Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 392, 2011 г.

О. Л. Виноградов

О НОРМАХ ОПЕРАТОРОВ ОБОБЩЕННОГО СДВИГА, ПОРОЖДЕННЫХ ОПЕРАТОРАМИ ТИПА ДАНКЛЯ

В работе получено интегральное представление и улучшена оценка норм операторов обобщенного сдвига, порожденных операторами типа Данкля

$$\Lambda f(x) = f'(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}\,\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

в пространствах функций, заданных на вещественной оси.

§1. Обозначения

В дальнейшем $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ – множества вещественных и комплексных чисел, $\mathbb{R}_+ = [\,0,+\infty)$. При $\rho = 0$ под корнем $\sqrt{\lambda^2+\rho^2}$ будем понимать λ при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. При $\rho > 0$ через $\lambda \mapsto \sqrt{\lambda^2+\rho^2}$ обозначим голоморфную ветвь корня в $\mathbb{C}\setminus[-i\rho, i\rho]$, положительную при $\lambda > 0$. При $\lambda = \pm i\rho$ значение корня равно 0. При $\lambda \in (-i\rho, i\rho)$ корень имеет пределы справа и слева, отличающиеся знаком. Точки на берегах разреза $[-i\rho, i\rho]$ обозначим через $\lambda^{\pm}$. Если $\rho > 0$, то

$$\mathbb{R}_+^\rho = \mathbb{R}_+ \cup (\,0, i\rho], \quad \mathbb{R}^\rho = (\mathbb{R}\setminus\{0\}) \cup \{\lambda^{\pm}\}_{\lambda\in[\,0,i\rho)} \cup \{i\rho\}$$

(вещественная ось и дважды пробегаемый отрезок $[\,0, i\rho]$),

$$\mathbb{C}^\rho = (\mathbb{C}\setminus(-i\rho, i\rho)) \cup \{\lambda^{\pm}\}_{\lambda\in(-i\rho,i\rho)},$$

$\mathbb{R}_+^0 = \mathbb{R}_+$, $\mathbb{R}^0 = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}^0 = \mathbb{C}$. При таком соглашении соотношения $\lambda^2+\rho^2 \geqslant 0$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ равносильны $\lambda \in \mathbb{R}^\rho$. Будем считать точки $\lambda^{\pm}$ противоположными и говорить о четных или нечетных функциях на $\mathbb{R}^\rho$.

Далее, u_c и u_s – четная и нечетная части функции u, то есть

$$u_c(x) = \frac{u(x)+u(-x)}{2}, \quad u_s(x) = \frac{u(x)-u(-x)}{2};$$

Ключевые слова: функции Бесселя, оператор обобщенного сдвига, операторы типа Данкля.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП Минобрнауки РФ (грант 2010-1.1-111-128-033).

тогда $u = u_c + u_s$; функции, имеющие в некоторой точке устранимый разрыв, доопределяются по непрерывности; $\mathcal{E} = C^{(\infty)}(\mathbb{R})$ — множество бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, $\mathcal{D}$ — множество финитных функций из $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}_c$ и $\mathcal{E}_c$ — множества четных функций из $\mathcal{D}$ и $\mathcal{E}$. При $p \in [1, +\infty)$ $L_p(E, A)$ $(L_p(E, \mu))$ – пространство функций f, суммируемых с p-й степенью на множестве E с весом A по мере Лебега (соответственно, по мере μ); норма в $L_p(E, A)$ равна $\|f\|_{p,A} = \left(\int_E |f|^p A\right)^{1/p}$; $L_\infty(E, A) = L_\infty(E)$; $L_\infty^{\mathrm{loc}}(E)$ — множество локально существенно ограниченных на промежутке E функций; норма оператора $T\colon L_p(E, A) \to L_p(E, A)$ также обозначается $\|T\|_{p,A}$. Полагаем

$$\langle f, g\rangle_A = \int_{\mathbb{R}} f\,\overline{g}\,A,$$

если интеграл существует. Если из контекста не следует противное, пространства функций могут быть как вещественными, так и комплексными.

Пусть еще J_α – функции Бесселя первого рода, j_α – нормированные функции Бесселя первого рода:

$$j_\alpha(z) = 2^\alpha \Gamma(\alpha+1)\frac{J_\alpha(z)}{z^\alpha} = \Gamma(\alpha+1)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+\alpha+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}.$$

Через C_A и т.п. обозначаются величины, зависящие только от указанного параметра A, аналогичный смысл имеет индекс A в символе O_A.

§2. Обобщенный сдвиг, порожденный операторами Штурма–Лиувилля

Далее, если не оговорено противное, будем считать, что функция

$$A\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

удовлетворяет следующему условию.

A1. $A(x) = |x|^{2\alpha+1}D(x)$, где $\alpha > -1/2$, функция D четна, положительна, $D \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, $D(0) = 1$.

Из A1 следует, что

$$\frac{A'(x)}{A(x)} = \frac{2\alpha+1}{x} + B(x), \quad x \neq 0,$$

где $B = \frac{D'}{D}$, $B \in C^{(\infty)}(\mathbb{R})$, нечетна. Условие $D(0) = 1$ несущественно и принимается для определенности.

В некоторых утверждениях мы будем накладывать на A еще два условия.

A2. Существует предел

$$\rho = \lim_{x\to+\infty} \frac{A'(x)}{2A(x)} \in [\,0,+\infty),$$

и функция

$$G(t) = \frac{B'(t)}{2} + \left(\alpha + \frac{1}{2}\right)\frac{B(t)}{t} + \frac{B^2(t)}{4} - \rho^2$$

суммируема на $[1,+\infty)$.

A3. A возрастает, а $\frac{A'}{A}$ убывает на $(0,+\infty)$.

Из условия A3 следует, что существует предел $\rho \in [\,0,+\infty)$.

Отметим, что во многих источниках накладывалось еще требование $A(x) \underset{x\to+\infty}{\to} +\infty$, но при этом оно не использовалось в доказательстве упоминающихся далее фактов [1].

Рассмотрим оператор Штурма–Лиувилля $L = L_A$:

$$Lf = f'' + \frac{A'}{A}f' = \frac{1}{A}(Af')'.$$

При выполнении условия A1 для любого $\lambda \in \mathbb{C}$ задача Коши

$$\begin{gathered} Lf = -(\lambda^2+\rho^2)f, \\ f(0) = 1, \quad f'(0) = 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

имеет [2] единственное решение φ_λ; при этом $\varphi_\lambda \in \mathcal{E}_c$, целая по λ. Из определения ясно, что $\varphi_\lambda = \varphi_{-\lambda}$, $\varphi_{\pm i\rho} = 1$, при $\lambda^2+\rho^2 \geqslant 0$ функция φ_λ вещественна. Если, кроме того, выполнено A3, то $|\varphi_\lambda(x)| \leqslant 1$ при всех $x \in \mathbb{R}$, $|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant \rho$ (см. [3]); элементарное доказательство этого неравенства при $\lambda^2+\rho^2 \geqslant 0$ см. в [4].

Пусть выполнены условия A1 и A2. Известно ([4, теорема 1.16]; см. также [5]), что при каждом $\lambda \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ уравнение (2.1) имеет единственное решение $\Phi_\lambda \in C^{(2)}(0,+\infty)$, для которого

$$\begin{gathered} \sqrt{A(x)}\,\Phi_\lambda(x) = e^{i\lambda x}(1+R(\lambda,x)), \\ R(\lambda,x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0, \quad R'_x(\lambda,x) \underset{x\to+\infty}{\to} 0. \end{gathered}$$

Функции Φ_λ и $\Phi_{-\lambda}$ линейно независимы, так как их вронскиан отличен от нуля:

$$W(\Phi_\lambda,\Phi_{-\lambda})(x) = \frac{-2i\lambda}{A(x)}.$$

Поэтому при каждом $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функция φ_λ является линейной комбинацией Φ_λ и $\Phi_{-\lambda}$:

$$\varphi_\lambda = c(\lambda)\Phi_\lambda + c(-\lambda)\Phi_{-\lambda}.$$

Функция c называется функцией Хариш-Чандры оператора L.

На протяжении всей работы полагаем

$$a(x,y) = A(x)A(y), \quad \sigma(\lambda) = \frac{1}{2\pi|c(\lambda)|^2}.$$

Простейшим примером оператора Штурма – Лиувилля служит оператор Бесселя, для которого

$$A(x) = A^{\boldsymbol{\alpha}}(x) = |x|^{2\alpha+1}, \quad \alpha > -1/2.$$

Условимся жирным индексом $\boldsymbol{\alpha}$ (обычно верхним) снабжать величины, соответствующие функции $A^{\boldsymbol{\alpha}}$. Для уравнения Бесселя $\rho = 0$, собственные функции $\varphi_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}$ суть нормированные функции Бесселя $x \mapsto j_\alpha(\lambda x)$. Известно [6, §7.21], что

$$|j_\alpha(x)| \leqslant 1, \quad |j_\alpha(x)| \leqslant \frac{C_\alpha}{|x|^{\alpha+1/2}}. \tag{2.2}$$

Отметим, что в регулярном случае $\alpha = -1/2$, который в данной работе не рассматривается, $j_{-1/2}(x) = \cos x$.

Другой известный пример – оператор Якоби, для которого

$$A(x) = A_{\alpha,\beta}(x) = \operatorname{sh}^{2\alpha+1}|x| \operatorname{ch}^{2\beta+1} x$$

при $\alpha \geqslant \beta \geqslant -\alpha - 1$, $\alpha > -1/2$. Для оператора Якоби

$$\frac{A'_{\alpha,\beta}(x)}{A_{\alpha,\beta}(x)} = (2\alpha+1)\operatorname{cth} x + (2\beta+1)\operatorname{th} x,$$

$\rho = \alpha + \beta + 1$, функции φ_λ суть функции Якоби $\varphi_\lambda^{(\alpha,\beta)}$ [7].

Оценки в следующей лемме являются начальными случаями асимптотических разложений (требующих более сильных условий на A) собственных функций φ_λ по функциям Бесселя [8] и функции Хариш-Чандры [9]. Работа [4] содержит подробное изложение упомянутых результатов и их усиления; как при больших, так и при малых по модулю λ, в том числе комплексных. Нам понадобятся оценки лишь для больших по модулю вещественных λ.

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* A1 *и* A2. *Тогда существует такая константа* C_A, *что для всех* $x \in \mathbb{R}$ *и* $\lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \geqslant 1$, *выполняются следующие соотношения.*

1. $\sqrt{A(x)}\varphi_\lambda(x) = |x|^{\alpha+1/2} j_\alpha(\lambda x) + R_\lambda(x)$, *где*
$$|R_\lambda(x)| \leqslant \frac{C_A}{|\lambda|^{\alpha+3/2}}, \quad |R'_\lambda(x)| \leqslant \frac{C_A}{|\lambda|^{\alpha+1/2}}.$$
2. $\sqrt{A(x)}\varphi'_\lambda(x) = |x|^{\alpha+1/2}\big(j_\alpha(\lambda x)\big)' + S_\lambda(x)$, *где*
$$|S_\lambda(x)| \leqslant \frac{C_A}{|\lambda|^{\alpha+1/2}}.$$
3. $\dfrac{1}{2\pi|c(\lambda)|^2} = \dfrac{|\lambda|^{2\alpha+1}}{2^{2\alpha}\Gamma^2(\alpha+1)}(1+E(\lambda))$, *где* $|E(\lambda)| \leqslant \dfrac{C_A}{|\lambda|}$.

Доказательство. Утверждения 1 и 3 в расширенном виде содержатся в [4, 4, теоремы 1.2 и 2.2]; см. также [8]. Докажем утверждение 2. В силу четности A, φ_λ и j_α функция S_λ нечетна. Поэтому можно ограничиться положительными x. Дифференцируя равенство пункта 1, имеем:
$$\begin{aligned} S_\lambda(x) &= (x^{\alpha+1/2})' j_\alpha(\lambda x) - \big(\sqrt{A(x)}\big)'\varphi_\lambda(x) + R'_\lambda(x) \\ &= \left((x^{\alpha+1/2})' - \big(\sqrt{A(x)}\big)'\frac{x^{\alpha+1/2}}{\sqrt{A(x)}}\right) j_\alpha(\lambda x) - \frac{\big(\sqrt{A(x)}\big)'}{\sqrt{A(x)}} R_\lambda(x) \\ &+ R'_\lambda(x) = -\frac{B(x)}{2}x^{\alpha+1/2} j_\alpha(\lambda x) - \frac{A'(x)}{2A(x)} R_\lambda(x) + R'_\lambda(x). \end{aligned}$$
При преобразовании первого слагаемого мы учли, что по условию A1
$$\begin{aligned} &(x^{\alpha+1/2})' - \big(\sqrt{A(x)}\big)'\frac{x^{\alpha+1/2}}{\sqrt{A(x)}} \\ &= \frac{\alpha+1/2}{x}x^{\alpha+1/2} - \frac{A'(x)}{2A(x)}x^{\alpha+1/2} = -\frac{B(x)}{2}x^{\alpha+1/2}. \end{aligned}$$
По свойству A2 будет $|B(x)| \leqslant C_A$, $\dfrac{|A'(x)|}{2A(x)} \leqslant C_A\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$, а по утверждению 1 и формуле Лагранжа
$$\frac{|R_\lambda(x)|}{x} = \frac{|R_\lambda(x) - R_\lambda(0)|}{x} = |R'_\lambda(\theta x)| \leqslant \frac{C_A}{|\lambda|^{\alpha+1/2}}.$$
Сопоставляя эти оценки и неравенство (2.2), приходим к оценке $S_\lambda(x)$. $\square$

Напомним некоторые сведения о гармоническом анализе, порожденном оператором Штурма–Лиувилля [10, 1, 2].

Преобразование Фурье, порожденное оператором L, на функциях из $\mathcal{D}_c$ определяется равенством

$$\mathcal{F}_L f(\lambda) = \int_{\mathbb{R}_+} f(z)\varphi_\lambda(z)A(z)\,dz. \tag{2.3}$$

При $\lambda^2 + \rho^2 \geqslant 0$ формула (2.3) имеет смысл для всех $f \in L_1(\mathbb{R}_+, A)$. Существует единственная мера Π_L на $\mathbb{R}_+^\rho$, такая что для всех $f \in \mathcal{D}_c$ справедлива формула обращения

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}_+^\rho} \mathcal{F}_L f(\lambda)\varphi_\lambda(x)\,d\Pi_L(\lambda).$$

Мера Π_L называется спектральной мерой или мерой Планшереля, порожденной оператором L. Преобразование Фурье продолжается с множества $L_1(\mathbb{R}_+, A) \cap L_2(\mathbb{R}_+, A)$ до унитарного оператора

$$\mathcal{F}_L\colon L_2(\mathbb{R}_+, A) \to L_2(\mathbb{R}_+^\rho, \Pi_L).$$

Если выполнено условие A2, то $\Pi_L = \Pi_L^{ac} + \Pi_L^s$, Π_L^{ac} и Π_L^s – абсолютно непрерывная и дискретная составляющие меры Π_L, причем

$$\operatorname{supp}\Pi_L^{ac} = \mathbb{R}_+, \quad d\Pi_L^{ac}(\lambda) = \sigma(\lambda)\,d\lambda, \quad \Pi_L^s = \sum_{k=1}^n c_k\delta_{\lambda_k},$$

где $\lambda_k = i\tau_k$, $0 < \tau_1 < \ldots < \tau_n < \rho$, δ_{λ_k} – δ-меры с носителями в точках λ_k. Если при этом выполнено A3 или $\rho = 0$, то дискретная составляющая отсутствует.

Обобщенный сдвиг T_L^y ($y \in \mathbb{R}$) для функций из $L_2(\mathbb{R}_+, A)$ определяется равенством $\mathcal{F}_L(T_L^y f)(\lambda) = \varphi_\lambda(y)\mathcal{F}_L f(\lambda)$; тогда T_L^y – самосопряженный оператор в $L_2(\mathbb{R}_+, A)$. Вместо $T_L^y f(x)$ мы также будем писать $T_L f(x, y)$. Для функций из $\mathcal{D}_c$

$$T_L f(x, y) = \int_{\mathbb{R}_+^\rho} \mathcal{F}_L f(\lambda)\varphi_\lambda(x)\varphi_\lambda(y)\,d\Pi_L(\lambda).$$

Кроме того, $u = T_L f$ – единственное решение задачи

$$(au_x')_x' = (au_y')_y', \quad u(x, 0) = f(x). \tag{2.4}$$

Как доказал Х. Шебли [10], при условии A3 оператор T_L положительный: если $f \geqslant 0$, то и $T_L f \geqslant 0$, и ограниченный: если $f \leqslant 1$,

то и $T_L f \leqslant 1$. Поэтому при всех $x, y \geqslant 0$ функционал $f \mapsto T_L f(x,y)$ задается мерой:

$$T_L f(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+} f(z) A(z) d\Omega_{xy}(z), \tag{2.5}$$

причем $\Omega_{xy} = \Omega_{yx}$, $\int_{\mathbb{R}_+} A(z) d\Omega_{xy}(z) = 1$,

$$\operatorname{supp} \Omega_{xy} \subset \big[|x-y|, |x|+|y|\big],$$

$d\Omega_{xy}(z)\, dy = d\Omega_{xz}(y)\, dz$ (последнее вытекает из самосопряженности оператора T_L^y). Формулой (2.5) оператор T_L распространяется с $\mathcal{D}_c$ на другие множества функций. В частности, для всех $p \in [1, +\infty]$, $y \in \mathbb{R}_+$ и $f \in L_p(\mathbb{R}_+, A)$ выполняется неравенство $\|T_L^y f\|_{p,A} \leqslant \|f\|_{p,A}$. Для $f \in \mathcal{E}_c$ функция $u = T_L f$ по-прежнему есть единственное решение уравнения (2.4); поэтому

$$T_L \varphi_\lambda(x,y) = \varphi_\lambda(x) \varphi_\lambda(y). \tag{2.6}$$

С помощью метода Римана устанавливается, что решение задачи (2.4) при $x, y > 0$ выражается интегралом

$$T_L f(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+} f(z) \omega(x,y,z) A(z)\, dz, \tag{2.7}$$

то есть мера Ω_{xy} при $x, y > 0$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега: $d\Omega_{xy}(z) = \omega(x,y,z)\, dz$. Функция ω неотрицательна, симметрична по трем переменным, $\omega(x,y,\cdot) \in L_1(\mathbb{R}_+, A)$, $\operatorname{supp} \omega(x,y,\cdot) \subset [|x-y|, x+y]$. Б. Брааксма и Х. де Сноо [11] применили метод Римана к уравнению вида

$$u''_{x^2} + \frac{2\alpha+1}{x} u'_x - q(x) u = u''_{y^2} + \frac{2\alpha+1}{y} u'_y - q(y) u$$

при некоторых условиях на функцию q и исследовали вопросы о неотрицательности и симметричности ядра ω. Равенство (2.6) называется формулой умножения для функций φ_λ и имеет вид $(x, y > 0)$

$$\varphi_\lambda(x) \varphi_\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}_+} \varphi_\lambda(z) \omega(x,y,z) A(z)\, dz.$$

Наконец, асимптотические формулы (лемма 1) позволяют заключить, что равенство

$$\omega(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}_+^\rho} \varphi_\lambda(x) \varphi_\lambda(y) \varphi_\lambda(z)\, d\Pi_L(\lambda) \tag{2.8}$$

верно почти всюду, а не только формально.

Метод Римана позволяет заключить о том, что решение задачи (2.4) выражается формулой (2.7), даже если отказаться от условия A3, обеспечивающего положительность оператора T_L. В этом случае нельзя утверждать о неотрицательности ядра ω, но формула умножения имеет место.

Другой способ построения оператора обобщенного сдвига состоит в применении операторов преобразования [2].

Для функций Бесселя формула умножения (формула Сонина) имеет вид [6, 6, §11.41, 13.46]:

$$j_\alpha(\lambda x)j_\alpha(\lambda y) = \int_{\mathbb{R}_+} j_\alpha(\lambda z)\omega^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z)z^{2\alpha+1}\,dz,$$

$$\omega^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z) = \frac{2^{2\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}\frac{\Delta^{2\alpha-1}(x,y,z)}{(xyz)^{2\alpha}}\mathbf{1}_{[|x-y|,x+y]}(z),$$

где $\mathbf{1}_E$ – характеристическая функция множества E, а

$$\Delta(x,y,z) = \frac{1}{4}\sqrt{(x+y+z)(x+y-z)(z+x-y)(y+z-x)}$$

– площадь треугольника со сторонами $x, y, z > 0$. Будем считать, что функция $\omega^{\boldsymbol{\alpha}}$ задается указанной формулой при $x, y, z > 0$ и четна по каждой переменной. При этом

$$\sigma^{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda) = \frac{1}{2\pi|c^{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)|^2} = \frac{|\lambda|^{2\alpha+1}}{2^{2\alpha}\Gamma^2(\alpha+1)}.$$

Для функций Якоби при $\alpha \geqslant \beta \geqslant -1/2$ формула умножения получена в [7], но эти ограничения не являются необходимыми [1].

Отметим еще, что обобщенный сдвиг может быть построен на основе операторов Штурма–Лиувилля $\widetilde{L}$ более общего вида: $\widetilde{L}f = Lf + qf$. Так, в работах [12, 13] получены формулы умножения для сфероидальных волновых функций, являющихся собственными функциями операторов такого вида.

§3. Обобщенный сдвиг, порожденный операторами типа Данкля

Операторы $\Lambda^{\boldsymbol{\alpha}}$, действующие по формуле

$$\Lambda^{\boldsymbol{\alpha}}f(x) = f'(x) + \frac{2\alpha+1}{x}f_s(x),$$

называются операторами Данкля. Эти операторы (причем в многомерном случае) введены Ч. Данклем в серии работ, из которых укажем на [14]. Для знакомства со свойствами операторов Данкля и библиографией можно рекомендовать обзорную статью [15].

Порожденный оператором Данкля гармонический анализ функций, заданных на $\mathbb{R}$, распространяет гармонический анализ, порожденный оператором Бесселя, с множества четных функций (или, что равносильно, с множества функций, заданных на $\mathbb{R}_+$).

Операторы $\Lambda = \Lambda_A$ вида

$$\Lambda f = f' + \frac{A'}{A} f_s$$

называют операторами типа Данкля. Таким образом, если f четна, то $\Lambda f = f'$, а если f нечетна, то $\Lambda f = f' + \frac{A'}{A} f = \frac{(Af)'}{A}$. В данной работе оператор Λ применяется к дифференцируемым функциям f; тогда ввиду свойства A1 функция Λf определена в каждой точке.

Отметим некоторые свойства операторов типа Данкля.

Λ1. *Если функция f четна (нечетна), то функция Λf нечетна (четна).*

Это очевидно, так как функция $\frac{A'}{A}$ нечетна.

Λ2. *Если f дважды дифференцируема и четна, то $\Lambda^2 f = Lf$.*

Λ3. Обобщенная теорема Ролля. *Пусть f четна или нечетна. Тогда между любыми двумя нулями f лежит нуль Λf. Если при этом $f(a) = f'(a) = 0$, то $\Lambda f(a) = 0$.*

Доказательство. Если f четна, то утверждение представляет собой частный случай теоремы Ролля. Пусть f нечетна, $a, b \in \mathbb{R}$, $f(a) = f(b) = 0$. Так как для нечетной функции $f(0) = 0$, достаточно рассмотреть случаи $0 \leqslant a < b$ и $b < a \leqslant 0$. Тогда, применяя теорему Ролля к функции Af и учитывая, что $A(x) \neq 0$ при $x \neq 0$, получаем требуемое. Утверждение о кратном корне очевидно. □

Свойство Λ3 ранее не отмечалось и может найти применение при построении ядер, не увеличивающих осцилляцию.

При каждом $\lambda \in \mathbb{C}^\rho$ функция

$$e_\lambda = \varphi_\lambda + \frac{1}{i\sqrt{\lambda^2 + \rho^2}} \varphi'_\lambda \quad (\lambda \neq \pm i\rho), \qquad e_{\pm i\rho} = 1$$

есть единственное решение задачи

$$\Lambda f = i\sqrt{\lambda^2 + \rho^2} f, \quad f(0) = 1.$$

При этом $e_\lambda \in \mathcal{E}$, аналитическая по λ в $\mathbb{C} \setminus [-i\rho, i\rho]$ (при $\rho = 0$ – целая) [16].

При $\alpha = -1/2$ оператор Данкля совпадает с оператором дифференцирования, а функции $e_\lambda^{\mathbf{1/2}}$ суть комплексные экспоненты $e_\lambda^{\mathbf{1/2}}(x) = e^{i\lambda x}$.

В [16, 17] через φ_λ обозначались собственные функции оператора L, соответствующие собственным числам $-\lambda^2$, а не $-(\lambda^2+\rho^2)$. Собственные функции оператора Λ обозначались через Φ_λ (здесь через Φ_λ обозначаются другие решения уравнения (2.1)), причем индекс λ соответствовал собственному числу λ. Такая индексация удобна тем, что функции Φ_λ оказываются целыми по λ, а мера Планшереля оказывается заданной на $\mathbb{R}_+$ ($\mathbb{R}$) и нет необходимости вводить обозначения вида $\mathbb{R}^\rho$. Индексация функций φ_λ, принятая в настоящей работе, также употребительна (см., например, [1, 4, 5]). В ее пользу говорит аналогия с компактным случаем (например, случаем ультрасферических многочленов), где функции нумеруются целыми неотрицательными или целыми индексами вне зависимости от конкретных величин собственных чисел. Если $\rho = 0$, то различия в нумерации нет.

М. Рёслер [18] исследовала собственные функции $e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}$ оператора Данкля:

$$e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(x) = j_\alpha(\lambda x) + \frac{i}{2(\alpha+1)}\,\lambda x\, j_{\alpha+1}(\lambda x)$$

и получила для них формулу умножения:

$$e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(x) e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(y) = \int_{\mathbb{R}} e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(z) W^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z) |z|^{2\alpha+1}\, dz, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} W^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z) &= \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(x) e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(y) e_{-\lambda}^{\boldsymbol{\alpha}}(z) \sigma^{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)\, d\lambda \qquad (3.2)\\ &= \frac{1}{2}\omega^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z)(1 - \varrho^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z) + \varrho^{\boldsymbol{\alpha}}(z,x,y) + \varrho^{\boldsymbol{\alpha}}(y,z,x)),\\ \varrho^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z) &= \frac{x^2+y^2-z^2}{2xy}. \end{aligned}$$

Операторы Якоби–Данкля изучались в [19], где, в частности, была получена формула умножения для их собственных функций.

Функции e_λ обладают следующими свойствами.

E1. Формулы типа Эйлера.

$$\frac{e_\lambda + e_{-\lambda}}{2} = \varphi_\lambda, \quad \frac{e_\lambda - e_{-\lambda}}{2i} = -\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\rho^2}}\varphi'_\lambda.$$

E2. *При* $\lambda^2+\rho^2 \geqslant 0$

$$e_{-\lambda}=\overline{e_\lambda}, \quad |e_\lambda|^2=|\varphi_\lambda|^2+\frac{1}{\lambda^2+\rho^2}|\varphi'_\lambda|^2.$$

Свойства E1 и E2 очевидны.

E3. *Пусть выполнены условия* A1 *и* A3. *Если* $\lambda^2+\rho^2 \geqslant 0$, *то при всех* $x \in \mathbb{R}$

$$|e_\lambda(x)| \leqslant 1.$$

Равенство имеет место лишь при $\lambda=\pm i\rho$ *или* $x=0$.

Доказательство. При $\lambda=\pm i\rho$ утверждение тривиально, так как $e_{\pm i\rho}=1$. При $\lambda^2+\rho^2>0$ имеем:

$$\left(|e_\lambda|^2\right)'=2\varphi'_\lambda\left(\varphi_\lambda+\frac{1}{\lambda^2+\rho^2}\varphi''_\lambda\right)=-\frac{2}{\lambda^2+\rho^2}\frac{A'}{A}\left(\varphi'_\lambda\right)^2.$$

Поскольку $x\frac{A'(x)}{A(x)} \geqslant 0$ на $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, $|e_\lambda|$ возрастает на $(-\infty,0]$ и убывает на $[0,+\infty)$. Следовательно, $|e_\lambda(x)| \leqslant |e_\lambda(0)|=1$ при всех x. Равенство при $x \neq 0$ исключено, так как A не постоянна ни в какой окрестности нуля. □

Следующая серия результатов установлена в [17] и [16].

Преобразование Фурье, порожденное оператором Λ, на функциях из $\mathcal{D}$ определяется равенством [16]

$$\mathcal{F}_\Lambda f(\lambda)=\int_{\mathbb{R}} f(t)e_{-\lambda}(t)A(t)\,dt. \tag{3.3}$$

При $\lambda \in \mathbb{R}^\rho$ формула (3.3) имеет смысл для всех $f \in L_1(\mathbb{R},A)$. Преобразование Фурье продолжается с множества $L_1(\mathbb{R},A)\cap L_2(\mathbb{R},A)$ до унитарного оператора $\mathcal{F}_\Lambda\colon L_2(\mathbb{R},A) \to L_2(\mathbb{R}^\rho,\Pi_\Lambda)$, где Π_Λ – мера Планшереля для оператора L, продолженная четно на $\mathbb{R}^\rho$ и деленная на 4. Для $f \in \mathcal{D}$ справедлива формула обращения

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^\rho}\mathcal{F}_\Lambda f(\lambda)e_\lambda(x)\,d\Pi_\Lambda(\lambda). \tag{3.4}$$

В [17] с помощью оператора преобразования на функциях из $\mathcal{E}$ был определен обобщенный сдвиг, порожденный оператором Λ. На функциях из $\mathcal{D}$ обобщенный сдвиг выражается формулой [16, формулы (5.3) и (6.1)]

$$T_\Lambda f(x,y)=\int_{\mathbb{R}^\rho}\mathcal{F}_\Lambda f(\lambda)e_\lambda(x)e_\lambda(y)\,d\Pi_\Lambda(\lambda). \tag{3.5}$$

Если $f \in \mathcal{E}$, то $v = T_\Lambda f$ – единственное решение задачи Коши для дифференциально-разностного уравнения

$$\Lambda_x v = \Lambda_y v, \quad v(x,0) = f(x). \tag{3.6}$$

В частности,

$$T_\Lambda e_\lambda(x,y) = e_\lambda(x) e_\lambda(y).$$

При фиксированных $x, y \in \mathbb{R}$ обозначим через $\mathcal{W}_{xy}$ функционал (распределение) $f \mapsto T_\Lambda f(x,y)$. Из определения ясно, что при $x = 0$ или $y = 0$ распределение $\mathcal{W}_{xy}$ задается δ-мерой. В общем случае известно, что

$$\operatorname{supp} \mathcal{W}_{xy} \subset \big[-|x|-|y|, -\big||x|-|y|\big|\big] \cup \big[\big||x|-|y|\big|, |x|+|y|\big] \tag{3.7}$$

и что если $f \in \mathcal{D}$, то $T^y f \in \mathcal{D}$. Из формулы (3.5) следует, что для $f \in \mathcal{E}$, $g \in \mathcal{D}$

$$\langle T_\Lambda^y f, g\rangle_A = \langle f, T_\Lambda^{-y} g\rangle_A. \tag{3.8}$$

Представляет интерес явный вид $\mathcal{W}_{xy}$ при $x, y \neq 0$. С помощью формулы обращения для преобразования Фурье $\mathcal{F}_\Lambda$ в [16] доказано, что при $\alpha > 0$ распределение $\mathcal{W}_{xy}$ задается некоторой функцией $W(x,y,\cdot) \in L_2(\mathbb{R}, A)$:

$$T_\Lambda f(x,y) = \int_{\mathbb{R}} f(z) W(x,y,z) A(z)\, dz$$

и, таким образом, получена формула умножения

$$e_\lambda(x) e_\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} e_\lambda(z) W(x,y,z) A(z)\, dz.$$

Препятствием к распространению данного результата на значения $\alpha \in (-\frac{1}{2}, 0]$ служило то, что при этих α функция $\lambda \mapsto e_\lambda(x) e_\lambda(y)$ не принадлежит пространству $L_2(\mathbb{R}^\rho, \Pi_\Lambda)$ (в [1, с. 83] это ошибочно утверждается для функций φ_λ). Вместе с тем, примеры функций Бесселя и Якоби подсказывают, что это ограничение несущественно, и распределение $\mathcal{W}_{xy}$ всегда задается суммируемой функцией.

Укажем еще на два обстоятельства, затрудняющие исследование обобщенного сдвига и формул умножения для операторов типа Данкля. Во-первых, оператор обобщенного сдвига T_Λ не является положительным, поэтому нельзя заключить, что распределение $\mathcal{W}_{xy}$ задается

мерой [20, глава II, §2, теорема 1]. Во-вторых, не известна модификация метода Римана для решения дифференциально-разностного уравнения (3.6). Тем не менее, с помощью асимптотических формул и известных тождеств для функций Бесселя равенство, аналогичное (2.7), удается установить.

§4. Ядро оператора обобщенного сдвига

Пусть выполнены условия A1 и A2. Положим при $x, y, z \neq 0$

$$W(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}^\rho} e_\lambda(x) e_\lambda(y) e_{-\lambda}(z)\, d\Pi_\Lambda(\lambda). \tag{4.1}$$

Учитывая разложение меры Π_Λ, запишем $W = W_1 + W_2$, где

$$W_1(x,y,z) = \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}} e_\lambda(x) e_\lambda(y) e_{-\lambda}(z) \sigma(\lambda)\, d\lambda, \tag{4.2}$$

$$W_2(x,y,z) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n} c_k \left(e_{\lambda_k^+}(x) e_{\lambda_k^+}(y) e_{-\lambda_k^+}(z) + e_{\lambda_k^-}(x) e_{\lambda_k^-}(y) e_{-\lambda_k^-}(z) \right).$$

Интегралы (4.1) и (4.2) понимаются как несобственные. Ясно, что они сходятся или расходятся одновременно. Сходимость интегралов доказывается в следующей теореме.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* A1 *и* A2.

1. *При всех* $x, y, z \neq 0$, $z \neq \pm(x+y)$, $z \neq \pm(x-y)$ *несобственный интеграл* (4.1) *сходится. При этом*

$$\sqrt{A(x)A(y)A(z)}\, W(x,y,z) = |xyz|^{\alpha+1/2} W^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z) + W_0(x,y,z), \tag{4.3}$$

где функция W_0 *непрерывна на* $\mathbb{R}^3$.

2. *Если* $f \in \mathcal{D}$, *то для сдвига* T_Λ, *определенного формулой* (3.5), *при всех* $x, y \neq 0$ *верно равенство*

$$T_\Lambda f(x,y) = \int_{\mathbb{R}} f(z) W(x,y,z) A(z)\, dz. \tag{4.4}$$

Доказательство. 1. Из свойств функций Бесселя (2.2)

$$|e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(t)| \leqslant \frac{C_\alpha}{|\lambda t|^{\alpha+1/2}}. \tag{4.5}$$

Из определения функций e_λ, леммы 1 и очевидного равенства $\frac{1}{\sqrt{\lambda^2+\rho^2}} = \frac{1}{\lambda} + O(\frac{1}{\lambda^2})$ следует, что при $x \in \mathbb{R}$, $|\lambda| \geqslant 1$

$$\left|\sqrt{A(x)}e_\lambda(x) - |x|^{\alpha+1/2}e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(x)\right| \leqslant \frac{C_A}{|\lambda|^{\alpha+3/2}}. \tag{4.6}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\sqrt{A(x)A(y)A(z)}e_\lambda(x)e_\lambda(y)e_{-\lambda}(z)\frac{1}{8\pi|c(\lambda)|^2}\\
&= \left(|x|^{\alpha+1/2}e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(x) + O_A\big(|\lambda|^{-\alpha-3/2}\big)\right)\left(|y|^{\alpha+1/2}e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(y) + O_A\big(|\lambda|^{-\alpha-3/2}\big)\right)\\
&\left(|z|^{\alpha+1/2}e_{-\lambda}^{\boldsymbol{\alpha}}(z) + O_A\big(|\lambda|^{-\alpha-3/2}\big)\right)\frac{1}{8\pi|c^{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)|^2}\left(1 + O_A(\lambda^{-1})\right)\\
&= |xyz|^{\alpha+1/2}e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(x)e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}(y)e_{-\lambda}^{\boldsymbol{\alpha}}(z)\frac{1}{8\pi|c^{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)|^2} + \frac{Q_\lambda(x,y,z)}{|\lambda|^{\alpha+3/2}},
\end{aligned}$$

где Q ограничена на $(\mathbb{R}\setminus(-1,1)) \times \mathbb{R}^3$, а Q_λ непрерывна на $\mathbb{R}^3$ при всех λ. Следовательно, функция

$$W_3(x,y,z) = \int_{\mathbb{R}\setminus(-1,1)} \frac{Q_\lambda(x,y,z)}{|\lambda|^{\alpha+3/2}}\,d\lambda$$

непрерывна на $\mathbb{R}^3$. Кроме того, ввиду суммируемости σ и $\sigma^{\boldsymbol{\alpha}}$ на $[-1,1]$, а также непрерывности e_λ и $e_\lambda^{\boldsymbol{\alpha}}$ функция

$$W_4(x,y,z) = \int_{-1}^{1} \frac{Q_\lambda(x,y,z)}{|\lambda|^{\alpha+3/2}}\,d\lambda$$

тоже непрерывна на $\mathbb{R}^3$. Значит, несобственные интегралы (4.1) и (4.2) сходятся одновременно с интегралом (3.2), определяющим функцию $W^{\boldsymbol{\alpha}}$, то есть заведомо сходятся при наложенных ограничениях на x, y, z. При этом справедливо равенство (4.3), где $W_0 = W_2 + W_3 + W_4$.

2. Необходимо обосновать законность перемены порядка интегрирования в равенстве

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^\rho}\int_{\mathbb{R}} f(z)e_{-\lambda}(z)A(z)\,dz\,e_\lambda(x)e_\lambda(y)\,d\Pi_\Lambda(\lambda)\\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}} f(z)\int_{\mathbb{R}^\rho} e_\lambda(x)e_\lambda(y)e_{-\lambda}(z)\,d\Pi_\Lambda(\lambda)\,A(z)\,dz.
\end{aligned}$$

Так как интегралы по мере Π_Λ^s представляют собой конечные суммы, достаточно рассмотреть интегралы по мере Π_Λ^{ac}, то есть доказать

равенство

$$\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)e_{-\lambda}(z)A(z)\,dz\,e_\lambda(x)e_\lambda(y)\sigma(\lambda)\,d\lambda$$
$$= \int_{\mathbb{R}} f(z)\int_{\mathbb{R}} e_\lambda(x)e_\lambda(y)e_{-\lambda}(z)\sigma(\lambda)\,d\lambda\,A(z)\,dz.$$

Обозначим $K=\operatorname{supp} f$. Из формул (4.5) и (4.6) следует, что при $|\lambda|\geqslant 1$, $z\in K$

$$e_\lambda(x)e_\lambda(y)e_{-\lambda}(z)\frac{A(z)}{8\pi|c(\lambda)|^2}$$
$$= \frac{|xy|^{\alpha+1/2}}{\sqrt{A(x)A(y)}}\sqrt{A(z)}e^{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda(x)e^{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda(y)e^{\boldsymbol{\alpha}}_{-\lambda}(z)\frac{|z|^{\alpha+1/2}}{8\pi|c^{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)|^2}+\frac{\widetilde{Q}_\lambda(x,y,z)}{|\lambda|^{3/2+\alpha}},$$

где функция $(\lambda,z)\mapsto\widetilde{Q}_\lambda(x,y,z)$ ограничена на $(\mathbb{R}\setminus(-1,1))\times K$. Следовательно, функция $(\lambda,z)\mapsto f(z)\frac{\widetilde{Q}_\lambda(x,y,z)}{|\lambda|^{3/2+\alpha}}$ суммируема на $\mathbb{R}^2$. Поэтому для слагаемого с $\widetilde{Q}$ перемена порядка интегрирования законна.

Для первого слагаемого требуемое равенство вытекает из формулы умножения (3.1) для функций $e^{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda$. В самом деле, последовательно применяя формулу (3.4) обращения преобразования Фурье к функции $g(z)=\frac{\sqrt{A(z)}}{|z|^{\alpha+1/2}}f(z)$, меняя порядок интегрирования и применяя формулу умножения (3.1), имеем:

$$\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(z)e^{\boldsymbol{\alpha}}_{-\lambda}(z)\sqrt{A(z)}|z|^{\alpha+1/2}\,dz\,e^{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda(x)e^{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda(y)\sigma^{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)\,d\lambda$$
$$=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_\Lambda g(\lambda)e^{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda(x)e^{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda(y)\sigma^{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)\,d\lambda$$
$$=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_\Lambda g(\lambda)\int_{\mathbb{R}} e^{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda(z)W^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z)|z|^{2\alpha+1}\,dz\,\sigma^{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)\,d\lambda$$
$$=\frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_\Lambda g(\lambda)e^{\boldsymbol{\alpha}}_\lambda(z)\sigma^{\boldsymbol{\alpha}}(\lambda)\,d\lambda\,W^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z)|z|^{2\alpha+1}\,dz$$
$$=\int_{\mathbb{R}} g(z)W^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z)|z|^{2\alpha+1}\,dz=\int_{\mathbb{R}} f(z)W^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,z)\sqrt{A(z)}|z|^{\alpha+1/2}\,dz.$$

Перемена порядка интегрирования законна, поскольку функция $W^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,\cdot)$ финитна, а $\mathcal{F}^{\boldsymbol{\alpha}}_\Lambda g$ убывает быстрее любой степени [16, теорема 4.5]. $\square$

Замечание 1. Как показывает доказательство теоремы и вид функции $W^{\boldsymbol{\alpha}}$, если $\alpha > 1/2$, то равенство (4.3) верно и при $z \in \{\pm(x+y), \pm(x-y)\}$, $x, y, z \neq 0$.

Следствие 1. *Пусть выполнены условия* A1 *и* A2, $x, y \neq 0$. *Тогда*

$$\operatorname{supp} W(x,y,\cdot) \subset \bigl[-|x|-|y|, -\bigl||x|-|y|\bigr|\bigr] \cup \bigl[\bigl||x|-|y|\bigr|, |x|+|y|\bigr],$$

$W(x,y,\cdot) \in L_1(\mathbb{R}, A)$.

Доказательство. Утверждение о носителе вытекает из формул (4.4) и (3.7), а утверждение о суммируемости функции $W(x,y,\cdot)$ – из ее финитности, суммируемости $W^{\boldsymbol{\alpha}}(x,y,\cdot)$ и формулы (4.3). □

Замечание 2. В силу суммируемости и финитности ядра интеграл в правой части (4.4) имеет смысл для всех $f \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, а само равенство (4.4) верно для всех $f \in \mathcal{E}$. Поэтому его корректно принять за определение оператора обобщенного сдвига.

Для любой измеримой на $\mathbb{R}$ функции f при $x, y \neq 0$ обозначим через $T_\Lambda^y f(x)$ интеграл в правой части (4.4), если он существует. При $x = 0$ или $y = 0$ положим $T_\Lambda^y f(x) = f(x+y)$, если правая часть определена.

В § 5 при условиях A1–A3 будет показано, что при всех $y \neq 0$, $p \in [1, +\infty]$ формула (4.4) определяет оператор T_Λ^y из $L_p(\mathbb{R}, A)$ в $L_p(\mathbb{R}, A)$.

Следствие 2. *Пусть выполнены условия* A1 *и* A2, $x, y \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{C}^\rho$. *Тогда справедлива формула умножения*

$$e_\lambda(x) e_\lambda(y) = \int_{\mathbb{R}} e_\lambda(z) W(x,y,z) A(z)\, dz.$$

Исследуем дальнейшие свойства ядра W. Положим

$$\varrho(x,y,z) = W(x,y,z) + W(x,y,-z) - \omega(x,y,z). \tag{4.7}$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия* A1 *и* A2, $x, y, z \neq 0$. *Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Ядро* $W(x,y,-z)$ *симметрично по трем аргументам и четно по их совокупности, то есть*

$$W(-x,-y,z) = W(x,y,-z).$$

2.

$$\omega(x,y,z) = \frac{1}{4}\sum_{\varepsilon\in\{\pm1\}^3} W(\varepsilon_1 x, \varepsilon_2 y, \varepsilon_3 z)$$
$$= \frac{1}{2}\big(W(x,y,z) + W(x,y,-z) + W(x,-y,z) + W(-x,y,z)\big). \tag{4.8}$$

3. *Функция ϱ симметрична по первой паре аргументов, четна по третьему и нечетна по первому и второму аргументам.*

4.

$$2W(x,y,-z) = \omega(x,y,z) + \varrho(x,y,z) + \varrho(y,z,x) + \varrho(z,x,y), \tag{4.9}$$
$$W(x,y,z) + W(x,y,-z) = \omega(x,y,z) + \varrho(x,y,z), \tag{4.10}$$
$$W(x,y,z) - W(x,y,-z) = -\varrho(y,z,x) - \varrho(x,z,y) \tag{4.11}$$

Доказательство. 1. Утверждение очевидно из определения W формулой (4.1) и равенства $e_{-\lambda}(z) = e_\lambda(-z)$.

2. Первое равенство в (4.8) следует из формул (4.1), (2.8) и формулы типа Эйлера $\varphi_\lambda = (e_\lambda)_c$, а второе – из симметрии W.

3. Симметрия ϱ по первой паре аргументов и четность по третьему ясна из определения (4.7) и симметрии W и ω. Из (4.7) и (4.8) получаем:

$$2\varrho(x,y,z) = W(x,y,z) + W(x,y,-z) - W(-x,y,-z) - W(-x,y,z),$$

откуда следует нечетность ϱ по первому аргументу. Нечетность ϱ по второму аргументу вытекает из нечетности по первому и симметрии.

4. Обозначим правую часть (4.9) через F. Подставляя выражение ϱ формулой (4.7) и пользуясь симметрией W и равенством (4.8), находим:

$$\begin{aligned} F &= W(x,y,z) + W(x,y,-z) + W(y,z,x) + W(y,z,-x) \\ &\quad + W(z,x,y) + W(z,x,-y) - 2\omega(x,y,z) = W(x,y,z) \\ &\quad + W(x,y,-z) + W(x,-y,z) + W(x,y,-z) + W(-x,y,z) \\ &\quad + W(x,y,-z) - \big(W(x,y,z) + W(x,y,-z) \\ &\quad + W(x,-y,z) + W(-x,y,z)\big) = 2W(x,y,-z). \end{aligned}$$

Равенство (4.10) – переписанное определение (4.7), а (4.11) получается из (4.9) отделением нечетной части по z. □

Лемма 3. *Пусть выполнено условие* A1. *Если* $f \in \mathcal{E}_c$, $u = T_L f$, *то* $T_\Lambda f = u + w$, *где*

$$w(x,y) = \frac{1}{A(x)} \int_0^x A(\xi) u'_y(\xi, y)\, d\xi = \frac{1}{A(y)} \int_0^y A(\eta) u'_x(x,\eta)\, d\eta. \quad (4.12)$$

Доказательство. Сначала проверим, что выражения с интегралами в формуле (4.12) равны. Пусть P, X, Y и O – точки с координатами (x,y), $(x,0)$, $(0,y)$ и $(0,0)$ соответственно. По формуле Грина

$$0 = \iint_{OXPY} \big((au'_\xi)'_\xi - (au'_\eta)'_\eta\big)\, d\xi\, d\eta = \pm \int_{\partial OXPY} a(u'_\xi\, d\eta + u'_\eta\, d\xi).$$

Учитывая, что $u'_\xi(0,\eta) = u'_\eta(\xi,0) = 0$, находим:

$$0 = \int_{XP} au'_\xi\, d\eta - \int_{YP} au'_\eta\, d\xi,$$

что после деления на $a(x,y)$ дает правое равенство в (4.12).

Положим $v = u + w$ и докажем, что v есть решение (3.6); отсюда и будет следовать, что $v = T_\Lambda f$. Ясно, что $v(x,0) = u(x,0) = f(x)$. Заметим, что ввиду четности f слагаемое u четно, а w нечетно по обеим переменным. Поэтому

$$v'_x(x,y) = u'_x(x,y) + u'_y(x,y) - \frac{A'(x)}{A^2(x)} \int_0^x A(\xi) u'_y(\xi,y)\, d\xi,$$

$$v'_y(x,y) = u'_y(x,y) + u'_x(x,y) - \frac{A'(y)}{A^2(y)} \int_0^y A(\eta) u'_x(x,\eta)\, d\eta,$$

$$\frac{A'(x)}{A(x)} \frac{v(x,y) - v(-x,y)}{2} = \frac{A'(x)}{A^2(x)} \int_0^x A(\xi) u'_y(\xi,y)\, d\xi,$$

$$\frac{A'(y)}{A(y)} \frac{v(x,y) - v(x,-y)}{2} = \frac{A'(y)}{A^2(y)} \int_0^y A(\eta) u'_x(x,\eta)\, d\eta.$$

Сложение равенств дает, что $\Lambda_x v = \Lambda_y v$. □

Известно, что на множестве четных функций оператор сдвига Данкля положителен. Это утверждение и его обобщение на множество радиальных функций в многомерном случае содержатся в [21]; см. также [22]. Следующая теорема утверждает, что при условии A3 это свойство справедливо для всех рассматриваемых операторов обобщенного сдвига.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия* A1 *и* A3. *Если* $f \in \mathcal{E}_c$, $x, y \in \mathbb{R}$, $f(z) \geqslant 0$ *при всех* $z \in \big[\big||x| - |y|\big|, |x| + |y|\big]$, *то* $T_\Lambda f(x,y) \geqslant 0$.

Доказательство. При $x = 0$ или $y = 0$ утверждение тривиально, поэтому можно считать, что $x, y \neq 0$. Обозначим $u = T_L f$, $v = T_\Lambda f$, $w = v - u$; тогда w выражается формулой (4.12) по лемме 3. Достаточно доказать, что $|w(x,y)| \leqslant u(x,y)$. Ввиду симметрии v, четности u и нечетности w можно считать, что $0 < y \leqslant x$. Пусть P, Q и R – точки с координатами (x,y), $(x-y,0)$ и $(x+y,0)$ соответственно. С одной стороны,

$$\int_0^x a(\xi,y)u'_y(\xi,y)\,d\xi = \int_{QP} au'_\eta\,d\xi + au'_\xi\,d\eta$$
$$= \int_{QP} a\,du = a(x,y)u(x,y) - \int_{QP} u\,da \leqslant a(x,y)u(x,y), \qquad (4.13)$$

так как $u \geqslant 0$ и на QP

$$a'_\xi + a'_\eta \geqslant 0.$$

С другой стороны,

$$-\int_0^x a(\xi,y)u'_y(\xi,y)\,d\xi = -\int_{RP} au'_\eta\,d\xi + au'_\xi\,d\eta = \int_{RP} a\,du$$
$$= a(x,y)u(x,y) - \int_{RP} u\,da \leqslant a(x,y)u(x,y), \qquad (4.14)$$

так как $u \geqslant 0$ и на RP

$$a'_\eta - a'_\xi \geqslant 0.$$

Неравенства (4.13) и (4.14) и означают, что $|w(x,y)| \leqslant u(x,y)$. □

Замечание 3. Так как ядро положительного оператора неотрицательно, теорема 2 означает, что (при выполнении еще и A2)

$$W(x,y,z) + W(x,y,-z) \geqslant 0$$

во всех точках непрерывности, то есть при всех

$$x, y, z \neq 0, \quad z \neq \pm(x+y), \quad z \neq \pm(x-y).$$

В силу (4.10) неравенство равносильно $|\varrho(x,y,z)| \leqslant \omega(x,y,z)$.

Следствие 3. *Пусть выполнены условия* A1 *и* A3. *Если* $f \in \mathcal{E}$, $x, y \in \mathbb{R}$, $f(z) \geqslant 0$ *при всех* $z \in \big[\big||x|-|y|\big|, |x|+|y|\big] \cup \big[-|x|-|y|, \big||x|-|y|\big|\big]$, *то* $T_\Lambda f(x,y) + T_\Lambda f(x,-y) \geqslant 0$.

Таким образом, при любом $y \in \mathbb{R}$ оператор $T_\Lambda^y + T_\Lambda^{-y}$ положительный.

Доказательство. По симметрии T_Λ и формуле (3.8) для любой функции $g \in \mathcal{D}_c$, $g \geqslant 0$ будет

$$\int_{\mathbb{R}} \big(T_\Lambda f(x,y) + T_\Lambda f(x,-y)\big) g(y) A(y)\, dy$$
$$= \langle (T_\Lambda^x f)_c, g\rangle_A = \langle T_\Lambda^x f, g\rangle_A = \langle f, T_\Lambda^{-x} g\rangle_A,$$

что неотрицательно по теореме 2. Отсюда вытекает требуемое. □

Если выполнены условия A1 и A2, $f \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$, то при $x, y \neq 0$

$$\big(T_\Lambda^y + T_\Lambda^{-y}\big) f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(z)(W(x,y,z) + W(x,-y,z)) A(z)\, dz. \qquad (4.15)$$

Для любой измеримой на $\mathbb{R}$ функции f при $x, y \neq 0$ обозначим через $\tau^y f(x)$ интеграл в правой части (4.15), если он существует. При $x = 0$ или $y = 0$ положим $\tau^y f(x) = f(x+y) + f(x-y)$, если правая часть определена.

Следствие 4. *Пусть выполнены условия* A1–A3, $p \in [1, +\infty]$, $y \in \mathbb{R}$, $f \in L_p(\mathbb{R}, A)$. *Тогда* $\tau^y f(x)$ *существует и конечно при почти всех* $x \in \mathbb{R}$,

$$\tau^y f \in L_p(\mathbb{R}, A) \quad \text{и} \quad \|\tau^y f\|_{p,A} \leqslant 2\|f\|_{p,A}.$$

Доказательство стандартно; см. также далее доказательство теоремы 3.

Замечание 4. При $\alpha > 5/2$ в [16] получено выражение функции W через ω. Именно, доказано, что функция W выражается формулой (4.9), где

$$\varrho(x,y,z) = \frac{1}{A(x)A(y)} \int_0^x \int_0^y L_z \omega(t,u,z) A(t) A(u)\, du. \qquad (4.16)$$

Отметим, что функция ϱ, определенная формулой (4.16), обладает той же симметрией, что и в третьем утверждении леммы 2. Условие $\alpha > 5/2$ гарантирует двукратную дифференируемость функции ω и законность применения к ней оператора L под знаком интеграла.

Как видно уже на исходном примере с оператором Данкля, при малых α формула (4.16) теряет смысл: после дифференцирования по z подынтегральная функция оказывается не интегрируемой. В то же время наблюдается следующий эффект: интегрирование функции ω по одной переменной приводит к повышению гладкости по другим.

Поэтому применять дифференциальный оператор L к результату интегрирования имеет смысл и при $\alpha \leqslant 5/2$. При этом возможны еще некоторые упрощения.

В обозначениях леммы 3 для всех $f \in \mathcal{E}_c$ по формуле (4.12) имеем:

$$\begin{aligned} w(x,y) &= \left(\frac{1}{A(y)}\int_0^y u(x,\eta)A(\eta)\,d\eta\right)'_x \\ &= \left(\frac{1}{A(y)}\int_0^y \int_{\mathbb{R}_+} f(z)\omega(x,\eta,z)A(z)\,dzA(\eta)\,d\eta\right)'_x \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(z)g(x,y,z)A(z)\,dz\right)'_x, \end{aligned}$$

где

$$g(x,y,z) = \frac{1}{A(y)}\int_0^y \omega(x,\eta,z)A(\eta)\,d\eta.$$

В то же время, по лемме 3 и равенству (4.7)

$$w(x,y) = \int_{\mathbb{R}_+} f(z)\varrho(x,y,z)A(z)\,dz.$$

Следовательно, при почти всех x и z существует $g'_x(x,y,z)$ и верно равенство $g'_x(x,y,z) = \varrho(x,y,z)$. Аналогичная формула получается, если воспользоваться другим равенством в (4.12).

Таким образом, при условиях A1 и A2 для почти всех x, y, z

$$\begin{aligned} \varrho(x,y,z) &= \left(\frac{1}{A(y)}\int_0^y \omega(x,\eta,z)A(\eta)\,d\eta\right)'_x \\ &= \left(\frac{1}{A(x)}\int_0^x \omega(\xi,y,z)A(\xi)\,d\xi\right)'_y. \end{aligned}$$

§5. Оценки норм операторов

По формуле (4.4) для всех $f \in L_\infty^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$ при $x, y \neq 0$

$$\big(T_\Lambda^y - T_\Lambda^{-y}\big)f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(z)\big(W(x,y,z) - W(x,-y,z)\big)A(z)\,dz. \qquad (5.1)$$

Для любой измеримой на $\mathbb{R}$ функции f при $x, y \neq 0$ обозначим через $\eta^y f(x)$ интеграл в правой части (5.1), если он существует. При $x = 0$ или $y = 0$ положим $\eta^y f(x) = f(x+y) - f(x-y)$, если правая часть определена.

Из определения ясно, что η^0 – нулевой оператор. Из равенства (3.8) следует, что $\langle \eta^y f, g\rangle_A = -\langle f, \eta^y g\rangle_A$, по крайней мере для $f \in \mathcal{E}$, $g \in \mathcal{D}$.

Теорема 3. *Пусть выполнены условия* A1–A3, $p \in [1, +\infty]$, $y \in \mathbb{R}$, $f \in L_p(\mathbb{R}, A)$. *Тогда* $\eta^y f(x)$ *существует и конечно при почти всех* $x \in \mathbb{R}$,

$$\eta^y f \in L_p(\mathbb{R}, A) \quad \text{и} \quad \|\eta^y f\|_{p,A} \leqslant 2\|f\|_{p,A}.$$

Доказательство. При $y = 0$ утверждение тривиально. Пусть $y \neq 0$. Для любой измеримой функции f при $x \neq 0$ положим

$$\Psi_y f(x) = \int_{\mathbb{R}} |f(z)| \big|W(x, y, z) - W(x, -y, z)\big| A(z)\, dz;$$

тогда $\Psi_y f(x) \in [0, +\infty]$.

1. Пусть $p = \infty$, $f \in L_\infty(\mathbb{R})$, $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Тогда

$$\Psi_y f(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}_+} \Big(\big|W(x, y, z) - W(x, -y, z)\big| + \big|W(x, y, -z) - W(x, -y, -z)\big|\Big) A(z)\, dz.$$

Учитывая, что

$$|a| + |b| = \max\{|a + b|, |a - b|\},$$

по формуле (4.11) и замечанию 3 имеем:

$$\begin{aligned}\big|W(x, y, z) - W(x, -y, z)\big| &+ \big|W(x, y, -z) - W(x, -y, -z)\big| \\ &= 2\max\big\{|\varrho(x, y, z)|, |\varrho(z, y, x)|\big\} \leqslant 2\omega(x, y, z).\end{aligned}$$

Поэтому

$$|\eta^y f(x)| \leqslant \Psi_y f(x) \leqslant 2\int_{\mathbb{R}_+} \omega(x, y, z) A(z)\, dz = 2.$$

2. Пусть $p = 1$, $f \in L_1(\mathbb{R}, A)$, $\|f\|_{1,A} \leqslant 1$. Меняя порядок интегрирования по теореме Тонелли, получаем:

$$\|\Psi_y f\|_{1,A} = \int_{\mathbb{R}} |f(z)| \int_{\mathbb{R}} \big|W(x, y, z) - W(x, -y, z)\big| A(x)\, dx\, A(z)\, dz.$$

По симметрии ядра W и по доказанному в пункте 1,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \big|W(x, y, z) - W(x, -y, z)\big| A(x)\, dx \\ &\quad = \int_{\mathbb{R}} \big|W(-z, y, -x) - W(-z, -y, -x)\big| A(x)\, dx \leqslant 2.\end{aligned}$$

Поэтому $\|\Psi_y f\|_1 \leqslant 2$ и, следовательно, $\Psi_y f(x) < +\infty$ при почти всех x. Тем более, интеграл в правой части (5.1) существует и конечен при почти всех x и $\|\eta^y f\|_{1,A} \leqslant 2$.

3. Пусть $p \in (1, +\infty)$. По доказанному для $p = 1, \infty$ и интерполяционнной теореме Рисса–Торина (см., например, [23, §13.4]) для всех простых функций g справедливо неравенство

$$\|\Psi_y g\|_{p,A} \leqslant 2\|g\|_{p,A}.$$

Пусть $f \in L_p(\mathbb{R}, A)$, $\|f\|_{p,A} \leqslant 1$. Возьмем последовательность $\{g_n\}$ простых функций со свойствами: $\|g_n - f\|_{p,A} \to 0$, $|g_n| \leqslant |f|$. По теореме Фату $\|\Psi_y f\|_{p,A} \leqslant 2$. Следовательно, $\Psi_y f(x) < +\infty$ при почти всех x. Тем более, интеграл в правой части (5.1) существует и конечен при почти всех x и $\|\eta^y f\|_{p,A} \leqslant 2$.

Оценка при $p \in (1, +\infty)$ может быть получена и без ссылки на интерполяционную теорему, применением неравенства Гёльдера. $\square$

Замечание 5. Оператор η^y можно назвать *оператором обобщенной центральной разности,* а его r-ю степень $(\eta^y)^r$ – *оператором обобщенной центральной разности порядка* r с шагом $2y$. В классическом случае $A \equiv 1$ эти операторы обозначают δ_{2y}, δ_{2y}^r. По доказанному при всех $p \in [1, +\infty]$, $y \in \mathbb{R}$ оператор η^y действует из $L_p(\mathbb{R}, A)$ в $L_p(\mathbb{R}, A)$ и

$$\|\eta^y\|_{p,A} \leqslant 2. \tag{5.2}$$

По индукции можно заключить, что при всех $r \in \mathbb{N}$ оператор $(\eta^y)^r$ действует из $L_{p,A}$ в $L_{p,A}$ и $\|(\eta^y)^r\|_{p,A} \leqslant 2^r$.

Замечание 6. В теореме 3 существенно, что речь идет именно о центральных разностях. Для разности вперед $\Delta_y f = T_\Lambda^y f - f$, в отличие от случая обычного сдвига, при $p \neq 2$ мы не можем утверждать, что $\|\Delta_y\|_{p,A} \leqslant 2$. Теорема 3 может найти применение в теории аппроксимации, при построении обобщенных модулей непрерывности на основе обобщенных центральных разностей.

Замечание 7. Если $y \neq 0$, то при $p = 1$ и $p = \infty$ неравенство (5.2) обращается в равенство.

Доказательство. При $p = \infty$ равенство очевидно, так как

$$\eta^y f(0) = T_\Lambda^y f(0) - T_\Lambda^{-y} f(0) = f(y) - f(-y).$$

При $p=1$ равенство получается из соотношений двойственности (см., например, [24, § 1.4]):

$$\|\eta^y\|_{1,A} = \sup_{\|f\|_{1,A}\leqslant 1} \|\eta^y f\|_{1,A} = \sup_{\|f\|_{1,A}\leqslant 1} \sup_{\|g\|_\infty\leqslant 1} |\langle \eta^y f, g\rangle_A|$$
$$= \sup_{\|g\|_\infty\leqslant 1} \sup_{\|f\|_{1,A}\leqslant 1} |\langle -f, \eta^y g\rangle_A| = \sup_{\|g\|_\infty\leqslant 1} \|\eta^y g\|_\infty = 2.$$

□

Напомним, что $T_\Lambda^y f(x)$ определялось в замечании 2 посредством формулы (4.4).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия* A1–A3, $p\in[1,+\infty]$, $y\in\mathbb{R}$, $f\in L_p(\mathbb{R},A)$. *Тогда* $T_\Lambda^y f(x)$ *существует и конечно при почти всех* $x\in\mathbb{R}$,

$$T_\Lambda^y f\in L_p(\mathbb{R},A) \quad \text{и} \quad \|T_\Lambda^y f\|_{p,A}\leqslant 2^{|1-\frac{2}{p}|}\|f\|_{p,A}.$$

Доказательство. Из следствия 4 и теоремы 3 вытекают существование интеграла, соотношение $T_\Lambda^y f\in L_p(\mathbb{R},A)$ и оценка

$$\|T_\Lambda^y\|_{p,A}\leqslant \frac{\|T_\Lambda^y+T_\Lambda^{-y}\|_{p,A}}{2}+\frac{\|T_\Lambda^y-T_\Lambda^{-y}\|_{p,A}}{2}\leqslant 2.$$

С другой стороны, $\|T_\Lambda^y\|_{2,A}=1$, поскольку $|e_\lambda(y)|\leqslant|e_{i\rho}(y)|=1$ при всех $\lambda\in\mathbb{R}^\rho$, $y\in\mathbb{R}$. Остается применить интерполяционную теорему для пространств $L_{p,A}(\mathbb{R})$ при $p=1$, $p=2$ и при $p=2$, $p=\infty$. □

Замечание 8. Из положительности обычного оператора сдвига T^y: $T^y f(x)=f(x+y)$ и оператора обобщенного сдвига T_L^y следует, что их нормы равны 1. Операторы T_Λ^y при $y\neq 0$ не являются положительными. Известна оценка $\|T_\Lambda^y\|_{p,A}\leqslant 4$. Для операторов Данкля и Якоби – Данкля она содержится в [18] и [19], а в общем случае может быть доказана аналогично. В [22, теорема 7.1] приведена оценка $\|T_{\boldsymbol{\alpha}}^y\|_{p,A}\leqslant 3$.

Следствие 5. *Пусть выполнены условия* A2–A3, $p\in[1,+\infty]$, $y\in\mathbb{R}$, $f\in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},A)$. *Тогда* $T_\Lambda^y f(x)$ *существует и конечно при почти всех* $x\in\mathbb{R}$, *причем* $T_\Lambda^y f\in L_p^{\mathrm{loc}}(\mathbb{R},A)$.

Доказательство. Зафиксируем $R\in(0,+\infty)$ и положим $E=[-R-|y|,R+|y|]$, $f_R=f$ на E, $f_R=0$ вне E. Тогда $f_R\in L_p(\mathbb{R},A)$. По следствию 1 при всех $x\in[-R,R]$ интегралы $T_\Lambda^y f(x)$ и $T_\Lambda^y f_R(x)$ существуют или нет одновременно и, если существуют, то равны. По теореме 4 $T_\Lambda^y f_R\in L_p(\mathbb{R},A)$, откуда $T_\Lambda^y f\in L_p([-R,R],A)$. □

Следствие 6. *Пусть выполнены условия* A1–A3. *Если функция f непрерывна и ограничена на $\mathbb{R}$, то функция $T_\Lambda f$ обладает теми же свойствами на $\mathbb{R}^2$ и $|T_\Lambda f(x,y)| \leqslant 2\|f\|_\infty$ для всех x, $y \in \mathbb{R}$.*

Доказательство. Как показывает доказательство теоремы 2, $|\eta^y f(x)| \leqslant 2\|f\|_\infty$ для всех, а не только почти всех x, $y \in \mathbb{R}$. Аналогичное утверждение (его доказательство еще проще) верно для $\tau^y f(x)$ и, следовательно, для $T_\Lambda f(x,y)$. Возьмем последовательность функций $\{f_n\}$ из $\mathcal{E}$, равномерно сходящуюся к f; тогда $\{T_\Lambda f_n\}$ – последовательность непрерывных функций на $\mathbb{R}^2$. При всех x, $y \in \mathbb{R}$

$$|T_\Lambda f_n(x,y) - T_\Lambda f(x,y)| \leqslant 2\|f_n - f\|_\infty.$$

Поэтому $T_\Lambda f_n \to T_\Lambda f$ равномерно на $\mathbb{R}^2$, откуда $T_\Lambda f$ непрерывна. $\square$

Литература

1. H. Chébli, *Sturm–Liouville hypergroups.* — Applications of hypergroup and related measure algebras (Seattle, WA, 1993), 71–88, Contemp. Math. **183**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
2. K. Trimèche, *Transformation intégrale de Weyl et théorème de Paley – Wiener associés à un opérateur différentiel singulier sur* $(0,\infty)$. — J. Math. Pures Appl. **60** (1981), No. 1, 51–98.
3. H. Chébli, *Sur un théorème de Paley – Wiener associé à la décomposition spectrale d'un opérateur de Sturm – Liouville sur* $]0,+\infty[$ *convolution.* — J. Funct. Anal. **17** (1974), 447–461.
4. L. Brandolini, G. Gigante, *Equiconvergence theorems for Chébli – Trimèche hypergroups.* — Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.(5) **8** (2009), No. 2, 211–265.
5. W. Bloom, Z. Xu, *The Hardy–Littlewood maximal function for Chébli – Trimèche hypergroups.* — Applications of hypergroup and related measure algebras (Seattle, WA, 1993), 45–70, Contemp. Math. **183**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995.
6. Г. Ватсон, *Теория бесселевых функций.* I. М., 1949.
7. M. Flensted-Jensen, T. Koornwinder, *The convolution structure for Jacobi function expansion.* — Ark. Mat. **10** (1973), 245–262.
8. A. Fitouhi and M. M. Hamza, *Uniform expansion for the eigenfunction of a singular second-order differential operator.* — SIAM J. Math. Anal **21** (1990), 1619–1632.
9. O. Bracco, *Fonction maximale associée à des opérateurs de Sturm – Liouville singuliers, These.* Université Louis Pasteur, Strasbourg (1999).
10. H. Chébli, *Opérateurs de translation généralisée et semi-groupes de convolution.* — Lect. Notes Math. **404** (1974), 35–59.
11. B. L. J. Braaksma, H. S. V. de Snoo, *Generalized translation operators associated with a singular differential operator.* — Lect. Notes Math. **415** (1974), 62–77.

12. W. C. Connett, C. Markett, A. L. Schwartz, *Product formulas and convolutions for angular and radial spheroidal wave functions.* — Trans. Amer. Math. Soc. **338** (1993), No. 2, 695–710.
13. W. C. Connett, C. Markett, A. L. Schwartz, *Product formulas and convolutions for the radial oblate spheroidal wave functions.* — Methods Appl. Anal. **6** (1999), No. 3, 347–361.
14. C. F. Dunkl, *Differential-difference operators associated to reflection groups.* — Trans. Amer. Math. Soc. **311** (1989), No. 1, 167–183.
15. M. Rösler, *Dunkl operators: theory and applications.* — Lect. Notes Math. **1817** (2003), 93–135.
16. M. A. Mourou and K. Trimèche, *Transmutation operators and Paley–Wiener theorem associated with a singular differential-difference operator on the real line.* — Anal. Appl. **1** (2003), No. 1, 43–70.
17. M. A. Mourou, *Transmutation operators associated with a Dunkl-type differential-difference operator on the real line and certain of their applications.* — Integral Transform. Spec. Funct. **12** (2001), No. 1, 77–88.
18. M. Rösler, *Bessel-type signed hypergroups on* $\mathbb{R}$. — Probability measures on groups and related structures. XI (Oberwolfach, 1994), 292–304, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 1995.
19. N. Ben Salem, A. Ould Ahmed Salem, *Convolution structure associated with the Jacobi – Dunkl operator on* $\mathbb{R}$. — Ramanujan Journal **12** (2006), 359–378.
20. И. М. Гельфанд, Н. Я. Виленкин, *Обобщенные функции. Вып.* 4. *Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства.* М., 1961.
21. M. Rösler, *A positive radial product formula for the Dunkl kernel.* — Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), No. 6, 2413–2438.
22. S. Thangavelu, Y. Xu, *Convolution operator and maximal function for the Dunkl transform.* — J. Anal. Math. **97** (2005), 25–55.
23. Р. Эдвардс, *Ряды Фурье в современном изложении.* Т. 2. М., 1985.
24. Н. П. Корнейчук, *Точные константы в теории приближения.* М., 1987.

Vinogradov O. L. On the norms of generalized translation operators generated by Dunkl-type operators.

The paper establishes the integral representation and improves the norm estimate for the generalized translation operators generated by Dunkl-type operators

$$\Lambda f(x) = f'(x) + \frac{A'(x)}{A(x)}\,\frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

in the spaces $L_p(\mathbb{R})$ with weight A. Under some natural conditions on the function A, it is proved that these norms do not exceed two.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: olvin@math.spbu.ru

Поступило 16 февраля 2011 г.