$S_{h,r,m} = \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} C_{2m}^{m-j} S_{jh}^r.$$

Как видно из неравенства (1.4) во введении, такой выбор коэффициентов позволяет записать отклонение $I - S_{h,r,m}$ в виде обынтегрированной разности порядка $2m$, что удобно при оценке данного отклонения через модуль непрерывности. Отметим еще, что $S_{h,r,1} = S_h^r$.

Дадим сводку формул, которые используются при дальнейших оценках. Все они очевидным образом вытекают из определений и уже приводились в работе [2]. При операциях с суммами употребляется логическая нотация [8, §2.1]: $[A] = 1$, если утверждение A истинно, $[A] = 0$, если A ложно.

По определению функций Стеклова операторы $S_{h,r,m}$ записываются в виде

$$S_{h,r,m} = \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{C_{2m}^{m-j}}{(jh)^r} \delta_{jh}^r D^{-r}.$$

Следовательно, оператор $V_{h,r,m} = h^r D^r S_{h,r,m}$ сумматорный:

$$\begin{aligned} V_{h,r,m} &= \frac{2}{C_{2m}^m} \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j-1} \frac{C_{2m}^{m-j}}{j^r} \delta_{jh}^r \\ &= \sum_{j \in [1:m],\, l \in [0:r]} (-1)^{l+j-1} C_r^l \frac{C_{2m}^{m-j}}{C_{2m}^m} \frac{2}{j^r} T^{(\frac{r}{2}-l)jh} \qquad (3.1) \\ &= \sum_{s \in \mathbb{R}} B_{r,m,s} T^{sh}, \end{aligned}$$

где

$$B_{r,m,s} = \sum_{j \in [1:m],\, l \in [0:r]} (-1)^{l+j-1} C_r^l \frac{C_{2m}^{m-j}}{C_{2m}^m} \frac{2}{j^r} \left[\left(\frac{r}{2} - l \right) j = s \right]. \qquad (3.2)$$

Из формулы (3.2) видно, что $B_{r,m,s} = 0$ для всех тех $s \in \mathbb{R}$, для которых уравнение $\left(\frac{r}{2} - l\right) j = s$ не имеет решений $j \in [1:m]$, $l \in [0:r]$.

С другой стороны, поскольку

$$\delta_{jh}^r = \sum_{\alpha\in[0:j-1]^r} T^{h\sum\limits_{d=1}^{r}\left(\alpha_d-\frac{j-1}{2}\right)}\delta_h^r,$$

операторы $S_{h,r,m}$ и $V_{h,r,m}$ допускают выделение разностного множителя δ_h^r, и их можно записать в виде

$$S_{h,r,m} = \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{C_{2m}^{m-j}}{(jh)^r}\sum_{\alpha\in[0:j-1]^r} T^{h\sum\limits_{d=1}^{r}\left(\alpha_d-\frac{j-1}{2}\right)}\delta_h^r D^{-r},$$

$$V_{h,r,m} = \delta_h^r W_{h,r,m}, \tag{3.3}$$

$$W_{h,r,m} = \sum_{s\in\mathbb{R}} A_{r,m,s}T^{sh}, \tag{3.4}$$

$$A_{r,m,s} = \frac{2}{C_{2m}^m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j-1}\frac{C_{2m}^{m-j}}{j^r}\varkappa_{r,j,s}, \tag{3.5}$$

где

$$\varkappa_{r,j,s} = \sum_{\alpha\in[0:j-1]^r}\left[\sum_{d=1}^{r}\left(\alpha_d-\frac{j-1}{2}\right)=s\right].$$

Другими словами, $\varkappa_{r,j,s}$ есть число решений $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_r)$ уравнения $\sum\limits_{d=1}^{r}\left(\alpha_d-\frac{j-1}{2}\right)=s$, принадлежащих $[0:j-1]^r$. В [2] показано, что числа $\varkappa_{r,j,s}$ суть коэффициенты тригонометрической суммы

$$\left(\frac{\sin\frac{jt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^r = \sum_{s\in\mathbb{R}}\varkappa_{r,j,s}e^{ist}.$$

Из равенств (3.1) и (3.4) следует, что полунормы операторов $V_{h,r,m}$ и $W_{h,r,m}$ оцениваются по формулам

$$N_P(V_{h,r,m})\leqslant\nu_{r,m},\quad N_P(W_{h,r,m})\leqslant\mu_{r,m}, \tag{3.6}$$

где

$$\nu_{r,m}=\sum_{s\in\mathbb{R}}|B_{r,m,s}|,\quad \mu_{r,m}=\sum_{s\in\mathbb{R}}|A_{r,m,s}|, \tag{3.7}$$

коэффициенты $B_{r,m,s}$ и $A_{r,m,s}$ определяются равенствами (3.2) и (3.5).

Итерации операторов $V_{h,r,m}$ и $W_{h,r,m}$ выражаются равенствами

$$V^k_{h,r,m} = \sum_{s\in\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{R}^k} \left(\prod_{q=1}^{k} B_{r,m,j_q}\right) \left[\sum_{q=1}^{k} j_q = s\right] T^{sh},$$

$$W^k_{h,r,m} = \sum_{s\in\mathbb{R}} \sum_{j\in\mathbb{R}^k} \left(\prod_{q=1}^{k} A_{r,m,j_q}\right) \left[\sum_{q=1}^{k} j_q = s\right] T^{sh},$$

а полунормы этих итераций оцениваются по формулам

$$N_P(V^k_{h,r,m}) \leqslant \nu_{r,m,k} = \sum_{s\in\mathbb{R}} \left| \sum_{j\in\mathbb{R}^k} \left(\prod_{q=1}^{k} B_{r,m,j_q}\right) \left[\sum_{q=1}^{k} j_q = s\right] \right|, \tag{3.8}$$

$$N_P(W^k_{h,r,m}) \leqslant \mu_{r,m,k} = \sum_{s\in\mathbb{R}} \left| \sum_{j\in\mathbb{R}^k} \left(\prod_{q=1}^{k} A_{r,m,j_q}\right) \left[\sum_{q=1}^{k} j_q = s\right] \right|. \tag{3.9}$$

Отметим, что величины $\nu_{r,m,k}$ и $\mu_{r,m,k}$ не зависят от h, что и отражено в обозначениях.

Замечание 3.1. В пространствах $L_\infty(\mathbb{R})$ и $L_1(\mathbb{R})$ неравенства (3.6), (3.8) и (3.9) обращаются в равенства. Поэтому

$$\nu_{r,m,k} \leqslant \nu^k_{r,m}, \quad \mu_{r,m,k} \leqslant \mu^k_{r,m}, \tag{3.10}$$

в чем можно убедиться и прямым вычислением. Кроме того, из формулы (3.3) ясно, что

$$\nu_{r,m,k} \leqslant 2^{rk} \mu_{r,m,k}. \tag{3.11}$$

Полагая в неравенстве (3.11) $k = 1$, а затем возводя его в степень k, получаем оценку

$$\nu^k_{r,m} \leqslant 2^{rk} \mu^k_{r,m}. \tag{3.12}$$

Замечание 3.2. Как установлено в [2], при $r = 2$ неравенства (3.10)–(3.12) обращаются в равенства. В этом случае оценки, содержащие величины $\mu_{r,m,k}$ и разности функции, усиливают оценки, содержащие величины $\nu_{r,m,k}$. Вообще говоря, эти оценки несравнимы в том смысле, что каждая из двух правых частей может быть меньше другой для разных функций. Приведем отдельно упрощенное выражение для $\nu_{2,m}$:

$$\nu_{2,m} = \frac{8}{C^m_{2m}} \sum_{l=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor} \frac{C^{m-2l-1}_{2m}}{(2l+1)^2},$$

где $\lfloor x \rfloor$ – целая часть числа x.

Замечание 3.3. Если операторы рассматривать в пространствах τ-периодических функций, то суммировать сдвиги можно по $s \in [0, \tau/h)$ и равенства в логических скобках понимать по модулю τ/h. При такой записи замечание 3.1 будет верно в пространствах τ-периодических функций L_1 и L_∞.

Замечание 3.4. Отметим обобщение формулы (3.1):

$$D^s S^k_{h,r,m} = \frac{1}{h^{rk}} W^k_{h,r,m} \delta_h^{rk} D^{s-rk}. \tag{3.13}$$

3.2. Применение общих теорем к оценке функционалов в пространствах класса $\mathcal{B}$.

Теорема 3.1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\{s_k\}_{k=0}^q \subset \mathbb{Z}_+$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^q \subset \{0,1\}$, $\mathfrak{N} = \bigcap\limits_{k=0}^{q} \mathfrak{M}^{(s_k - rk, \varepsilon_k)}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{N}$

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} \frac{N_P(\Phi, D^{s_k} J^{\varepsilon_k})}{h^{rk}} P\big(W^k_{h,r,m} \delta_h^{rk} D^{s_k - rk} (I - S_{h,r,m}) J^{\varepsilon_k} f\big)$$
$$+ \frac{N_P(\Phi, D^{s_q} J^{\varepsilon_q})}{h^{rq}} P\big(W^q_{h,r,m} \delta_h^{rq} D^{s_q - rq} J^{\varepsilon_q} f\big).$$

Если, кроме того, $\{s_k\}_{k=0}^\infty \subset \mathbb{Z}_+$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^\infty \subset \{0,1\}$, $\mathfrak{N} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathfrak{M}^{(s_k - rk, \varepsilon_k)}$ *и для всех* $g \in \mathfrak{N}$ *будет*

$$\frac{N_P(\Phi, D^{s_q} J^{\varepsilon_q})}{h^{rq}} P\big(W^q_{h,r,m} \delta_h^{rq} D^{s_q - rq} J^{\varepsilon_q} g\big) \underset{q \to \infty}{\longrightarrow} 0, \tag{3.14}$$

то для всех $f \in \mathfrak{N}$

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_P(\Phi, D^{s_k} J^{\varepsilon_k})}{h^{rk}} P\big(W^k_{h,r,m} \delta_h^{rk} D^{s_k - rk} (I - S_{h,r,m}) J^{\varepsilon_k} f\big).$$

Для доказательства следует применить теорему 2.2 и воспользоваться равенством (3.13).

Сформулируем несколько частных случаев теоремы 3.1. В следующей теореме 3.2 параметры подобраны в соответствии с теоремой 2.3.

Теорема 3.2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in [0 : rq+\beta]$, $\varepsilon, \tau \in \{0, 1\}$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{M}^{(\beta,\tau)} \cap \mathfrak{M}^{(\beta-\alpha,\varepsilon)}$

$$\begin{aligned}\Phi(f) \leqslant &\left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{N_P(\Phi, D^{rk+\beta} J^\tau)}{h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta J^\tau f\big) \\ &+ \frac{N_P(\Phi, D^{rq+\beta-\alpha} J^\varepsilon)}{h^{rq}} \mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} D^{\beta-\alpha} J^\varepsilon f\big),\end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}\Phi(f) \leqslant &\sum_{k=0}^{q-1} \frac{N_P(\Phi, D^{rk+\beta} J^\tau)}{h^{rk}} \mu_{r,m,k} P\big(\delta_h^{rk} (I - S_{h,r,m}) D^\beta J^\tau f\big) \\ &+ \frac{N_P(\Phi, D^{rq+\beta-\alpha} J^\varepsilon)}{h^{rq}} \mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} D^{\beta-\alpha} J^\varepsilon f\big).\end{aligned} \tag{3.16}$$

Кроме того, для всех $f \in \mathfrak{M}^{(\beta,\tau)}$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_P(\Phi, D^{rk+\beta} J^\tau)}{h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta J^\tau f\big). \tag{3.17}$$

Замечание 3.5. Ряд в (3.17) степенной относительно переменной $\frac{1}{h}$. По формуле Коши–Адамара достаточным условием его сходимости служит неравенство

$$h > \varlimsup_{k\to\infty} \big(N_P(\Phi, D^{rk+\beta} J^\tau) \nu_{m,r,k}\big)^{1/rk}$$

и, тем более, неравенство

$$h > \nu_{m,r}^{1/r} \varlimsup_{k\to\infty} N_P^{1/rk}(\Phi, D^{rk+\beta} J^\tau).$$

Согласно замечанию 2.2, при условии

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_P(\Phi, D^{rk+\beta} J^\tau)}{h^{rk}} \nu_{r,m,k} < +\infty \tag{3.18}$$

верно неравенство

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_P(\Phi, D^{rk+\beta} J^\tau)}{h^{rk}} P\big(W_{h,r,m}^k \delta_h^{rk} (I - S_{h,r,m}) D^\beta J^\tau f\big),$$

из которого следует неравенство

$$\Phi(f) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_P(\Phi, D^{rk+\beta} J^\tau)}{h^{rk}} \mu_{r,m,k} P\big(\delta_h^{rk} (I - S_{h,r,m}) D^\beta J^\tau f\big). \tag{3.19}$$

Условие (3.18), вообще говоря, не будет достаточным для сходимости ряда в неравенстве (3.19), так что правая часть последнего может обратиться в $+\infty$. Для сходимости ряда в неравенстве (3.19) достаточно заменить условие (3.18) на условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_P(\Phi, D^{rk+\beta} J^\tau)}{h^{rk}} 2^{rk} \mu_{r,m,k} < +\infty. \tag{3.20}$$

Для сходимости ряда в (3.20) достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$h > 2 \varlimsup_{k\to\infty} \bigl(N_P(\Phi, D^{rk+\beta} J^\tau) \mu_{m,r,k}\bigr)^{1/rk}$$

и, тем более, неравенство

$$h > 2\mu_{m,r}^{1/r} \varlimsup_{k\to\infty} N_P^{1/rk}(\Phi, D^{rk+\beta} J^\tau).$$

Если известны явные оценки моментов, то условия сходимости можно упростить, вычислив пределы, что и будет сделано для конкретных приложений.

Замечание 3.6. В последующих утверждениях мы будем формулировать только неравенства вида (3.15) и (3.17), то есть те, которые содержат в правых частях величины $\nu_{r,m,k}$. Эти оценки более выгодны, если далее оценивать правые части через модули непрерывности. Неравенства вида (3.16) и (3.19) выводятся из теорем вида 3.1 единым методом, и читатель при желании легко сформулирует их самостоятельно.

В данной работе будет рассматриваться только случай $\alpha = 0$. Приложения, требующие перехода к первообразным и сопряженным функциям от них, будут исследованы в отдельной работе.

Теорема 3.3. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{M}^{(\beta)}$

$$\begin{aligned}
\Phi(f) &\leqslant \biggl(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{N_P(\Phi, D^{rk+\beta})}{h^{rk}} \nu_{r,m,k}\biggr) P\bigl((I - S_{h,r,m}) D^\beta f\bigr) \\
&\quad + \frac{N_P(\Phi, D^{rq+\beta})}{h^{rq}} \mu_{r,m,q} P\bigl(\delta_h^{rq} D^\beta f\bigr), \\
\Phi(f) &\leqslant \biggl(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_P(\Phi, D^{rk+\beta})}{h^{rk}} \nu_{r,m,k}\biggr) P\bigl((I - S_{h,r,m}) D^\beta f\bigr).
\end{aligned}$$

Сформулируем важный случай $\beta = 0$ отдельно.

Теорема 3.4. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $h > 0$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{M}$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{N_P(\Phi, D^{rk})}{h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m})f\big) + \frac{N_P(\Phi, D^{rq})}{h^{rq}} \mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} f\big),$$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_P(\Phi, D^{rk})}{h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m})f\big).$$

Для $r = 2$, $m = q$ и пространств периодических функций вытекающие из теоремы 3.4 оценки функционалов через модули непрерывности были анонсированы в [9].

Выделим еще случай, когда оценка ведется через производные сопряженной функции.

Теорема 3.5. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $\Phi \in \mathcal{F}(\mathfrak{M})$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для всех* $f \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(\beta)}$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{N_P(\Phi, D^{rk+\beta} J)}{h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta J f\big) + \frac{N_P(\Phi, D^{rq+\beta} J)}{h^{rq}} \mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} D^\beta J f\big),$$

$$\Phi(f) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{N_P(\Phi, D^{rk+\beta} J)}{h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta J f\big).$$

§4. Оценки наилучших приближений целыми функциями конечной степени и их реализация линейными методами

4.1. Оценки наилучших приближений. При $\sigma > 0$ обозначим через $A_{\sigma-0}(f)_P$ ($A_\sigma(f)_P$) наилучшее приближение функции $f \in \mathfrak{M}$ множеством $\mathbf{E}_{\sigma-0}$ ($\mathbf{E}_\sigma$) целых функций степени меньше (соответственно, не больше) σ в пространстве $(\mathfrak{M}, P)$. Применим доказанные утверждения к функционалам $A_{\sigma-0}(\cdot)_P$ и $A_\sigma(\cdot)_P$. Напомним, что константы Фавара $\mathcal{K}_r$ и сопряженные константы Фавара $\widetilde{\mathcal{K}}_r$ определяются

равенствами

$$\mathcal{K}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k(r+1)}}{(2k+1)^{r+1}}, \quad \widetilde{\mathcal{K}}_r = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{kr}}{(2k+1)^{r+1}},$$

и положим $\mathcal{K}_{r,0} = \mathcal{K}_r$, $\mathcal{K}_{r,1} = \widetilde{\mathcal{K}}_r$. Коэффициенты $\nu_{r,m,k}$ и $\mu_{r,m,k}$ задаются формулами (3.8) и (3.9) и могут быть оценены с помощью замечания 3.1.

Известны неравенства типа Ахиезера–Крейна–Фавара; см. [4, с. 241, п. 101] и [7]: если $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in \mathfrak{M}^{(r)}$, то

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} P(D^r f), \tag{4.1}$$

а если $r \in \mathbb{N}$, $f \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(r)}$, то

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \frac{\widetilde{\mathcal{K}}_r}{\sigma^r} P(D^r J f). \tag{4.2}$$

В правых частях этих неравенств $P(\cdot)$ можно заменить на $A_{\sigma-0}(\cdot)_P$. Аналогичное усиление справедливо, если заменить $A_{\sigma-0}$ на A_σ. Кроме того, если функция f ортогональна $\mathbf{E}_\sigma$, то левые части (4.1) и (4.2) можно заменить на $P(f)$.

Нумерация теорем ведется следующим образом: если общая теорема из пункта 3.2 имеет номер 3.x, то ее конкретизация для наилучших приближений имеет номер 4.1.x.

Теорема 4.1.1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $\sigma, h > 0$, $\{s_k\}_{k=0}^q \subset \mathbb{Z}_+$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^q \subset \{0,1\}$; *если* $s_k = 0$, *то* $\varepsilon_k = 0$; $\mathfrak{N} = \bigcap\limits_{k=0}^{q} \mathfrak{M}^{(s_k - rk, \varepsilon_k)}$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{N}$

$$\begin{aligned} A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant{}& \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{s_k,\varepsilon_k}}{\sigma^{s_k} h^{rk}} A_{\sigma-0}\big(W_{h,r,m}^k \delta_h^{rk} D^{s_k - rk}(I - S_{h,r,m}) J^{\varepsilon_k} f\big)_P \\ &+ \frac{\mathcal{K}_{s_q,\varepsilon_q}}{\sigma^{s_q} h^{rq}} A_{\sigma-0}\big(W_{h,r,m}^q \delta_h^{rq} D^{s_q - rq} J^{\varepsilon_q} f\big)_P, \end{aligned} \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned} A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant{}& \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{s_k,\varepsilon_k}}{\sigma^{s_k} h^{rk}} P\big(W_{h,r,m}^k \delta_h^{rk} D^{s_k - rk}(I - S_{h,r,m}) J^{\varepsilon_k} f\big) \\ &+ \frac{\mathcal{K}_{s_q,\varepsilon_q}}{\sigma^{s_q} h^{rq}} P\big(W_{h,r,m}^q \delta_h^{rq} D^{s_q - rq} J^{\varepsilon_q} f\big). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Если, кроме того, $\{s_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \mathbb{Z}_+$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^{\infty} \subset \{0,1\}$; *если* $s_k = 0$, *то* $\varepsilon_k = 0$; $\mathfrak{N} = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathfrak{M}^{(s_k - rk, \varepsilon_k)}$, *и для всех* $g \in \mathfrak{N}$ *будет*

$$\frac{1}{\sigma^{s_q} h^{rq}} A_{\sigma-0}\big(W^q_{h,r,m} \delta^{rq}_h D^{s_q - rq} J^{\varepsilon_q} g\big)_P \underset{q\to\infty}{\longrightarrow} 0, \tag{4.5}$$

то для всех $f \in \mathfrak{N}$

$$\begin{aligned} &A_{\sigma-0}(f)_P \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_{s_k,\varepsilon_k}}{\sigma^{s_k} h^{rk}} A_{\sigma-0}\big(W^k_{h,r,m} \delta^{rk}_h D^{s_k - rk} (I - S_{h,r,m}) J^{\varepsilon_k} f\big)_P, \end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned} &A_{\sigma-0}(f)_P \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_{s_k,\varepsilon_k}}{\sigma^{s_k} h^{rk}} P\big(W^k_{h,r,m} \delta^{rk}_h D^{s_k - rk} (I - S_{h,r,m}) J^{\varepsilon_k} f\big). \end{aligned} \tag{4.7}$$

В неравенствах (4.3), (4.4), (4.6) *и* (4.7) $A_{\sigma-0}$ *можно заменить на* A_σ. *Для функций* f, *ортогональных* $\mathbf{E}_\sigma$, *левые части неравенств* (4.4) *и* (4.7) *можно заменить на* $P(f)$.

Доказательство. В силу неравенств $1 \leqslant \mathcal{K}_{s,\varepsilon} \leqslant 2$ соотношение (3.14) принимает вид (4.5). Оценки (4.4) и (4.7) получаются, если применить теорему 3.1 к функционалу $\Phi(f) = A_{\sigma-0}(f)_P$ и учесть, что, согласно неравенствам (4.1) и (4.2), $N_P(\Phi, D^s J^\varepsilon) \leqslant \mathcal{K}_{s,\varepsilon}\sigma^{-s}$, за исключением случая $s = 0$, $\varepsilon = 1$. Неравенства (4.3) и (4.6) (формально более сильные, чем (4.4) и (4.7)) получаются, если применить последние к пространству $\big(\mathfrak{M}, A_{\sigma-0}(\cdot)_P\big)$, тоже принадлежащему классу $\mathcal{B}$, и воспользоваться равенством

$$A_{\sigma-0}(f)_{A_{\sigma-0}(\cdot)_P} = A_{\sigma-0}(f)_P.$$

Доказательство для A_σ аналогично.

Неравенства для функций, ортогональных $\mathbf{E}_\sigma$, получаются, если применить уже доказанные неравенства к пространству $\big(\mathfrak{M}^\perp_\sigma, P\big)$ функций из $\mathfrak{M}$, ортогональных $\mathbf{E}_\sigma$ (тоже принадлежащему классу $\mathcal{B}$), и функционалу $\Phi = P$. При этом учитывается, что верны те же оценки для моментов. □

Сформулируем несколько частных случаев теоремы 4.1.1.

Теорема 4.1.2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $\sigma, h > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in [0\colon rq + \beta]$, $\varepsilon, \tau \in \{0,1\}$; *если* $\beta = 0$, *то* $\tau = 0$; *если* $\alpha = rq + \beta$, *то*

$\varepsilon = 0$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{M}^{(\beta,\tau)} \cap \mathfrak{M}^{(\beta-\alpha,\varepsilon)}$

$$\begin{aligned} A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant & \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta,\tau}}{\sigma^{rk+\beta}h^{rk}}\nu_{r,m,k}\right) A_{\sigma-0}\big((I-S_{h,r,m})D^\beta J^\tau f\big)_P \\ & + \frac{\mathcal{K}_{rq+\beta-\alpha,\varepsilon}}{\sigma^{rq+\beta-\alpha}h^{rq}}\mu_{r,m,q} A_{\sigma-0}\big(\delta_h^{rq} D^{\beta-\alpha} J^\varepsilon f\big)_P, \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant & \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta,\tau}}{\sigma^{rk+\beta}h^{rk}}\nu_{r,m,k}\right) P\big((I-S_{h,r,m})D^\beta J^\tau f\big) \\ & + \frac{\mathcal{K}_{rq+\beta-\alpha,\varepsilon}}{\sigma^{rq+\beta-\alpha}h^{rq}}\mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} D^{\beta-\alpha} J^\varepsilon f\big). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Кроме того, для всех $f \in \mathfrak{M}^{(\beta,\tau)}$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \frac{1}{\sigma^\beta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta,\tau}}{(\sigma h)^{rk}}\nu_{r,m,k}\right) A_{\sigma-0}\big((I-S_{h,r,m})D^\beta J^\tau f\big)_P, \tag{4.10}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \frac{1}{\sigma^\beta}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta,\tau}}{(\sigma h)^{rk}}\nu_{r,m,k}\right) P\big((I-S_{h,r,m})D^\beta J^\tau f\big). \tag{4.11}$$

В неравенствах (4.8)–(4.11) $A_{\sigma-0}$ *можно заменить на* A_σ. *Для функций* f, *ортогональных* $\mathbf{E}_\sigma$, *левые части неравенств* (4.9) *и* (4.11) *можно заменить на* $P(f)$.

Теорема 4.1.3. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $\sigma, h > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{M}^{(\beta)}$

$$\begin{aligned} A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant & \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta}}{\sigma^{rk+\beta}h^{rk}}\nu_{r,m,k}\right) A_{\sigma-0}\big((I-S_{h,r,m})D^\beta f\big)_P \\ & + \frac{\mathcal{K}_{rq+\beta}}{\sigma^{rq+\beta}h^{rq}}\mu_{r,m,q} A_{\sigma-0}\big(\delta_h^{rq} D^\beta f\big)_P, \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant & \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta}}{\sigma^{rk+\beta} h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta f\big) \\ & + \frac{\mathcal{K}_{rq+\beta}}{\sigma^{rq+\beta} h^{rq}} \mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} D^\beta f\big), \end{aligned} \tag{4.13}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \frac{1}{\sigma^\beta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) A_{\sigma-0}\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta f\big)_P, \tag{4.14}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \frac{1}{\sigma^\beta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta f\big). \tag{4.15}$$

В неравенствах (4.12)–(4.15) $A_{\sigma-0}$ *можно заменить на* A_σ. *Для функций* f, *ортогональных* $\mathbf{E}_\sigma$, *левые части неравенств* (4.13) *и* (4.15) *можно заменить на* $P(f)$.

Теорема 4.1.4. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $\sigma, h > 0$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{M}$

$$\begin{aligned} A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant & \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) A_{\sigma-0}\big((I - S_{h,r,m}) f\big)_P \\ & + \frac{\mathcal{K}_{rq}}{(\sigma h)^{rq}} \mu_{r,m,q} A_{\sigma-0}\big(\delta_h^{rq} f\big)_P, \end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\begin{aligned} A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant & \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) f\big) \\ & + \frac{\mathcal{K}_{rq}}{(\sigma h)^{rq}} \mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} f\big), \end{aligned} \tag{4.17}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) A_{\sigma-0}\big((I - S_{h,r,m}) f\big)_P, \tag{4.18}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) f\big). \tag{4.19}$$

В неравенствах (4.16)–(4.19) $A_{\sigma-0}$ *можно заменить на* A_σ. *Для функций* f, *ортогональных* $\mathbf{E}_\sigma$, *левые части неравенств* (4.17) *и* (4.19) *можно заменить на* $P(f)$.

Для сравнения укажем, что в работе [2] доказана следующая теорема.

Теорема A. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}_+$, $\sigma > 0$.

(1) *Если* $h > \frac{\nu_{r,m}^{1/r}}{\sigma}$, *то для всех* $f \in \mathfrak{M}$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m}^k\right) A_{\sigma-0}\big((I - S_{h,r,m})^{p+1} f\big)_P, \tag{4.20}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \left(\sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m}^k\right) P\big((I - S_{h,r,m})^{p+1} f\big). \tag{4.21}$$

(2) *Если* $h > \frac{2\mu_{r,m}^{1/r}}{\sigma}$, *то для всех* $f \in \mathfrak{M}$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \mu_{r,m}^k A_{\sigma-0}\big(\delta_h^{rk} (I - S_{h,r,m})^{p+1} f\big)_P, \tag{4.22}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} C_{k+p}^p \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \mu_{r,m}^k P\big(\delta_h^{rk} (I - S_{h,r,m})^{p+1} f\big). \tag{4.23}$$

В неравенствах (4.20)–(4.23) $A_{\sigma-0}$ *можно заменить на* A_σ. *Для функций* f, *ортогональных* $\mathbf{E}_\sigma$, *левые части неравенств* (4.21) *и* (4.23) *можно заменить на* $P(f)$.

Теорема 4.1.5. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $\sigma, h > 0$, $\beta \in \mathbb{N}$. *Тогда для всех* $f \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(\beta)}$

$$\begin{aligned} A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant{}& \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\widetilde{\mathcal{K}}_{rk+\beta}}{\sigma^{rk+\beta} h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) A_{\sigma-0}\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta J f\big)_P \\ &+ \frac{\widetilde{\mathcal{K}}_{rq+\beta}}{\sigma^{rq+\beta} h^{rq}} \mu_{r,m,q} A_{\sigma-0}\big(\delta_h^{rq} D^\beta J f\big)_P, \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant{}& \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\widetilde{\mathcal{K}}_{rk+\beta}}{\sigma^{rk+\beta} h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta J f\big) \\ &+ \frac{\widetilde{\mathcal{K}}_{rq+\beta}}{\sigma^{rq+\beta} h^{rq}} \mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} D^\beta J f\big), \end{aligned} \tag{4.25}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \frac{1}{\sigma^\beta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\mathcal{K}}_{rk+\beta}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) A_{\sigma-0}\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta J f\big)_P, \tag{4.26}$$

$$A_{\sigma-0}(f)_P \leqslant \frac{1}{\sigma^\beta} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\widetilde{\mathcal{K}}_{rk+\beta}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta J f\big). \tag{4.27}$$

В неравенствах (4.24)–(4.27) $A_{\sigma-0}$ *можно заменить на* A_σ. *Для функций* f, *ортогональных* $\mathbf{E}_\sigma$, *левые части неравенств* (4.25) *и* (4.27) *можно заменить на* $P(f)$.

Отметим, что в теореме 4.1.5 исключен случай $\beta = 0$.

В настоящей работе мы не оставляем параметр p свободным в оценках с конечными суммами в духе теоремы 2.1 (ибо в этом случае оценка правой части через модули непрерывности высоких порядков требует дополнительных усилий). Кроме того, мы предпочитаем формулировать оценки в более тонких терминах норм степеней, а не степеней норм сумматорных операторов.

Замечание 4.1. Применим замечание 3.5 к условиям сходимости в теоремах этого пункта. Поскольку $1 \leqslant \mathcal{K}_s$, $\widetilde{\mathcal{K}}_s \leqslant 2$, для рядов вида (4.10) достаточными условиями сходимости будут

$$h > \frac{1}{\sigma} \lim_{k\to\infty} \nu_{m,r,k}^{1/rk}, \quad h > \frac{\nu_{m,r}^{1/r}}{\sigma}.$$

Мы воспользовались тем, что в определении спектрального радиуса верхний предел можно заменить на обычный [10, с. 206, теорема V.4.1]; в данном случае речь идет о спектральном радиусе оператора $V_{h,r,m}$.

4.2. Реализация оценок для наилучших приближений линейными методами. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $\sigma > 0$. Операторами Ахиезера–Крейна–Фавара $X_{\sigma,r}$ и сопряженными операторами Ахиезера–Крейна–Фавара $\widetilde{X}_{\sigma,r}$ называются операторы свертки, функции множителей которых равны [4, п. 87, сс. 101–103]

$$\xi_{\sigma,r}(y) = \begin{cases} \left(\dfrac{y}{2\sigma}\right)^r \sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^{l(r+1)}}{(l+\frac{y}{2\sigma})^r}, & |y| \leqslant \sigma, \\ 0, & |y| > \sigma, \end{cases}$$

$$\widetilde{\xi}_{\sigma,r}(y) = \begin{cases} \left(\dfrac{y}{2\sigma}\right)^r \sum\limits_{l=-\infty}^{\infty} (-1)^{lr} \frac{-\operatorname{sign}(y(l+\frac{y}{2\sigma}))}{(l+\frac{y}{2\sigma})^r}, & |y| \leqslant \sigma, \\ 0, & |y| > \sigma \end{cases}$$

соответственно. Пусть еще $X_{\sigma,0}$ – нулевой оператор. Известно, что если $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r \in \mathbb{Z}_+$, $f \in \mathfrak{M}^{(r)}$, то

$$P\big(f - X_{\sigma,r} f\big) \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{\sigma^r} P(D^r f), \tag{4.28}$$

а если $r \in \mathbb{N}$, $f \in \widetilde{\mathfrak{M}}^{(r)}$, то

$$P\big(f - \widetilde{X}_{\sigma,r} f\big) \leqslant \frac{\widetilde{\mathcal{K}}_r}{\sigma^r} P(D^r J f). \tag{4.29}$$

Положим $X^{(0)}_{\sigma,r} = X_{\sigma,r}$, $X^{(1)}_{\sigma,r} = \widetilde{X}_{\sigma,r}$. Предупредим читателя, что волна над ξ не означает тригонометрическое сопряжение, и $\widetilde{X}_{\sigma,r}$ – это единое обозначение оператора, а не то же, что $JX_{\sigma,r}$.

На основе операторов $X_{\sigma,r}$ можно построить линейные операторы свертки, реализующие оценки в теоремах п. 4.1. Мы будем обозначать их $Y_{\sigma,m,q}$, опуская остальные параметры, так что далее в разных утверждениях через $Y_{\sigma,m,q}$ обозначаются разные операторы.

Нумерация теорем ведется следующим образом: если теорема из п. 4.1 для наилучших приближений имеет номер 4.1.x, то аналогичная теорема для линейного метода имеет номер 4.2.x.

Теорема 4.2.1. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $\sigma, h > 0$, $\{s_k\}_{k=0}^q \subset \mathbb{Z}_+$, $\{\varepsilon_k\}_{k=0}^q \subset \{0,1\}$; *если* $s_k = 0$, *то* $\varepsilon_k = 0$; $\mathfrak{N} = \bigcap\limits_{k=0}^{q} \mathfrak{M}^{(s_k - rk, \varepsilon_k)}$,

$$Y_{\sigma,m,q} = \sum_{k=0}^{q-1} X^{(\varepsilon_k)}_{\sigma,s_k} S^k_{h,r,m}(I - S_{h,r,m}) + X^{(\varepsilon_q)}_{\sigma,s_q} S^q_{h,r,m}.$$

Тогда для всех $f \in \mathfrak{N}$

$$P\big(f - Y_{\sigma,m,q} f\big) \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{s_k,\varepsilon_k}}{\sigma^{s_k} h^{rk}} P\big(W^k_{h,r,m} \delta_h^{rk} D^{s_k - rk}(I - S_{h,r,m}) J^{\varepsilon_k} f\big)$$
$$+ \frac{\mathcal{K}_{s_q,\varepsilon_q}}{\sigma^{s_q} h^{rq}} P\big(W^q_{h,r,m} \delta_h^{rq} D^{s_q - rq} J^{\varepsilon_q} f\big),$$

Доказательство. По лемме 2.1 и определению оператора $Y_{\sigma,m,q}$ запишем отклонение в виде

$$I - Y_{\sigma,m,q} = \sum_{k=0}^{q-1} \big(I - X^{(\varepsilon_k)}_{\sigma,s_k}\big) S^k_{h,r,m}(I - S_{h,r,m}) + \big(I - X^{(\varepsilon_q)}_{\sigma,s_q}\big) S^q_{h,r,m}.$$

Осталось воспользоваться неравенством треугольника, оценками (4.28) и (4.29) и формулой (3.13). □

Сформулируем несколько частных случаев теоремы 4.2.1.

Теорема 4.2.2. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $\sigma, h > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in [0 : rq + \beta]$, $\varepsilon, \tau \in \{0, 1\}$; *если* $\beta = 0$, *то* $\tau = 0$; *если* $\alpha = rq + \beta$, *то* $\varepsilon = 0$;

$$Y_{\sigma,m,q} = \sum_{k=0}^{q-1} X^{(\tau)}_{\sigma,rk+\beta} S^k_{h,r,m}(I - S_{h,r,m}) + X^{(\varepsilon)}_{\sigma,rq+\beta-\alpha} S^q_{h,r,m}.$$

Тогда для всех $f \in \mathfrak{M}^{(\beta,\tau)} \cap \mathfrak{M}^{(\beta-\alpha,\varepsilon)}$

$$P\big(f - Y_{\sigma,m,q} f\big) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta,\tau}}{\sigma^{rk+\beta} h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta J^\tau f\big) + \frac{\mathcal{K}_{rq+\beta-\alpha,\varepsilon}}{\sigma^{rq+\beta-\alpha} h^{rq}} \mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} D^{\beta-\alpha} J^\varepsilon f\big).$$

Теорема 4.2.3. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $\sigma, h > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$,

$$Y_{\sigma,m,q} = \sum_{k=0}^{q-1} X_{\sigma,rk+\beta} S^k_{h,r,m}(I - S_{h,r,m}) + X_{\sigma,rq+\beta} S^q_{h,r,m}.$$

Тогда для всех $f \in \mathfrak{M}^{(\beta)}$

$$P\big(f - Y_{\sigma,m,q} f\big) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta}}{\sigma^{rk+\beta} h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta f\big) + \frac{\mathcal{K}_{rq+\beta}}{\sigma^{rq+\beta} h^{rq}} \mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} D^\beta f\big).$$

Теорема 4.2.4. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $\sigma, h > 0$,

$$Y_{\sigma,m,q} = \sum_{k=1}^{q-1} X_{\sigma,rk} S^k_{h,r,m}(I - S_{h,r,m}) + X_{\sigma,rq} S^q_{h,r,m}. \tag{4.30}$$

Тогда для всех $f \in \mathfrak{M}$

$$P\big(f - Y_{\sigma,m,q} f\big) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(\sigma h)^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) f\big) + \frac{\mathcal{K}_{rq}}{(\sigma h)^{rq}} \mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} f\big).$$

В формуле (4.30) мы начинаем суммирование с единицы, так как $X_{\sigma,0}$ – нулевой оператор.

Теорема 4.2.5. *Пусть* $(\mathfrak{M}, P) \in \mathcal{B}$, $r, m, q \in \mathbb{N}$, $\sigma, h > 0$, $\beta \in \mathbb{N}$,

$$Y_{\sigma,m,q} = \sum_{k=0}^{q-1} \widetilde{X}_{\sigma,rk+\beta} S^k_{h,r,m}(I - S_{h,r,m}) + \widetilde{X}_{\sigma,rq+\beta} S^q_{h,r,m}.$$

Тогда для всех $f \in \mathfrak{M}^{(\beta)}$

$$P\big(f - Y_{\sigma,m,q} f\big) \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\widetilde{\mathcal{K}}_{rk+\beta}}{\sigma^{rk+\beta} h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) P\big((I - S_{h,r,m}) D^\beta J f\big)$$
$$+ \frac{\widetilde{\mathcal{K}}_{rq+\beta}}{\sigma^{rq+\beta} h^{rq}} \mu_{r,m,q} P\big(\delta_h^{rq} D^\beta J f\big).$$

Замечание 4.2. Поскольку все построенные операторы $Y_{\sigma,m,q}$ обнуляются на функциях f, ортогональных $\mathbf{E}_\sigma$, для таких функций левые части неравенств в теоремах 4.2.1–4.2.5 можно заменить на $P(f)$. Это утверждение другим способом уже было установлено в пункте 4.1.

Замечание 4.3. В работе [3] построен оператор свертки со значениями в $\mathbf{E}_\sigma$, реализующий неравенство (4.19). Тем же способом могут быть построены операторы свертки, реализующие неравенства (4.7), (4.11), (4.15) и (4.27) в теоремах п. 4.1. Возможен и другой подход к установлению перечисленных неравенств, при котором они сводятся к оценкам наилучших приближений на классах сверток [4, с. 235, п. 100]. Последний способ может привести к более точным оценкам, которые также будут достигаться с помощью линейных методов приближения.

Замечание 4.4. Результаты этого параграфа стандартным образом (например, с помощью приближения функции f ее интегралом Фейера) переносятся с множеств непрерывных функций на множества $L_\infty(\mathbb{R})$ и L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ с полунормами $\|\cdot\|_p$, $\omega_s(\cdot, h)_p$, $A_\sigma(\cdot)_p$, $A_{\sigma-0}(\cdot)_p$.

§5. Оценки наилучших приближений сплайнами и их реализация линейными методами

5.1. Оценки наилучших приближений. В этом параграфе при $n \in \mathbb{N}$ через $\mathbf{S}_{2n,\gamma}$ обозначается $2n$-мерное пространство 2π-периодических сплайнов порядка $\gamma \in \mathbb{Z}_+$ дефекта 1 по равномерному разбиению $\frac{k\pi}{n}$ $(k \in \mathbb{Z})$. Другими словами, при $\gamma \in \mathbb{N}$ это множество функций из $C^{(\gamma-1)}$, являющихся на каждом интервале $\left(\frac{k\pi}{n}, \frac{(k+1)\pi}{n}\right)$ алгебраическим многочленом степени не выше γ, а при $\gamma = 0$ – множество

функций, постоянных на каждом таком интервале. Известно [1, с. 77, следствие 2.3.6], что $\mathbf{S}_{2n,\gamma}$ – множество функций вида

$$s(t) = \beta + \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j d_{\gamma+1}\left(t - \frac{j\pi}{n}\right), \quad \sum_{j=0}^{2n-1} \beta_j = 0,$$

где $d_{\gamma+1}$ – ядро Бернулли порядка $\gamma+1$. Множество сплайнов из $\mathbf{S}_{2n,\gamma}$, для которых $\sum\limits_{j=0}^{2n-1} (-1)^j \beta_j = 0$, обозначим через $\mathbf{S}^{\times}_{2n,\gamma}$. Размерность пространства $\mathbf{S}^{\times}_{2n,\gamma}$ равна $2n-1$. При $\gamma \in \mathbb{Z}_+$ обозначим через $E_{n,\gamma}$ и $E^{\times}_{n,\gamma}$ наилучшие приближения пространствами $\mathbf{S}_{2n,\gamma}$ и $\mathbf{S}^{\times}_{2n,\gamma}$; положим $E_{n,-1}(f)_p = E^{\times}_{n,-1}(f)_p = \|f\|_p$.

Поскольку для наилучших приближений сплайнами нам в полной мере известны неравенства типа Ахиезера–Крейна–Фавара лишь применительно к классам $W_p^{(r)}$ периодических функций, мы ограничимся приложениями общих теорем к этим случаям. Применим доказанные утверждения к функционалам $E_{n,\gamma}(\cdot)_p$ и $E^{\times}_{n,\gamma}(\cdot)_p$, $p \in [1, +\infty]$. Напомним, что через $\mathcal{K}_r$ обозначаются константы Фавара, а коэффициенты $\nu_{r,m,k}$ и $\mu_{r,m,k}$ задаются формулами (3.8) и (3.9) и могут быть оценены с помощью замечания 3.1.

Известно [1, 11], что

$$E_{n,\gamma}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|D^r f\|_p, \quad \gamma \geqslant r-1, \tag{5.1}$$

$$E^{\times}_{n,\gamma}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|D^r f\|_p, \quad \gamma \geqslant r. \tag{5.2}$$

Неравенство (5.1) при $p = 1$ и $p = +\infty$ содержится в [1, с. 221–225, п. 5.2.4 и с. 246, предложение 5.4.9]; там же см. историю вопроса; неравенство (5.2) при $p = 1$ и $p = +\infty$ см. в [12]; общий случай разобран в [11, лемма 7].

Теорема 5.1.1. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$, $n, r, m, q, \gamma \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\{s_k\}_{k=0}^q \subset \mathbb{Z}_+$, $\gamma \geqslant \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant q} s_k - 1$, $\mathfrak{N} = \bigcap\limits_{k=0}^{q} W_p^{(s_k - rk)}$. *Тогда для всех* $f \in \mathfrak{N}$

$$\begin{aligned} E_{n,\gamma}(f)_p \leqslant & \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{s_k}}{n^{s_k} h^{rk}} \left\| W^k_{h,r,m} \delta_h^{rk} D^{s_k - rk} (I - S_{h,r,m}) f \right\|_p \\ & + \frac{\mathcal{K}_{s_q}}{n^{s_q} h^{rq}} \left\| W^q_{h,r,m} \delta_h^{rq} D^{s_q - rq} f \right\|_p. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Если $\gamma \geqslant \max\limits_{0\leqslant k\leqslant q} s_k$, *то* E *можно заменить на* $E^{\times}$.

Доказательство. Неравенство (5.3) получается, если применить теорему 3.1 к функционалам $\Phi(f) = E_{n,\gamma}(f)_p$ и $\Phi(f) = E^{\times}_{n,\gamma}(f)_p$ и учесть, что, согласно неравенствам (5.1) и (5.2), $N_p(\Phi, D^s) \leqslant \mathcal{K}_s n^{-s}$ соответственно при $\gamma \geqslant s-1$ и $\gamma \geqslant s$. □

Замечание 5.1. Если использовать самый общий вариант теоремы 2.1 с разными полунормами в правой части, то теорема 5.1.1 может быть усилена. Именно, в условиях теоремы 5.1.1 справедливо неравенство

$$E_{n,\gamma}(f)_p \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{s_k}}{n^{s_k} h^{rk}} E_{n,\gamma-s_k}\big(W^k_{h,r,m}\delta^{rk}_h D^{s_k-rk}(I-S_{h,r,m})f\big)_p + \frac{\mathcal{K}_{s_q}}{n^{s_q} h^{rq}} E_{n,\gamma-s_q}\big(W^q_{h,r,m}\delta^{rq}_h D^{s_q-rq} f\big)_p.$$

Если $\gamma \geqslant \max\limits_{0\leqslant k\leqslant q} s_k$, то E можно заменить на $E^{\times}$. При доказательстве надо воспользоваться неравенствами (см. комментарии к неравенствам (5.1) и (5.2))

$$E_{n,\gamma}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} E_{n,\gamma-r}(D^r f)_p, \quad \gamma \geqslant r-1,$$

$$E^{\times}_{n,\gamma}(f)_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} E^{\times}_{n,\gamma-r}(D^r f)_p, \quad \gamma \geqslant r.$$

Далее при формулировке частных случаев теоремы 5.1.1 мы не будем упоминать об этом усилении.

Сформулируем несколько частных случаев теоремы 5.1.1.

Теорема 5.1.2. *Пусть* $p \in [1,+\infty]$, $n, r, m, q, \gamma \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in [0{:}\,rq+\beta]$, $\gamma \geqslant rq+\beta-1-\min\{r,\alpha\}$. *Тогда для всех* $f \in W^{(\beta)}_p$

$$E_{n,\gamma}(f)_p \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta}}{n^{rk+\beta} h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) \big\|(I-S_{h,r,m})D^\beta f\big\|_p + \frac{\mathcal{K}_{rq+\beta-\alpha}}{n^{rq+\beta-\alpha} h^{rq}} \mu_{r,m,q} \big\|\delta^{rq}_h D^{\beta-\alpha} f\big\|_p.$$

Если $\gamma \geqslant rq+\beta-\min\{r,\alpha\}$, *то* E *можно заменить на* $E^{\times}$.

Теорема 5.1.3. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$, $n, r, m, q, \gamma \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \geqslant rq + \beta - 1$. *Тогда для всех* $f \in W_p^{(\beta)}$

$$E_{n,\gamma}(f)_p \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta}}{n^{rk+\beta} h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) \left\|(I - S_{h,r,m}) D^\beta f\right\|_p + \frac{\mathcal{K}_{rq+\beta}}{n^{rq+\beta} h^{rq}} \mu_{r,m,q} \left\|\delta_h^{rq} D^\beta f\right\|_p.$$

Если $\gamma \geqslant rq + \beta$, *то* E *можно заменить на* $E^\times$.

Теорема 5.1.4. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$, $n, r, m, q, \gamma \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\gamma \geqslant rq - 1$. *Тогда для всех* $f \in L_p$

$$E_{n,\gamma}(f)_p \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(nh)^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) \left\|(I - S_{h,r,m}) f\right\|_p + \frac{\mathcal{K}_{rq}}{(nh)^{rq}} \mu_{r,m,q} \left\|\delta_h^{rq} f\right\|_p.$$

Если $\gamma \geqslant rq$, *то* E *можно заменить на* $E^\times$.

5.2. Реализация оценок для наилучших приближений линейными методами. Неравенства в теоремах пункта 5.1 могут быть, как и для приближений целыми функциями, получены с помощью линейных методов приближения.

При $n, r, \gamma \in \mathbb{N}$, $\gamma \geqslant r$ обозначим через $X_{n,r,\gamma}$ линейные операторы, действующие из L в $\mathbf{S}_{2n,\gamma}^\times$, для которых

$$\left\|f - X_{n,r,\gamma} f\right\|_p \leqslant \frac{\mathcal{K}_r}{n^r} \|f^{(r)}\|_p \tag{5.4}$$

при всех $p \in [1, +\infty]$, $f \in W_p^{(r)}$. Через $X_{n,r,r-1}$ обозначим линейные операторы со значениями в $\mathbf{S}_{2n,\gamma}$, для которых верна оценка (5.4). Хорошо известно [1, с. 221–225, п. 5.2.4], что в качестве $X_{n,r,r-1}$ можно взять интерполяционные операторы. Операторы $X_{n,r,\gamma}$ при $\gamma \geqslant r$ построены в [12], оценки (5.4) для этих операторов получены в [12] ($p = 1, \infty$) и [11, лемма 7] ($1 < p < +\infty$). Пусть еще $X_{n,0,\gamma}$ – нулевой оператор.

На основе операторов $X_{n,r,\gamma}$ можно построить линейные операторы, реализующие оценки в теоремах пункта 5.1. Мы будем обозначать их $Y_{n,m,q,\gamma}$, опуская остальные параметры, так что далее в разных утверждениях через $Y_{n,m,q,\gamma}$ обозначаются разные операторы.

Нумерация теорем ведется следующим образом: если теорема из пункта 5.1 для наилучших приближений имеет номер 5.1.x, то аналогичная теорема для линейного метода имеет номер 5.2.x.

Теорема 5.2.1. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$, $n, r, m, q, \gamma \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\{s_k\}_{k=0}^{q} \subset \mathbb{Z}_+$, $\gamma \geqslant \max\limits_{0 \leqslant k \leqslant q} s_k - 1$, $\mathfrak{N} = \bigcap_{k=0}^{q} W_p^{(s_k - rk)}$,

$$Y_{n,m,q,\gamma} = \sum_{k=0}^{q-1} X_{n,s_k,\gamma} S_{h,r,m}^k (I - S_{h,r,m}) + X_{n,s_q,\gamma} S_{h,r,m}^q.$$

Тогда для всех $f \in \mathfrak{N}$

$$\begin{aligned}\left\| f - Y_{n,m,q,\gamma} f \right\|_p \leqslant \sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{s_k}}{n^{s_k} h^{rk}} \left\| W_{h,r,m}^k \delta_h^{rk} D^{s_k - rk} (I - S_{h,r,m}) f \right\|_p \\ + \frac{\mathcal{K}_{s_q}}{n^{s_q} h^{rq}} \left\| W_{h,r,m}^q \delta_h^{rq} D^{s_q - rq} f \right\|_p.\end{aligned}$$

Доказательство проводится так же, как в теореме 4.2.1. При этом используются неравенства (5.4).

Сформулируем несколько частных случаев теоремы 5.2.1.

Теорема 5.2.2. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$, $n, r, m, q, \gamma \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$, $\alpha \in [0 : rq + \beta]$, $\gamma \geqslant rq + \beta - 1 - \min\{r, \alpha\}$,

$$Y_{n,m,q,\gamma} = \sum_{k=0}^{q-1} X_{n,rk+\beta,\gamma} S_{h,r,m}^k (I - S_{h,r,m}) + X_{n,rq+\beta-\alpha,\gamma} S_{h,r,m}^q.$$

Тогда для всех $f \in W_p^{(\beta)}$

$$\begin{aligned}\left\| f - Y_{n,m,q,\gamma} f \right\|_p \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta}}{n^{rk+\beta} h^{rk}} \nu_{r,m,k} \right) \left\| (I - S_{h,r,m}) D^\beta f \right\|_p \\ + \frac{\mathcal{K}_{rq+\beta-\alpha}}{n^{rq+\beta-\alpha} h^{rq}} \mu_{r,m,q} \left\| \delta_h^{rq} D^{\beta-\alpha} f \right\|_p.\end{aligned}$$

Теорема 5.2.3. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$, $n, r, m, q, \gamma \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\beta \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma \geqslant rq + \beta - 1$,

$$Y_{n,m,q,\gamma} = \sum_{k=0}^{q-1} X_{n,rk+\beta,\gamma} S_{h,r,m}^k (I - S_{h,r,m}) + X_{n,rq+\beta,\gamma} S_{h,r,m}^q.$$

Тогда для всех $f \in W_p^{(\beta)}$

$$\|f - Y_{n,m,q,\gamma} f\|_p \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk+\beta}}{n^{rk+\beta} h^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) \|(I - S_{h,r,m}) D^\beta f\|_p + \frac{\mathcal{K}_{rq+\beta}}{n^{rq+\beta} h^{rq}} \mu_{r,m,q} \|\delta_h^{rq} D^\beta f\|_p.$$

Теорема 5.2.4. *Пусть* $p \in [1, +\infty]$, $n, r, m, q, \gamma \in \mathbb{N}$, $h > 0$, $\gamma \geqslant rq - 1$,

$$Y_{n,m,q,\gamma} = \sum_{k=1}^{q-1} X_{n,rk,\gamma} S_{h,r,m}^k (I - S_{h,r,m}) + X_{n,rq,\gamma} S_{h,r,m}^q. \tag{5.5}$$

Тогда для всех $f \in L_p$

$$\|f - Y_{n,m,q,\gamma} f\|_p \leqslant \left(\sum_{k=0}^{q-1} \frac{\mathcal{K}_{rk}}{(nh)^{rk}} \nu_{r,m,k}\right) \|(I - S_{h,r,m}) f\|_p + \frac{\mathcal{K}_{rq}}{(nh)^{rq}} \mu_{r,m,q} \|\delta_h^{rq} f\|_p.$$

В формуле (5.5) мы начинаем суммирование с единицы, так как $X_{n,0,\gamma}$ – нулевой оператор.

Замечание 5.2. В работе [13, замечание 4] было указано такое $(2n-1)$-мерное подпространство $\mathbf{Q}_{2n-1}^\times$ пространства L_∞, что если $f \perp \mathbf{Q}_{2n-1}^\times$, то $X_{n,r,\gamma} f = 0$ для всех $r \in [1:\gamma]$. Поэтому в условиях, когда справедливы неравенства для $E^\times$, для таких функций f левые части неравенств этого пункта можно заменить на $\|f\|_p$.

Замечание 5.3. Известно, что $X_{n,r,\gamma} \underset{\gamma\to\infty}{\longrightarrow} X_{n,r}$, например, по норме операторов из L в C [12, замечание 11]. Поэтому оценки предыдущего параграфа, касающиеся приближений тригонометрическими многочленами в пространствах L_p, могут быть получены предельным переходом из оценок для приближений сплайнами.

Литература

1. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения.* М., 1987.
2. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Оценки функционалов с известной последовательностью моментов через отклонения средних типа Стеклова.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **383** (2010), 5–32.
3. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Скорость убывания констант в неравенствах типа Джексона в зависимости от порядка модуля непрерывности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **383** (2010), 33–52.

4. Н. И. Ахиезер, *Лекции по теории аппроксимации.* М., 1965.
5. И. Стейн, Г. Вейс, *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.* М., 1974.
6. Б. М. Левитан, *Почти-периодические функции.* М., 1953.
7. О. Л. Виноградов, *Точные неравенства типа Джексона для приближений классов сверток целыми функциями конечной степени.* — Алгебра и анализ **17** (2005), No. 4, 56–111.
8. Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник, *Конкретная математика.* М., 1998.
9. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Оценки функционалов с известным конечным набором моментов через модули непрерывности высоких порядков.* — Методы сплайн-функций. Росс. конф., посв. 80-летию со дня рожд. Ю. С. Завьялова, Новосибирск, 31 января–2 февраля 2011 г. Тез. докл. Новосибирск, 2011, 29–30.
10. Л. В. Канторович, Г. П. Акилов, *Функциональный анализ.* М. 1977.
11. О. Л. Виноградов, В. В. Жук, *Точные неравенства типа Колмогорова для модулей непрерывности и наилучших приближений тригонометрическими многочленами и сплайнами.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **290** (2002), 5–26.
12. О. Л. Виноградов, *Аналог сумм Ахиезера–Крейна–Фавара для периодических сплайнов минимального дефекта.* — Проблемы мат. анализа **25** (2003), 29–56.
13. О. Л. Виноградов, *Точные неравенства для приближений классов периодических сверток подпространствами сдвигов нечетной размерности.* — Мат. заметки **85** (2009), No. 4, 569–584.

Vinogradov O. L., Zhuk V. V. Estimates for functionals with a known finite set of moments in terms of deviations of operators constructed with the use of the Steklov averages and finite differences.

The paper presents a new technique for deriving the estimates mentioned in the title. In particular, this technique allows one to establish Jackson-type inequalities for moduli of continuity of arbitrary order with relatively small constants. The results obtained are valid in different spaces of periodic and nonperiodic functions.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: olvin@math.spbu.ru, zhuk@math.spbu.ru

Поступило 12 августа 2011 г.