Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 391, 2011 г.

С. А. Образцова

О ЛОКАЛЬНОЙ СТРУКТУРЕ 9 И 10-СВЯЗНЫХ ГРАФОВ.

§1. Вступление

Под графом в данной работе понимается конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множество вершин графа G традиционно обозначается $V(G)$, а множество ребер – $E(G)$. Степень вершины v в графе G обозначается $d_G(v)$, в случае, когда это не может привести к неопределенности, просто $d(v)$. Наибольшая из степеней вершин графа G обозначается $\Delta(G)$. Количество вершин графа G мы будем обозначать $|G|$. Кроме того, обозначим $V_k(G)$ множество вершин степени k графа G и $V_{>k}(G)$ – множество вершин графа G, степени которых больше, чем k.

Определение 1. *Если $A \subset V(G)$, то через $G - A$ обозначается граф, полученный из G удалением всех вершин множества A и всех инцидентных им ребер. Для $v \in V(G)$ положим $G - v = G - \{v\}$.*

Определение 2. *Если $B \subset E(G)$, то через $G - B$ обозначается граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \setminus B$. Для $e \in E(G)$ положим $G - e = G - \{e\}$.*

Определение 3. *Окрестностью вершины $v \in V(G)$ мы будем называть множество $N_G(v)$ всех вершин, смежных с v. Аналогично, окрестностью множества $A \subset V(G)$ мы будем называть множество $N_G(A)$, состоящее из всех вершин графа G, которые смежны хотя бы с одной из вершин множества A и не лежат в A.*

Определение 4. *Вершинной связностью графа G (обозначаемой $\kappa(G)$) называется мощность наименьшего подмножества множества вершин графа G такого, что при его удалении G становится несвязным или тривиальным (то есть, состоящим из одной вершины). Граф G называется k-связным, если $\kappa(G) \geq k$.*

Ключевые слова: k-связность, минимальный k-связный, минимальный по стягиванию k-связный, нижние оценки.

Исследования поддержаны A*STAR SINGA Scholarship и гранта РФФИ 11-01-12135-офи-м-2011.

Заметим, что если граф G – k-связный, то $d(v) \geq k$ для всех вершин графа G.

В данной работе будут исследоваться k-связные графы, которые перестают быть k-связными при удалении или стягивании любого из ребер (то есть минимальные и минимальные по стягиванию k-связные графы). Процесс изучения графов, у которых уменьшается связность при удалении или стягивании ребер, активизировался в 60-х годах прошлого века, после публикации работ У. Татта, в которых он характеризовал 3-связные графы в терминах стягивания и удаления ребер. Позже, в работах Р. Халина, была сформулирована задача о нахождении наибольшей константы c_k, такой, что количество вершин степени k в минимальном и минимальном по стягиванию k-связном графе G равно по крайней мере $c_k|G|$. Следующим крупным достижением в этой области были работы М. Фонте [4] и Н. Мартинова [11], в которых независимо были получены описания минимальных по стягиванию 4-связных графов и доказано, что $c_4 = 1$. В дальнейшем, исследования разделились на два основных направления: отдельно изучались графы, обладающие только одним из двух свойств – минимальностью и минимальностью по стягиванию. Наибольшее продвижение в первом из этих направлений было получено В. Мадером в статье [9]. В. Мадер доказал, что в минимальном k-связном графе любой цикл содержит по крайней мере одну вершину степени k. Естественным следствием этого утверждения является нижняя оценка $\frac{k-1}{2k-1}$ на долю вершин степени k от всего множества вершин.

Общих результатов во втором направлении получено не было, но существуют продвижения в изучении 5, 6 и 7-связных графов. Для k-связных графов, где $k > 7$, не доказано даже предположение о существовании хотя бы одной вершины степени k в минимальном по стягиванию k-связном графе.

В этой статье доказывается, что $c_k \geq \frac{1}{2}$ для $k = 9, 10$.

Определение 5. *Разделяющее множество – это множество вершин, при удалении которых граф теряет связность. Соответственно, k-разделяющее множество – разделяющее множество, состоящее из k вершин.*

Определение 6. *Будем говорить, что разделяющее множество T отделяет некоторый подграф B графа G, если подграф B представляется в виде объединения не менее чем одной, но не всех, компонент связности, получающихся после удаления разделяющего множества T.*

В дальнейшем, для удобства изложения, вместо "компонента связности" будем говорить просто "компонента".

Определение 7. *Ребро называется существенным, если при его удалении связность графа уменьшается.*

Определение 8. *Граф называется минимальным, если при удалении любого ребра понижается его связность.*

Определение 9. *Пусть граф G – k-связный. Ребро называется нестягиваемым, если при его стягивании граф не сохраняет k-связность.*

Заметим, что если ребро (x, y) – нестягиваемо, то существует k-разделяющее множество, содержащее одновременно вершины x и y.

Определение 10. *Граф называется минимальным относительно стягивания ребер, если все его ребра нестягиваемы.*

Определение 11. *Пусть A – подграф графа G. Тогда через $\overline{A}$ обозначим подграф $G - (V(A) \cup N_G(A))$ графа G.*

Другими словами $\overline{A}$ – это индуцированный подграф графа G на множестве вершин, не входящих в A и не смежных с вершинами из A.

Определение 12. *Будем говорить, что разделяющее множество R графа G разделяет набор вершин X, если при удалении множества R не все неудаленные вершины набора X окажутся в одной компоненте связности.*

§2. Некоторые полезные леммы и теоремы

Первая из этих лемм относится уже, скорее, к фольклору. Впрочем, ее также можно считать частным случаем леммы 1 из [10].

Лемма 1. *Пусть R и T – зависимые k-разделяющие множества в k-связном графе G, отделяющие подграфы A и B соответственно. Тогда если $|(A \cap T) \cup (R \cap T) \cup (R \cap B)| > k$, то $\overline{A} \cap \overline{B} = \varnothing$.*

Лемма 2 (см., например, [13, лемма 6]). *Пусть G – k-связный граф, T – k-разделяющее множество в G, H – произвольная компонента связности $G-T$. Тогда для любого $S \subset T$ верно либо $|S| \leq |N_G(S) \cap V(H)|$, либо $V(H) \subset N_G(S)$.*

Следующая лемма уже встречалась в литературе, но приводится здесь с доказательством из-за дополнительных уточнений, полезных в дальнейшем.

Лемма 3. *Пусть G – k-связный граф, x, y – произвольные смежные вершины этого графа, T – $(k-1)$-разделяющее множество в $G-(x,y)$. Тогда граф $G-(x,y)-T$ состоит ровно из двух компонент, одна из которых содержит x, а другая – y.*

Пусть H – компонента $G-(x,y)-T$, содержащая x. Тогда, при дополнительном требовании $d(x) > k$ и $d(y) > k$ выполняются следующие утверждения:

- *любая вершина множества T смежна в H с вершиной, отличной от x;*
- *для любого $S \subset T$ верно либо $|S| \leq |(N_G(S) \cap V(H)) \setminus \{x\}|$, либо $V(H-x) \subset N_G(S)$;*
- *для любого $S \subset T$ верно либо $|S \cup \{y\}| \leq |(N_G(S \cup \{y\}) \cap V(H))|$, либо $V(H-x) \subset N_G(S)$.*

Доказательство. Доказательство первой части леммы очевидно и неоднократно встречалось в литературе, поэтому здесь опускается. Заметим, что при дополнительном предположении $d(x) > k$ компонента H_x содержит по крайней мере две вершины (иначе x может быть смежна только с вершинами из множества $T \cup \{y\}$ и, таким образом, $d(x) = k$). Аналогично, из $d(y) > k$ следует, что компонента H_y содержит по крайней мере две вершины. Отсюда легко получаем, что $T \cup \{x\}$ и $T \cup \{y\}$ являются k-разделяющими множествами в графе G. Два оставшихся утверждения леммы получаются применением леммы 2 к подграфам $H_x - x$ и H_x и отделяющим их k-разделяющим множествам $T \cup \{x\}$ и $T \cup \{y\}$ соответственно. $\square$

В дальнейшем компоненты графа $G-(x,y)-T$ будут всегда обозначаться в соответствии с содержащимися в них вершинами ребра (x,y) через H_x и H_y (этот способ обозначения компонент будет называться стандартным).

Лемма 4 (см. [12, лемма 5]). *Пусть G – минимальный относительно стягивания k-связный граф и $|G| \geq 2k$. Степень вершины $a \in V(G)$ равна k. Тогда существует k-разделяющее множество T, содержащее a и по крайней мере одну из смежных с ней вершин, отделяющее компоненту, содержащую не более $\frac{k-1}{2}$ вершин.*

Лемма 5. *Пусть G – минимальный k-связный граф. Предположим, что множество $H \subset V(G)$ отделяется k-разделяющим множеством T. Тогда, если $|H| = 2$, то H содержит не более одной вершины степени больше k.*

Доказательство. Предположим, что H содержит две вершины, имеющие степень выше k. Заметим, что эти вершины смежны друг с другом и они обе смежны со всеми вершинами k-разделяющего множества T. Следовательно, множество, разделяющее x и y графе $G-(x,y)$, содержит все вершины T. Отсюда получаем, что в $G-(x,y)$ нет $(k-1)$-разделяющего множества. Полученное противоречие с минимальностью k-связного графа G доказывает лемму. □

Лемма 6 (см. [12, лемма 3]). *Пусть G – минимальный k-связный граф и $x, y \in V(G)$ – смежные вершины. Тогда если $N_G(y) \subset N_G(x) \cup \{x\}$, то степени всех вершин, входящих в $N_G(y)$, равны k.*

Лемма 7 (см. [12, лемма 4]). *Пусть G – минимальный k-связный граф. Предположим, что k-разделяющее множество T, содержащее смежные вершины x и y, отделяет множество, состоящее из не более чем двух вершин. Тогда x смежна с вершиной степени k.*

Лемма 8 (см. [13, лемма 7]). *Пусть G – минимальный k-связный граф и $x, y \in V(G)$ – несмежные вершины. Тогда если $N_G(y) \subset N_G(x)$, то ни одна из вершин, входящих в $N_G(x) \setminus N_G(y)$, не смежна ни с одной вершиной степени большей k из множества $N_G(y)$.*

Лемма 9 (см. [13, лемма 8]). *Пусть G – минимальный k-связный граф, T – k-разделяющее множество, отделяющее от графа G полный подграф F на трех вершинах, и две из этих трех вершин имеют степени больше k. Тогда третья вершина подграфа F и все вершины множества T имеют степени k.*

Определение 13. *Вершину k-связного графа мы будем называть особой, если ее степень равна k, а степени всех смежных с ней вершин больше k.*

Лемма 10 (см. [13, лемма 9]). *Пусть G – минимальный k-связный граф; T – k-разделяющее множество, отделяющее от G полный подграф H на трех вершинах; $a \in T$ – особая вершина и $t \in T$ – вершина смежная с a. Тогда выполняются следующие утверждения*:

1° *в множестве $V(H)$ есть ровно одна вершина степени больше k;*

2° *a – единственная особая вершина в множестве $V(H) \cup T$;*

3° *t – единственная вершина степени больше k в множестве T.*

Лемма 11 (см. [13, лемма 10]). *Пусть G – минимальный k-связный граф; T – k-разделяющее множество, отделяющее от G подграф H, являющийся путем на трех вершинах; $a \in T$ – особая вершина и $t \in T$ – вершина смежная с a. Тогда, выполняются следующие утверждения:*

1° *в множестве $V(H)$ есть ровно одна вершина степени больше k, причем эта вершина смежна с обеими оставшимися вершинами подграфа H;*

2° *a – единственная особая вершина в множестве $V(H) \cup T$;*

3° *t – единственная вершина степени больше k в множестве T.*

Теорема 1 (см. [9]). *Пусть G – минимальный k-связный граф и C – множество вершин произвольного цикла в G. Тогда $C \cap V_k(G) \neq \varnothing$*

Для разбора случаев малого числа вершин нам также понадобится следующая лемма, доказанная в работе [9].

Лемма 12. *Пусть G – минимальный k-связный граф. Тогда $|V_k(G)| \geq \Delta(G)$.*

§3. Леммы о разделяющих множествах и окрестностях

Для удобства изложения в дальнейшем будет предполагаться, что x – вершина степени k. Компонента H – наименьшая по количеству вершин компонента, отделяемая k-разделяющим множеством, содержащим x и одну из смежных с ней вершин; k-разделяющее множество, отделяющее компоненту H, будем обозначать через T, а вершину множества T, смежную с x, – через y. Кроме того, через T_{xy} будет обозначаться множество $T \setminus \{x, y\}$.

Сформулируем две леммы, являющиеся прямым следствием теоремы 1.

Лемма 13. *Пусть a и b – смежные вершины степени выше k. Тогда все вершины $N_G(a) \cap N_G(b)$ имеют степень k.*

Лемма 14. *Пусть a и b – несмежные вершины степени выше k. Тогда из вершин множества $N_G(a) \cap N_G(b)$ не более одной имеет степень выше k.*

Лемма 15. *Пусть $S \subset T_{xy}$ и $|S| < |H|$. Тогда $|N_G(S) \cap V(H)| > |S|$.*

Доказательство. Предположим обратное. Тогда по лемме 2 получаем, что $|N_G(S) \cap H| = |S|$. Следовательно, $(T \setminus S) \cup (N_G(S) \cap H)$ является k-разделяющим множеством, отделяющем непустое собственное подмножество $V(H)$, и содержащим x и y. Полученное противоречие с минимальностью H доказывает лемму. □

Лемма 16. *Пусть a – вершина степени k такая, что множество $S = N_G(a)$ содержит вершину степени k, и $x \in S \cup \{a\}$. Тогда x смежна с вершиной степени k.*

Доказательство. Предположим, что x совпадает с a. Следовательно, x смежна со всеми вершинами S и, в частности, с вершиной степени k, содержащейся в S. Предположим, что x не совпадает с a. Тогда $x \in S$. Следовательно, смежная с x вершина степени k – это a. □

Лемма 17. *Не существует треугольника, состоящего из x и двух вершин из H.*

Доказательство. Предположим обратное. Обозначим смежные вершины из H, с которыми смежна x, через a и b. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G-(a,b)$ и обозначим компоненты $G - S - (a,b)$ стандартным образом. Очевидно, что

$$V(H) \cap V(H_a) \neq \varnothing, \quad \text{и} \quad V(H) \cap V(H_b) \neq \varnothing.$$

Заметим, что каждый из подграфов $H_a \cap H$ и $H_b \cap H$ отделяется разделяющим множеством, содержащим x и смежную с x вершину (в первом случае — b, во втором — a). Следовательно, поскольку оба этих подграфа являются собственными подмножествами минимальной компоненты, каждый из них отделяется разделяющим множеством, содержащим более k вершин. Другими словами,

$$|(V(H) \cap S) \cup (T \cap S) \cup (V(H_a) \cap T) \cup \{b\}| \geq k+1$$

и

$$|(V(H) \cap S) \cup (T \cap S) \cup (V(\overline{H_b}) \cap T) \cup \{a\}| \geq k+1.$$

Следовательно, по лемме 1, получаем, что $V(\overline{H}) \cap V(H_a) = \varnothing$, и $V(\overline{H}) \cap V(H_b) = \varnothing$. Из $|T| = k$ и полученных ранее неравенств также следует, что $2|V(H) \cap S| + |T \cap S| \geq k$. Отсюда и из $|S| = k-1$ следует, что $2|V(\overline{H}) \cap S| + |T \cap S| \leq k-2$. Таким образом,

$$|V(H)| \geq |V(H) \cap S| > |V(\overline{H}) \cap S| = |V(\overline{H})|.$$

То есть, k-разделяющее множество T, содержащее x и смежную с x вершину, отделяет компоненту $\overline{H}$ с меньшим количеством вершин, чем в H. Полученное противоречие с минимальностью H доказывает лемму.

□

Лемма 18. *Предположим, что $|H| = 4$ и в H есть три попарно несмежные вершины степени выше k. Тогда x не является особой вершиной.*

Доказательство. Обозначим три вершины компоненты H, имеющие степень выше k, через a_1, a_2 и a_3. Заметим, что $d_H(a_1) = d_H(a_2) = d_H(a_3) = 1$ и, следовательно, a_1, a_2 и a_3 смежны со всеми вершинами множества T и с a_4, четвертой вершиной множества H. Докажем, что отсюда следует, что все вершины множества T имеют степень k. Рассмотрим произвольную вершину z из множества T. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G-(a_1,z)$ и введем стандартные обозначения для компонент графа $G-(a_1,z)-S$. Заметим, что вершины a_2 и a_3 не могут лежать в компоненте H_z, поскольку $|N_G(a_1) \cap N_G(a_2)| = k$ и $|N_G(a_1) \cap N_G(a_3)| = k$. Следовательно, $\{a_2, a_3\} \subset S$, поскольку эти вершины смежны с z и не лежат в H_z. Заметим, что из всех вершин $V(H) \cup T$ вершина a_1 несмежна только с a_2, a_3. Следовательно, $(V(H) \cup T) \setminus \{z\} \subset V(H_{a_1}) \cup S$ и вершины $\{a_1, a_2, a_3\}$, лежащие в k-разделяющем множестве $S \cup \{a_1\}$, отделяющем H_z, смежны только с одной вершиной в H_z, а именно с z, поскольку это единственная вершина из $V(H) \cup T$, лежащая в H_z. Следовательно, по лемме 2 получаем $H_z = \{z\}$ и $d_G(z) = k$. Таким образом, все вершины T имеют степень k и, в частности, вершина y, смежная с x. □

Лемма 19. *Предположим, что $|H| = 4$ и в H есть три вершины степени выше k, причем по крайней мере две из них смежны. Тогда x не является особой вершиной.*

Доказательство. Заметим, что при $d_G(y) = k$ утверждение леммы выполняется. Таким образом, для доказательства леммы достаточно рассмотреть случай $d_G(y) > k$.

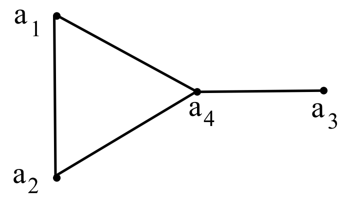

Рис. 1. Подграф H.

Обозначим вершины подграфа H через a_1, a_2, a_3, a_4, так что вершины a_1, a_2, a_3 имеют степень выше k и $(a_1, a_2) \in E(G)$. Заметим, что по лемме 17 вершина x не может быть смежна с обеими вершинами a_1 и a_2, а по лемме 13 вершина y смежна не более чем с одной из вершин a_1 и a_2. Получаем, что между множествами $\{a_1, a_2\}$ и T проведено не более $2k-2$ ребер и, следовательно, $d_H(a_1) + d_H(a_2) \geq 4$. Рассмотрим две возможности: в компоненте H нет пути длины 3 из вершин, имеющих степень выше k, (случай (1)) и компонента H содержит путь из трех вершин степени выше k (случай (2)).

Случай (1). В этом случае вершина a_3 несмежна ни с a_1, ни с a_2. То есть из $d_H(a_1) + d_H(a_2) \geq 4$ следует, что $d_H(a_1) = d_H(a_2) = 2$ и обе вершины a_1, a_2 смежны с четвертой вершиной компоненты H – с a_4. Кроме того, a_4 смежна с a_3, поскольку H – связный подраф. Таким образом, H имеет вид, изображенный на рис. 1.

Заметим, что каждая из вершин a_1 и a_2 смежна по крайней мере с $k-1$ вершиной из T. Следовательно, одна из вершин a_1, a_2 несмежна с x, а другая – с y, и при этом обе вершины a_1 и a_2 смежны со всеми вершинами T_{xy}. Таким образом, если рассмотреть $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (a_1, a_2)$, то $S = T_{xy} \cup \{a_4\}$. Следовательно, x и y лежат в разных компонентах $G - (a_1, a_2) - S$, поскольку не лежат в S и смежны с разными вершинами a_i, где $i = 1, 2$. Полученное утверждение противоречит тому, что $(x, y) \in E(G)$. Таким образом, случай (1) невозможен.

Случай (2). Не умаляя общности будем считать, что путь из трех вершин, имеющих степень выше k, – это (a_1, a_2, a_3). Заметим, что любая вершина, смежная хотя бы с двумя вершинами из a_1, a_2, a_3, имеет степень k по теореме 1. Таким образом, y смежна не более чем с одной вершиной из a_1, a_2, a_3, поскольку $d_G(y) > k$, а по теореме 1 любая вершина, смежная хотя бы с двумя вершинами из a_1, a_2, a_3, имеет степень k. Из теоремы 1 также следует, что a_1 и a_3 несмежны. Из того, что вершины a_1 и a_3 несмежны, следует, что каждая из вершин a_1, a_3 смежна по крайней мере с $k-1$ вершиной из T и a_2 смежна по крайней мере с $k-2$ вершинами из T. Заметим, что если ни одна из вершин a_1, a_2, a_3 не смежна с вершиной y, то вершины a_1, a_3 смежны с x, a_4 и T_{xy}, а вершина a_2 (с учетом леммы 17) – несмежна с x и смежна с a_4 и T_{xy}. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G-(a_1, a_2)$ и введем стандартные обозначения для компонент. Очевидно, что $S = \{a_4\} \cup T_{xy}$. Вершина a_2 должна быть смежна по крайней мере с одной вершиной в компоненте H_{a_2}, поскольку степень a_2 выше k. При этом, a_2 может быть смежна только с вершинами из $(V(H) \cup T) \setminus \{a_2, y\}$ (поскольку по нашему предположению, y не смежна ни с одной из вершин a_1, a_2, a_3). Единственная вершина $(V(H) \cup T) \setminus \{a_2, y\}$, которая может содержаться в H_{a_2}, очевидно, a_3 (все остальные либо смежны с a_1, либо совпадают с ней). С другой стороны, если $a_3 \in V(H_{a_2})$, то $x \in S$, поскольку вершина x смежна с $a_1 \in V(H_{a_1})$ и $a_3 \in V(H_{a_2})$. Таким образом, случай, когда вершина y не смежна ни с одной из вершин a_1, a_2, a_3 невоможен и нам осталось рассмотреть два случая: либо y смежна с одной из вершин a_1 и a_3 (случай (2.1)), либо y смежна с a_2 (случай (2.2)).

Случай (2.1). Не умаляя общности можно считать, что $(a_1, y) \in E(G)$. Следовательно, a_3 несмежна с y и a_1, то есть $N_G(a_3) = T_{xy} \cup \{x, a_2, a_4\}$. Тогда a_2 несмежна ни с x, ни с y, так как в противном случае либо x входит в треугольник с вершинами a_2, a_3, что противоречит лемме 17, либо y входит в треугольник с вершинами a_1, a_2, что противоречит теореме 1. Тогда $N_G(a_2) = T_{xy} \cup \{a_1, a_3, a_4\}$. Следовательно, между вершинами a_2 и a_3 можно провести $k+1$ попарно непересекающихся путей: ребро (a_2, a_3), $k-1$ путь вида (a_2, z, a_3), где z одна из вершин из множества $N_G(a_2) \cap N_G(a_3) = T_{xy} \cup \{a_4\}$, и (a_2, a_1, y, x, a_3). Это означает, что в графе $G-(a_2, a_3)$ не существует $(k-1)$-разделяющего множества, которое разделяет вершины a_2 и a_3. Следовательно, ребро (a_2, a_3) несущественно. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы в случае (2.1).

Случай (2.2). Как уже было замечено выше, между вершинами множества $\{y, a_1, a_3\}$ нет ни одного ребра. Следовательно,

$$N_G(a_1) = N_G(a_3) = T_{xy} \cup \{x, a_2, a_4\}.$$

Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G-(a_2,a_3)$ и обозначим компоненты $G-(a_2,a_3)-S$ стандартным образом. Очевидно, что $T_{xy}\cup\{x,a_4\}\subset V(H_{a_3})\cup S$, причем не все вершины множества $T_{xy}\cup\{x,a_4\}$ (содержащего k вершин) лежат в S. Следовательно, вершина a_1, смежная с вершиной a_2 из H_{a_2} и с вершинами из $T_{xy}\cup\{x,a_4\}$, в том числе и лежащими в H_{a_3}, лежит в S. Следовательно, подграф $H_{a_2}-a_2$, отделяемый k-разделяющим множеством $S\cup\{a_2\}$, содержит не более одной вершины из $V(H)\cup T$ (в $H_{a_2}-a_2$ может лежать только y). Тогда две вершины a_1,a_2, лежащие в k-разделяющем множестве $S\cup\{a_2\}$, смежны не более чем с одной вершиной подграфа $H_{a_2}-a_2$. Таким образом, по лемме 2 получаем, что $V(H_{a_2}-a_2)=\{y\}$ и $d_G(y)=k$. Противоречие с предположением $d_G(y)>k$ доказывает утверждение леммы в случае (2.2). $\square$

§4. Особые вершины

В этой секции во всех леммах будет предполагаться, что x – особая вершина.

Лемма 20. *Пусть H состоит из 4 вершин и ровно две из них имеют степень выше k. Обозначим эти вершины через a_1 и a_2 и предположим, что a_1 и a_2 смежны. Две другие вершины H обозначим a_3 и a_4. Тогда одна из вершин a_3 и a_4 (не умаляя общности можно считать, что a_3) отвечает следующим свойствам*

1° *a_3 смежна по крайней мере с одной из вершин a_1,a_2, смежной с x;*

2° *a_3 смежна с не более чем тремя вершинами степени выше k и не более одной из них входит в T.*

Доказательство. Заметим, что $d_H(a_1)\le 3$ и $d_H(a_2)\le 3$. Следовательно, $|N_G(a_1)\cap T|\ge k-2$ и $|N_G(a_2)\cap T|\ge k-2$. Таким образом, каждая из вершин a_1 и a_2 может быть несмежна не более чем с двумя вершинами из T. Рассмотрим четыре случая:

(1) обе вершины a_1 и a_2 несмежны не более чем с одной вершиной из T;

(2) одна из вершин a_1 и a_2 несмежна ровно с одной вершиной из T, а другая – несмежна с двумя вершинами из T;

(3) обе вершины a_1 и a_2 несмежны ровно с двумя вершинами из T;

(4) одна из вершин a_1 и a_2 смежна со всеми вершинами T, а другая – с $k-2$ вершинами из T.

Прежде чем начать разбор случаев, заметим, что по лемме 17 вершина x не может быть смежна одновременно с a_1 и с a_2, кроме того, по лемме 13 все вершины, смежные одновременно с a_1 и с a_2, имеют степень k. По нашему предположению, x не смежна ни с одной вершиной степени k, следовательно, y смежна максимум с одной из вершин a_1 и a_2. С другой стороны, среди вершин компоненты H вершина x может быть смежна только с вершинами степени выше k (поскольку x – особая), то есть x должна быть смежна ровно с одной из вершин a_1 и a_2.

Случай (1). В предположениях этого случая каждая из вершин a_1 и a_2 несмежна ровно с одной вершиной из x, y, причем они несмежны с различными вершинами из этой пары (не умаляя общности можно считать, что $x \in N_G(a_2)$, $x \notin N_G(a_1)$, $y \in N_G(a_1)$ и $y \notin N_G(a_2)$). Кроме того, получаем, что все вершины T_{xy} смежны и с a_1, и с a_2 и, следовательно, по лемме 13 все вершины T_{xy} имеют степень k. Следовательно, в $V(H) \cup T$ ровно 3 вершины имеют степень больше k, причем ровно одна из них лежит в T. Тогда, второму условию леммы отвечают и a_3 и a_4. Теперь достаточно доказать, что хотя бы для одной из вершин a_3 и a_4 выполнено первое условие леммы. Заметим, что $d_H(a_1) \geq 2$ и $d_H(a_2) \geq 2$, и, следовательно, вершина a_2, которая смежна с x, смежна также по крайней мере с одной из вершин a_3 и a_4. Таким образом, в этом случае утверждение леммы выполено.

Случай (2). Заметим, что если среди вершин T есть вершина, не смежная ни с a_1, ни с a_2, то $|N_G(a_1) \cap N_G(a_2) \cap T| = k - 2$. Кроме того, как было упомянуто выше, $x, y \notin N_G(a_1) \cap N_G(a_2)$. Следовательно, $T_{xy} = N_G(a_1) \cap N_G(a_2) \cap T$ и аналогично предыдущему случаю получаем, что условие леммы выполнено.

Таким образом, можно считать, что вершины из T, с которыми несмежны a_1 и a_2 – различны. Не умаляя общности предположим, что a_1 несмежна с вершиной z_1, а a_2 – с вершинами z_2 и z_3.

Суммируем всю информацию о том, с какими вершинами смежны вершины a_1 и a_2. Вершина a_2 смежна ровно с $k-2$ вершинами из T и, следовательно, $d_H(a_2) = 3$, то есть a_2 смежна с a_1, a_3, a_4. Вершина a_1 смежна с $k-1$ вершиной из T. Отсюда получаем, что $d_H(a_1) \geq 2$. Не умаляя общности можно считать, что a_1 точно смежна с a_2 и a_3 и может быть смежна с a_4. Кроме того, как уже упоминалось выше, каждая из вершин x и y смежна ровно с одной вершиной из a_1 и a_2 (поскольку каждая из них смежна максимум с одной из вершин a_1 и

a_2 и не существует вершины, несмежной ни с a_1, ни с a_2). Другими словами, $\{x, y\} \subset \{z_1, z_2, z_3\}$. Кроме всего перечисленного отдельно отметим, что $\{(a_2, z_1), (a_1, z_2), (a_1, z_3)\} \subset E(G)$.

Заметим, что если в множестве T не более одной вершины имеет степень выше k, то второе условие леммы выполняется для обеих вершин a_3 и a_4. При этом $(a_1, a_3) \in E(G)$ и, следовательно, в этом случае утверждение леммы выполнено. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда в множестве T ровно две вершины имеют степень выше k, а именно две вершины из z_1, z_2, z_3 имеют степень выше k, поскольку одна из этих вершин совпадает с x (и $d_G(x) = k$) и все вершины $T \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ имеют степень k. Теперь рассмотрим три возможности:

– для одной из вершин z_2 и z_3 (не умаляя общности можно считать, что z_2) выполнены следующие условия: во-первых, $d_G(z_2) > k$, и во-вторых, z_2 смежна с обеими вершинами a_3 и a_4 (случай (2.1));

– для z_1 выполнены следующие условия: во-первых, $d_G(z_1) > k$, и во-вторых, z_1 смежна с обеими вершинами a_3 и a_4 (случай (2.2));

– для каждой из вершин z_1, z_2 и z_3 не выполняется хотя бы одно из условий предыдущих пунктов (случай (2.3)).

Случай (2.1). Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в $G - (a_1, z_2)$ и обозначим компоненты графа $G - (a_1, z_2) - S$ стандартным образом. Заметим, что $a_3 \in S$, поскольку a_3 смежна с обеими вершинами a_1 и z_2. Кроме того, существует путь (a_1, a_2, a_4, z_2) и, следовательно,

– либо в S лежит вершина a_4 (случай (2.1.1));

– либо в S лежит вершина a_2 (случай (2.1.2)).

Случай (2.1.1). По нашему предположению, z_2 имеет степень выше k, следовательно, по лемме 3 входящие в $(k-1)$-разделяющее множество S вершины a_3 и a_4 должны быть смежны в H_{z_2} с хотя бы двумя вершинами.

Таким образом, в H_{z_2} должна содержаться вершина из $V(H) \cup T$ (поскольку $N_G(a_3) \subset V(H) \cup T$ и $N_G(a_4) \subset V(H) \cup T$), несмежная с a_1. Следовательно, $z_1 \in H_{z_2}$ и никаких других вершин из $V(H) \cup T$ множество H_{z_2} содержать не может. Следовательно, по лемме 3, получаем, что $V(H_{z_2}) = \{z_1, z_2\}$. Тогда z_1 имеет степень k, поскольку несмежна с a_1, входящей в k-разделяющее множество $S \cup \{a_1\}$. Кроме того, z_1

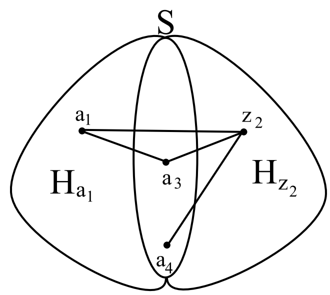

Рис. 2. Компоненты H_{a_1} и H_{z_2}, $(k-1)$-разделяющее множество S.

смежна с вершиной степени k – с a_3, лежащей в k-разделяющем множестве $S \cup \{a_1\}$. Следовательно, z_1 не совпадает с x. Таким образом, $z_3 = x$ и z_2 – единственная вершина из T, имеющая степень выше k, что противоречит предположению, что среди вершин z_1, z_2, z_3 две вершины имеют степень выше k.

Случай (2.1.2). Аналогично случаю (2.1.1) заметим, что входящие в $(k-1)$-разделяющее множество S вершины a_2 и a_3 должны быть смежны в H_{z_2} с хотя бы двумя вершинами. Очевидно, что если a_4

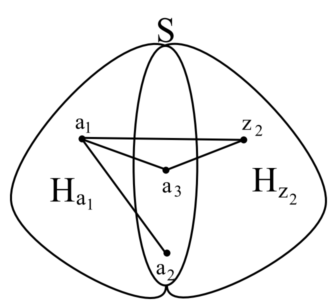

Рис. 3. Компоненты H_{a_1} и H_{z_2}, $(k-1)$-разделяющее множество S.

не лежит в H_{z_2}, то $a_4 \in S$ и мы получаем случай (2.1.1). Рассмотрим случай $a_4 \in V(H_{z_2})$. Заметим, что в таком случае $V(H_{z_2}) \cup S$ содержит по крайней мере $k+1$ вершину из $V(H) \cup T$ (а именно a_4 и $N_G(a_4)$). Следовательно, в компоненте H_{a_1} не более трех вершин из $V(H) \cup T$. Таким образом в подграфе $H_{a_1} - a_1$ содержится не более двух вершин, которые могут быть смежны с вершинами a_1, a_2, a_3, входящими в k-разделяющее множество $S \cup \{a_1\}$, отделяющее этот подграф. Таким образом, по лемме 2 компонента H_{a_1} состоит из a_1 и одной или двух вершин из T (именно из T, поскольку это должны быть вершины из $V(H) \cup T$ и, за исключением a_1, вершины из H не лежат в H_{a_1}).

Заметим, что если этих вершин две, то в H_{a_1} и отделяющем эту компоненту k-разделяющем множестве $S \cup \{z_2\}$ вместе ровно $k+3$ вершины, из которых по крайней мере $k+2$, — это a_1 и смежные с ней вершины, то есть вершины из $V(H) \cup T$. Следовательно, две вершины из $V(H_{a_1} - a_1) \cap T$ могут быть смежны вне $V(H) \cup T$ только с вершинами из $(S \cup \{z_2\}) \cap (\overline{H})$, а в этом множестве не более одной вершины. Таким образом, найдены две вершины, являющиеся вершинами из T, которые в $\overline{H}$ (то есть вне $V(H) \cup T$) смежны только с одной вершиной, откуда по лемме 2 получаем, что $\overline{H}$ состоит из одной вершины. Получено противоречие с минимальностью H.

Рассмотрим случай, когда H_{a_1} содержит a_1 и одну вершину из T. Так же, как и в случае $|V(H_{a_1} - a_1)| = 2$ заметим, что в H_{a_1} и в отделяющем эту компоненту k-разделяющем множестве $S \cup \{z_2\}$ по крайней мере $k+2$ вершины – это a_1 и смежные с ней вершины, то есть вершины из $V(H) \cup T$. Таким образом, получено, что все вершины в H_{a_1} и в $S \cup \{z_2\}$ – это вершины из $V(H) \cup T$. Следовательно, вершины из H_{a_1} не смежны ни с одной вершиной вне $V(H) \cup T$, в том числе и лежащая в T вершина из H_{a_1}. То есть в T есть вершина, не смежная ни с одной вершиной из $\overline{H}$, что противоречит с лемме 2. Таким образом, случай (2.1.2) невозможен.

Следовательно, мы доказали, что в случае (2.1) утверждение леммы выполнено.

Случай (2.2). В этом случае $x \neq z_1$, поскольку $d_G(z_1) > k$. Следовательно, $x \in \{z_2, z_3\}$ и не умаляя общности можно считать, что x совпадает с z_3. Отсюда получаем, что z_3 несмежна ни с a_3, ни с a_4. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в $G - (a_2, z_1)$ и обозначим компоненты графа $G - (a_2, z_1) - S$ стандартным образом. Заметим, что $\{a_3, a_4\} \subset S$, поскольку a_3 и a_4 смежны с обеими вершинами a_2 и z_1. По лемме 3 вершины a_3 и a_4 должны быть смежны по крайней

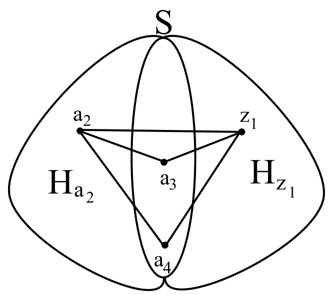

Рис. 4. Компоненты H_{a_2} и H_{z_1}, $(k-1)$-разделяющее множество S.

мере с одной вершиной, отличной от z_1, в компоненте H_{z_1}. Следовательно, поскольку только две вершины из $V(H)\cup T$ (а именно z_2 и z_3) могут лежать в подграфе $H_{z_1}-z_1$ и только одна из этих вершин (z_2) может быть смежна хотя бы с одной из вершин a_3 и a_4, мы получаем, что $V(H_{z_1})=\{z_1,z_2\}$. Тогда заметим, что вершина z_2 отделяется k-разделяющим множеством $S\cup\{z_1\}$ и, следовательно, $d(z_2)=k$. Полученное утверждение противоречит предположению, что среди вершин z_1,z_2,z_3 две вершины имеют степень выше k и, следовательно, случай (2.2) невозможен.

Случай (2.3). Сначала предположим, что $(x,a_2)\in E(G)$, то есть $x=z_1$. Тогда $d_G(z_2)>k$ и $d_G(z_3)>k$, причем ни одна из вершин z_2 и z_3 не может быть смежна с обеими вершинами a_3 и a_4 одновременно. Следовательно, в этом случае утверждение леммы выполняется.

Предположим, что x смежна с вершиной a_1, то есть $x\in\{z_2,z_3\}$. Не умаляя общности можно считать, что $x=z_2$. Тогда $d_G(z_1)>k$ и $d_G(z_3)>k$ и, следовательно, в этом случае ни z_1, ни z_3 не могут быть смежны с a_3 и с a_4 одновременно. Если a_1 смежна с обеими вершинами a_3 и a_4, то утверждение леммы выполняется.

Теперь рассмотрим последнюю оставшуюся возможность – a_1 смежна с a_3 и не смежна с a_4. Предположим, что утверждение леммы не выполняется. Следовательно, a_3 смежна с z_1 и z_3 и, в этом случае, a_4 несмежна ни с z_1, ни с z_3. Кроме того, a_4 несмежна с a_1 и x. Отсюда следует, что степень a_4 меньше k. Полученное противоречие доказывает лемму в случае (2.3).

Случай (3). Заметим, что $d_H(a_1) = d_H(a_2) = 3$, поскольку $d_G(a_1) \geq k+1$ и $d_G(a_2) \geq k+1$ и, по условию пункта (3), из вершин k-разделяющего множества T и a_1, и a_2 смежны только с $k-2$ вершинами. Следовательно, $d_G(a_1) = d_G(a_2) = k+1$, а так же и a_1, и a_2 смежны с обеими вершинами a_3 и a_4. Таким образом, для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что хотя бы одна из вершин a_3 и a_4 смежна не более чем с одной из вершин степени выше k из множества T.

Заметим, что из $d_G(a_1) = d_G(a_2) = k+1$ следует, что

$$|N_G(a_1) \setminus \{a_2\}| = |N_G(a_2) \setminus \{a_1\}| = k.$$

Значит, если $N_G(a_1) \setminus \{a_2\} = N_G(a_2) \setminus \{a_1\}$, то в графе $G - (a_1, a_2)$ вершины a_1 и a_2 можно разделить только k-разделяющим множеством. Другими словами, ребро (a_1, a_2) – несущественно, что противоречит минимальности графа G. Таким образом,

– либо в T есть вершина, не смежная ни с a_1, ни с a_2 и две вершины, каждая из которых смежна ровно с одной из вершин a_1 или a_2 (случай (3.1));

– либо есть две вершины, смежные с a_1 и несмежные с a_2, и две вершины, смежные с a_2 и несмежные с a_1 (случай (3.2)).

Случай (3.1). Обозначим вершину, смежную с a_1 и несмежную с a_2, через z_1, а вершину, смежную с a_2 и несмежную с a_1, – через z_2. Вершину, не смежную ни с a_1, ни с a_2, обозначим z_3. Сведения о ребрах, инцидентных вершинам a_1, a_2 суммированы на рис. 5. Заметим,

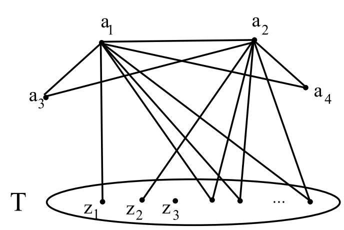

Рис. 5. Ребра, инцидентные вершинам a_1, a_2.

что если в множестве T не более одной вершины имеет степень выше k, то второе условие леммы выполняется для обеих вершин a_3 и a_4 и, следовательно, в этом случае утверждение леммы выполнено. Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда в множестве T

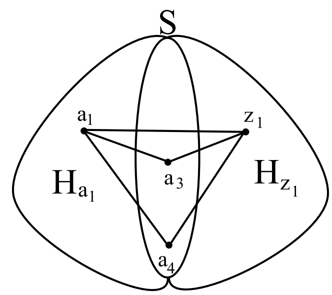

Рис. 6. Компоненты H_{a_1} и H_{z_1}, $(k-1)$-разделяющее множество S.

по крайней мере две вершины имеют степень выше k, а именно ровно две вершины из z_1, z_2, z_3 имеют степень выше k, поскольку одна из этих вершин совпадает с x (и $d_G(x) = k$) и все вершины $T \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$ имеют степень k.

Рассмотрим две возможности:

– для одной из вершин z_1 и z_2 (не умаляя общности можно считать, что z_1) выполнены следующие условия: во-первых, $d_G(z_1) > k$, и во-вторых, z_1 смежна с обеими вершинами a_3 и a_4 (случай (3.1.1));

– для каждой из вершин z_1, z_2 не выполняется хотя бы одно из условий предыдущего пункта (случай (3.1.2)).

Случай (3.1.1). Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G-(a_1, z_1)$ и обозначим компоненты $G-(a_1, z_1)-S$ стандартным образом. Заметим, что обе компоненты содержат по крайней мере по две вершины, поскольку вершины a_1 и z_1 имеют степени больше k. Вершины a_3 и a_4 лежат в S, поскольку смежны и с a_1, и с z_1. По лемме 3 вершины a_3 и a_4 должны быть смежны по крайней мере с двумя вершинами в H_{z_1}. Следовательно, кроме z_1 в H_{z_1} содержится еще по крайней мере одна вершина из $V(H) \cup T$. Очевидно, что эта вершина не может быть смежна с a_1 и, следовательно, этой вершиной могут быть только z_2 или z_3.

Предположим, что H_{z_1} содержит только одну из этих двух вершин. Отметим, что в этом случае вершины a_3 и a_4 из k-разделяющего множества $S \cup \{z_1\}$ в компоненте $H_{z_1} - z_1$ могут быть смежны только с той из вершин z_2, z_3, которая лежит в H_{z_1}. Таким образом, эта вершина должна быть смежна с обеими вершинами a_3 и a_4.

Сначала рассмотрим случай, когда $z_2 \in V(H_{z_1})$. Заметим, что в этом случае $a_2 \in S$. Таким образом, входящие в k-разделяющее множество $S \cup \{a_1\}$ вершины a_1, a_2, a_3, a_4 смежны в отделяемой этим множеством компоненте H_{z_1} ровно с двумя вершинами – z_1 и z_2. Следовательно, по лемме 2 компонента состоит ровно из этих двух вершин. Следовательно, вершины z_1 и z_2 имеют степень k, поскольку в множестве $V(H_{z_1}) \cup S$ вершина z_1 несмежна с вершиной a_2 и вершина z_2 – с вершиной a_1. Таким образом, этот случай невозможен, покольку по нашему предположению степень z_1 больше k.

В случае, если $z_3 \in V(H_{z_1})$ и $a_2 \in S$ с помощью аналогичных рассуждений получим, что степень z_3 меньше k, что противоречит k-связности графа G. Если же $a_2 \notin S$, то $a_2 \in V(H_{a_1})$, поскольку $(a_1, a_2) \in E(G)$. Заметим, что, поскольку и z_1, и z_3 смежны с обеими вершинами a_3 и a_4, ни одна из них не может совпадать с x. С другой стороны, по лемме 17 одна из вершин z_1, z_2, z_3 должна совпадать с x. Следовательно, одна из вершин z_1, z_3 совпадает с y и z_2 совпадает с x. Отсюда получаем, что $x \in S$, поскольку вершина x смежна и с вершиной $y \in V(H_{z_1})$ и с $a_2 \in V(H_{a_2})$. Заметим, что в множестве $V(H_{z_1}) \cup S \cup \{a_1\}$ ровно $k+2$ вершины и z_3 несмежна с a_1. Следовательно, $d(z_3) = k$ и вершина z_3 смежна со всеми вершинами $V(H_{z_1}) \cup S$. В частности, z_3 смежна с x, что противоречит тому, что x – особая вершина. Следовательно, этот случай также невозможен.

Таким образом, осталось рассмотреть случай, когда $\{z_2, z_3\} \subset H_{z_1}$. Очевидно, что в этом случае $a_2 \in S$. Следовательно, входящие в k-разделяющее множество $S \cup \{a_1\}$ вершины a_1, a_2, a_3, a_4 смежны в отделяемой этим множеством компоненте H_{z_1} ровно с тремя вершинами – z_1, z_2 и z_3. Тогда по лемме 2 компонента H_{z_1} из этих вершин и состоит. Отсюда получаем, что $d_G(z_3) = k$, поскольку вершина z_3 несмежна по крайней мере с двумя вершинами из k-разделяющего множества $S \cup \{a_1\}$. С другой стороны, z_3 не совпадает с x. (Предположим противное. По введенным в случае (3.1) обозначениям z_3 не смежна ни с a_1, ни с a_2, и следовательно, смежна по крайней мере с одной из вершин a_3, a_4. Это противоречит предположению леммы о том, что x – особая вершина, так как $d_G(a_3) = d_G(a_4) = k$). Полученное противоречие с тем, что среди вершин z_1, z_2, z_3 есть по крайней мере две вершины, имеющие степень выше k, доказывает лемму в случае (3.1.1).

Случай (3.1.2). Заметим, что по лемме 17 одна из вершин z_1, z_2, z_3 совпадает с x. Следовательно, в множестве T не более двух вершин имеют степень выше k и по крайней мере одна из них смежна не более чем с одной из вершин a_3, a_4 (по условию случая (3.1.2) вершины z_1, z_2 не могут одновременно иметь степень выше k и быть смежными с обеими вершинами a_3, a_4). Таким образом, по крайней мере одна из вершин a_3, a_4 смежна не более чем с одной вершиной степени выше k. Отсюда получаем, что в случае (3.1.2) утверждение леммы выполнено.

Случай (3.2). Обозначим вершины, с которыми смежна вершина a_1 и несмежна a_2, через z_1 и z_2, а вершины, смежные с a_2 и несмежные с a_1, – через z_3 и z_4. Рассмотрим две возможности:

– хотя бы одна из вершин $z_1, \ldots, z_4$ имеет степень выше k и смежна с обеими вершинами a_3 и a_4 (случай (3.2.1));

– ни одна из вершин $z_1, \ldots, z_4$, имеющая степень выше k, не может быть смежна с обеими вершинами a_3 и a_4 одновременно (случай (3.2.2)).

Случай (3.2.1). Не умаляя общности можно считать, что вершина, обладающая перечисленными свойствами, – z_1. Информация об имеющихся ребрах суммирована на рис.7.

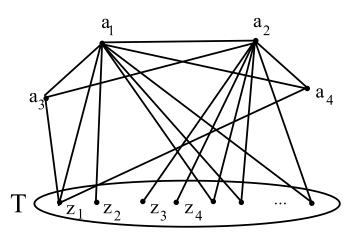

Рис. 7. Компонента H и k-разделяющее множество T.

Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G-(a_1, z_1)$ и обозначим компоненты графа $G-(a_1, z_1)-S$ стандартным образом. Заметим, что обе компоненты H_{a_1} и H_{z_1} содержат хотя бы по две вершины. Кроме того, $\{a_3, a_4\} \subset S$ и, следовательно, по лемме 2 вершины $\{a_3, a_4\}$ должны быть смежны в H_{z_1} по крайней мере с двумя вершинами. Тогда в H_{z_1} лежит отличная от z_1 вершина из $V(H) \cup T$.

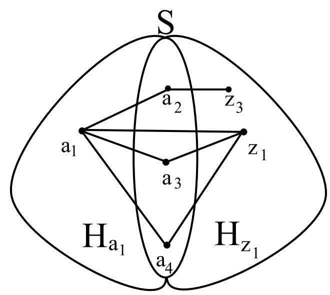

Рис. 8. Компоненты H_{a_1} и H_{z_1}, $(k-1)$-разделяющее множество S.

Очевидно, что эта вершина должна быть несмежна с a_1. То есть по крайней мере одна из вершин z_3 и z_4 лежит в H_{z_1}. Следовательно, $a_2 \in S$.

Предположим, что в H_{z_1} лежит только одна из вершин z_3 или z_4. Не умаляя общности можно считать, что $z_3 \in H_{z_1}$. В этом случае вершины $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, лежащие в k-разделяющем множестве $S \cup \{a_1\}$, в отделяемой этим множеством компоненте смежны только с двумя вершинами – z_1 и z_3. Следовательно, по лемме 2, получаем $V(H_{z_1}) = \{z_1, z_3\}$. Отсюда следует, что степени обеих вершин z_1, z_3 равны k (поскольку z_1 не смежна с вершиной a_2 из разделяющего множества, а z_3 – с a_1), что противоречит предположению о том, что $d_G(z_1) > k$.

Таким образом, H_{z_1} содержит обе вершины z_3 и z_4. Аналогично уже рассмотренному случаю, получим, что $V(H_{z_1}) = \{z_1, z_3, z_4\}$. Заметим, что z_1 смежна и с z_3, и с z_4, и со всеми вершинами S за исключением a_2 (иначе ее степень меньше чем $k+1$). Следовательно, z_3 и z_4 имеют степень k по теореме 1, поскольку входят в циклы (z_1, a_1, a_2, z_i), где $i = 3, 4$, содержащие три вершины степени выше k – z_1, a_1 и a_2. Кроме того, вершина z_2 не может одновременно иметь степень выше k и быть смежной хотя бы с одной из вершин z_3 и z_4, поскольку, если z_2 смежна хотя бы с одной из вершин z_3 и z_4, то $z_2 \in S$ и, следовательно, смежна с z_1 и входит в треугольник с двумя вершинами степени выше k – a_1 и z_1.

Отсюда получаем, что если $d_G(z_2) > k$, то z_2 не может быть смежна одновременно с a_3 и a_4, поскольку в противном случае, проделав для вершины z_2 рассуждения, аналогичные рассуждениям для вершины z_1, получим, что z_2 должна быть смежна с z_3 и z_4. Таким образом, в рассматриваемом случае в множестве T только вершины z_1, z_2 могут иметь степень выше k и только одна из них может быть смежна с обеими вершинами a_3 и a_4. Следовательно, в случае если в T есть вершина степени выше k, смежная с a_3 и a_4, утверждение леммы выполнено.

Случай (3.2.2). Заметим, что одна из вершин $z_1, \ldots, z_4$ совпадает с x. Следовательно, среди вершин T не более трех имеют степень выше k и ни одна из них не смежна одновременно с a_3 и a_4 по предположению случая (3.2.2). Тогда одна из вершин a_3, a_4 смежна не более, чем с одной из вершин множества T, имеющих степень выше k. Следовательно, и в этом случае утверждение леммы выполняется.

Случай (4). Не умаляя общности можно считать, что вершина a_1 смежна со всеми вершинами множества T, а вершина a_2 – только с $k-2$. Поскольку каждая из вершин x и y может быть смежна не более чем с одной из вершин a_1 и a_2, получаем, что обе вершины x, y смежны с a_1 и не смежны с a_2. По лемме 13 все вершины множества T_{xy} имеют степень k, поскольку входят в треугольники с вершинами a_1 и a_2, имеющими степень выше k. Отсюда следует, что в множестве $V(H) \cup T$ ровно три вершины степени выше k и только одна из них лежит в множестве T. То есть, если хотя бы одна из вершин a_3, a_4 смежна с вершиной a_1, то утверждение леммы выполнено.

Предположим противное. В этом случае вершина a_1 не смежна ни с вершиной a_3, ни с вершиной a_4. Кроме того, $\{(a_2, a_3), (a_2, a_4)\} \subset E(G)$, поскольку a_2 смежна только с $k-2$ вершинами множества T, то есть $d_H(a_2) = 3$. С другой стороны, вершина y смежна по крайней мере с двумя вершинами из множества $V(H)$, поскольку в противном случае x и y смежны с одной вершиной в H – с a_1, что противоречит лемме 2. Следовательно, не умаляя общности можно считать, что $(y, a_3) \in E(G)$.

Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (a_1, y)$ и обозначим компоненты графа $G - (a_1, y) - S$ стандартным образом. Очевидно, что $x \in S$. Заметим что в графе G есть путь a_1, a_2, a_3, y и, следовательно, по крайней мере одна из вершин a_2, a_3 лежит в множестве S. По лемме 3 эта вершина должна быть смежна по крайней мере с одной вершиной в H_y, отличной от y. Отсюда следует, что хотя бы одна из несмежных с a_1 вершин множества $V(H) \cup T$ лежит в компоненте H_y, то есть $a_3 \in V(H_y)$ или $a_4 \in V(H_y)$.

Заметим, что вершины a_3 и a_4 не могут лежать в разных компонентах графа $G-(a_1,y)-S$. Иначе $d_H(a_3)=d_H(a_4)=1$ и, следовательно, обе вершины a_3,a_4 смежны с $k-1$ вершиной из T, то есть обе вершины a_3,a_4 смежны с y, что противоречит тому, что одна из вершин a_3,a_4 лежит в компоненте H_{a_1}. Таким образом, $a_3,a_4\in V(H_y)\cup S$.

Заметим также, что если только одна из вершин a_3,a_4 лежит в множестве $V(H_y)$, то по лемме 2, примененной к k-разделяющему множеству $S\cup\{a_1\}$ и компоненте H_y, получаем, что H_y состоит из двух вершин. Получено потиворечие с k-связностью графа G, поскольку та из вершин a_3,a_4, которая лежит в H_y в множестве $S\cup\{a_1\}\cup V(H_y)$ несмежна по крайней мере с двумя вершинами (а именно с x и a_1) и, следовательно, имеет степень не выше $k-1$.

Таким образом, осталось рассмотреть только случай $a_2\in S$ и $\{a_3,a_4\}\subset V(H_y)$. В этом случае множество $S\cup V(H_y)$ содержит $k+3$ вершины из $V(H)\cup T$, а именно a_3,a_4, k смежных с ними вершин, и x. Таким образом, в компоненте H_{a_1} есть ровно одна вершина из $V(H)\cup T$ – вершина a_1. Получено противоречие с леммой 3, поскольку a_2 смежна в компоненте H_{a_1} только с вершиной a_1. Полученное противоречие доказывает, что утверждение леммы выполнено в случае (4). Лемма полностью доказана. □

Лемма 21. *Пусть H состоит из 4 вершин и среди них ровно две имеют степень выше k. Обозначим эти вершины через a_1 и a_2 и предположим, что a_1 и a_2 несмежны. Две другие вершины H обозначим a_3 и a_4. Тогда одна из вершин a_3 и a_4 (не умаляя общности можно считать, что a_3) отвечает следующим свойствам*

1° a_3 смежна по крайней мере с одной из вершин a_1 и a_2, смежной с x;

2° a_3 смежна с не более чем тремя вершинами степени выше k и не более одной из них входит в T.

Доказательство. Заметим, что $d_H(a_1)\le 2$ и $d_H(a_2)\le 2$, поскольку a_1 и a_2 несмежны. Следовательно, есть ровно две возможности:
- либо $d_H(a_i)=1$ для $i=1$ или $i=2$ (случай (1));
- либо $d_H(a_1)=d_H(a_2)=2$ (случай (2)).

Случай (1). Не умаляя общности можно считать, что $d_H(a_1)=1$. Следовательно, a_1 смежна со всеми вершинами T. Заметим, что вершина a_2 смежна по крайней мере с $k-1$ вершиной из T, то есть несмежна не более чем с одной. Очевидно, что если a_2 смежна со всеми

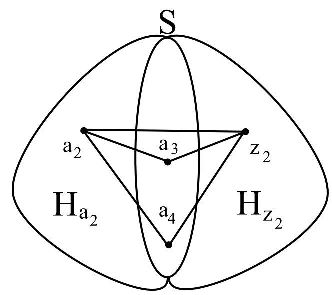

Рис. 9. Компоненты H_{a_2} и H_{z_2}, $(k-1)$-разделяющее множество S.

вершинами T, то по лемме 14 не более одной вершины T может иметь степень выше k. Таким образом, второе условие леммы выполняется для обеих вершин a_3 и a_4. С другой стороны, H – компонента связности, а значит, поскольку a_1 и a_2 несмежны, каждая из них смежна хотя бы с одной из вершин a_3 или a_4. Следовательно, в этом случае утверждение леммы выполняется.

Рассмотрим оставшийся случай, когда вершина a_2 несмежна с одной вершиной из множества T (обозначим эту вершину z_1). В этом случае $d_H(a_2) = 2$, то есть a_2 смежна с a_3 и a_4. По лемме 14 из вершин $T \setminus \{z_1\}$ не более одной имеет степень выше k. Заметим, что если такой вершины не существует или если $d_G(z_1) = k$, то в T не более одной вершины имеет степень выше k и, следовательно, аналогично предыдущему случаю утверждение леммы выполняется.

Рассмотрим оставшийся случай, когда одна из вершин $T \setminus \{z_1\}$ имеет степень выше k (обозначим эту вершину z_2) и $d_G(z_1) > k$. Очевидно, что z_1 не совпадает с x. Таким образом, x смежна с обеими вершинами a_1 и a_2. Следовательно, достаточно доказать, что хотя бы одна из вершин a_3 и a_4 смежна не более чем с одной вершиной из z_1 и z_2.

Докажем, что вершина z_2 не может быть смежна одновременно с вершинами a_3 и a_4. Предположим обратное. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (a_2, z_2)$ и обозначим компоненты графа $G - (a_2, z_2) - S$ стандартным образом. Легко видеть, что вершины a_3 и a_4, смежные и с a_2, и с z_2, лежат в множестве S. Следовательно, по лемме 3 вершины a_3 и a_4 должны быть смежны хотя бы с одной вершиной в H_{z_2}, поскольку вершина z_2 имеет степень больше k и, следовательно, компонента H_{z_2} содержит более одной вершины. Таким образом, в H_{z_2} должна содержаться вершина из $V(H) \cup T$, несмежная с a_2. Заметим, что если $a_1 \in H_{z_2}$, то S содержит a_3, a_4 и $k-2$ вершины T, смежные и с a_1 и с a_2 и отличные от z_2. Получено противоречие с $|S| = k-1$. Следовательно, $a_1 \notin V(H_{z_2})$ и $z_1 \in V(H_{z_2})$. Тогда вершины a_2, a_3 и a_4, входящие в k-разделяющее множество $S \cup \{a_2\}$, в отделяемой этим множеством компоненте H_{z_2} смежны только с двумя вершинами z_1 и z_2. По лемме 2 получаем, что $H_{z_2} = \{z_1, z_2\}$. Таким образом, по лемме 5 получаем, что одна из вершин z_1 и z_2 должна иметь степень k, что противоречит нашему предположению о том, что степени обеих вершин больше k. Следовательно, z_2 не может быть смежна одновременно с a_3 и a_4. Таким образом, случай (1) полностью разобран.

Случай (2). В этом случае обе вершины a_1 и a_2 смежны с a_3 и a_4. Следовательно, для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что хотя бы одна из вершин a_3 и a_4 смежна не более чем с одной вершиной степени выше k в k-разделяющем множестве T. Очевидно, что если хотя бы одна из вершин a_1 и a_2 смежна со всеми вершинами T, то этот случай разбирается аналогично случаю (1). Таким образом, достаточно рассмотреть случай, когда a_1 и a_2 несмежны каждая ровно с одной вершиной в T (обозначим эти вершины z_1 и z_2 соответственно).

Рассмотрим две возможности:

– z_1 и z_2 совпадают (случай (2.1));

– вершины z_1 и z_2 различны (случай (2.2)).

Случай (2.1). Заметим, что если $z_1 = z_2$, то аналогично случаю (1) в T не больше двух вершин имеют степень выше k, причем утверждение леммы выполнено, если такая вершина только одна. Предположим, что ровно две вершины из T имеют степень выше k. Одна из этих вершин z_1, а вторую мы обозначим z_3. Таким образом, так же как и в случае (1) достаточно доказать, что z_3 смежна только с одной из вершин a_3 и a_4. Предположим обратное. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (a_1, z_3)$ и обозначим компоненты графа $G - (a_1, z_3) - S$ стандартным образом. Легко видеть, что вершины a_3 и a_4, смежные и с a_1, и с z_3, лежат в множестве S, и, аналогично случаю (1), вершина z_1 лежит в H_{z_3}, причем $H_{z_3} = \{z_1, z_3\}$. Заметим, что в этом случае вершина z_1 отделяется k-разделяющим

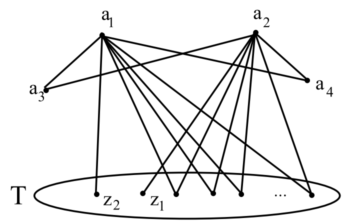

Рис. 10. Ребра, инцидентные вершинам a_1, a_2.

множеством $S \cup \{z_3\}$, что противоречит предположению $d_G(z_1) > k$. Полученное противоречие доказывает лемму в случае (2.1).

Случай (2.2). Рассмотрим случай, когда z_1 и z_2 различны. Известная информация о ребрах между вершинами $V(H) \cup T$ суммирована на рис. 10. По лемме 14 получаем, что среди вершин $T \setminus \{z_1, z_2\}$ не более одной вершины имеет степень выше k. Следовательно, если обе вершины z_1 и z_2 имеют степень k, то утверждение леммы выполнено для обеих вершин a_3 и a_4. Таким образом, достаточно доказать утверждение леммы в предположении, что по крайней мере одна из вершин z_1, z_2 имеет степень выше k.

Не умаляя общности можно считать, что $d_G(z_1) > k$. Докажем, что *если z_1 смежна с a_3 и a_4, то z_2 имеет степень k и $(z_1, z_2) \in E(G)$.* Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (a_2, z_1)$ и обозначим компоненты графа $G - (a_2, z_1) - S$ стандартным образом. Заметим, что $\{a_3, a_4\} \subset S$, поскольку a_3 и a_4 смежны и с a_2 и с z_1. По лемме 3 вершины a_3 и a_4 должны быть смежны с отличной от z_1 вершиной в H_{z_1}, поскольку степень z_1 выше k и, следовательно, H_{z_1} содержит по крайней мере две вершины. Заметим, что если a_1 лежит в H_{z_1}, то множество S содержит a_3, a_4 и $k-2$ вершины множества T, смежные с a_1 и a_2 одновременно. Получено противоречие с $|S| = k-1$. Следовательно, единственная вершина, которая может быть смежна с вершинами a_3 и a_4 и может лежать в H_{z_1} – это z_2. Тогда по лемме 2, примененной к k-разделяющему множеству $S \cup \{z_1\}$ и отделяемой им компоненте $H_{z_1} - z_1$, получаем, что $H_{z_1} - z_1 = \{z_2\}$. Следовательно, $(z_1, z_2) \in E(G)$, поскольку z_1 лежит в k-разделяющем множестве, отделяющем z_2, и z_2 имеет степень k.

Как уже упоминалось выше, в $T \setminus \{z_1, z_2\}$ не более одной вершины имеет степень выше k. Рассмотрим две возможности:

(2.2.1) все вершины $T \setminus \{z_1, z_2\}$ имеют степень k;
(2.2.2) ровно одна вершина z_3 из $T \setminus \{z_1, z_2\}$ имеет степень выше k.

Случай (2.2.1). Заметим, что по доказанному утверждению, либо из вершин T только z_1 и z_2 имеют степень выше k и каждая из них смежна не более чем с одной из вершин a_3, a_4, либо из вершин T только z_1 имеет степень выше k. Очевидно, что в обоих случаях по крайней мере одна из вершин a_3, a_4 смежна не более чем с одной вершиной степени выше k в T. Таким образом, в этом случае утверждение леммы выполнено.

Случай (2.2.2). Докажем, что если z_3 *смежна с* a_3 *и* a_4 *одновременно, то* z_2 *имеет степень ровно* k *и* z_1 *и* z_2 *несмежны.* Для этого рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (a_1, z_3)$, обозначим компоненты графа $G - (a_1, z_3) - S$ стандартным образом и заметим, что $a_3, a_4 \in S$. Тогда по лемме 3 в компоненте H_{z_3} должна быть вершина, смежная с a_3 и отличная от z_3, то есть в H_{z_3} содержится несмежная с a_1 вершина $V(H) \cup T$ (а именно, a_2 или z_1). Разберем эти две возможности:
(2.2.2.1) $a_2 \in V(H_{z_3})$;
(2.2.2.2) $z_1 \in V(H_{z_3})$ и $a_2 \notin V(H_{z_3})$.

Случай (2.2.2.1). Заметим, что если $a_2 \in H_{z_3}$, то S состоит из вершин a_3, a_4 и $T \setminus \{z_1, z_2, z_3\}$, поскольку это $k-1$ вершина, смежная с a_1 и a_2 одновременно. Следовательно, $z_2 \in H_{a_1}$, поскольку z_2 смежна с a_1 и несмежна с a_2. Аналогично, $z_1 \in H_{z_3}$ и, следовательно, $(z_1, z_2) \notin E(G)$.

Заметим, что единственная вершина из $V(H) \cup T$ в $H_{a_1} - a_1$ – это z_2 и, следовательно, вершины a_2, a_3, a_4, входящие в отделяющее эту компоненту k-разделяющее множество $S \cup \{a_2\}$, смежны в $H_{a_1} - a_1$ ровно с одной вершиной. Тогда по лемме 2 подграф $H_{a_1} - a_1$ состоит из одной вершины z_2 и, следовательно, $d_G(z_2) = k$. Таким образом, в этом случае утверждение верно.

Случай (2.2.2.2). Таким образом, $z_1 \in H_{z_3}$ и $a_2 \in S$. Заметим, что тогда вершины a_3, a_4 смежны в компоненте $H_{z_3} - z_3$, отделяемой k-разделяющим множеством $S \cup \{z_3\}$, только с вершиной z_1. Следовательно, по лемме 2 получаем, что $H_{z_3} - z_3 = \{z_1\}$ и, значит, $d_G(z_1) = k$. Полученное противоречие с предположением $d_G(z_1) > k$ доказывает утверждение.

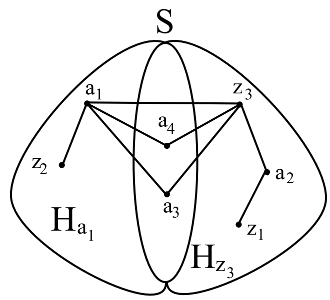

Рис. 11. Компоненты H_{a_1} и H_{z_3}, $(k-1)$-разделяющее множество S.

По предположениям рассматриваемого случая, в T может быть не более трех вершин степени выше k – это z_1, z_2 и z_3, причем $d_G(z_1) > k$ и $d_G(z_3) > k$. Доказаны два следующих утверждения. Во-первых, если z_1 смежна с a_3 и a_4, то z_2 имеет степень k и $(z_1, z_2) \in E(G)$. Во-вторых, если z_3 смежна с a_3 и a_4 одновременно, то z_2 имеет степень ровно k и $(z_1, z_2) \notin E(G)$. Из этих двух утверждений легко видеть, что по крайней мере одна из вершин a_3 и a_4 смежна в T только с одной вершиной степени выше k. Таким образом, утверждение леммы выполнено.

□

Лемма 22. *Предположим, что H состоит из четырех вершин и ровно две из них имеют степень выше k. Тогда не более чем одна из вершин T_{xy} может быть смежна только с вершинами, имеющими степень больше k.*

Доказательство. Заметим, что по лемме 15 любые две вершины из множества T_{xy} должны быть смежны по крайней мере с тремя вершинами из H, то есть, в частности, и по крайней мере с одной вершиной степени k. Следовательно, из любой пары вершин множества T_{xy} по крайней мере одна смежна с вершиной, имеющей степень k. Таким образом, утверждение леммы выполняется. □

Лемма 23. *Пусть H состоит из 4 вершин и среди них ровно одна имеет степень выше k. Обозначим эту вершину через a_1 и предположим, что $d_H(a_1) = 1$. Другие вершины H обозначим a_2, a_3 и a_4.*

Тогда $(a_1, x) \in E(G)$ и одна из вершин a_2, a_3, a_4 (не умаляя общности можно считать, что a_2) отвечает следующим свойствам

1° *a_2 смежна с a_1,*

2° *a_2 смежна только с одной вершиной степени выше k.*

Доказательство. Заметим, что поскольку $d_H(a_1) = 1$, вершина a_1 смежна со всеми вершинами T (в том числе и с x). Обозначим через a_2 единственную вершину подграфа H, смежную с a_1. Докажем, что любая вершина, смежная с a_1 и a_2 одновременно, имеет степень k. Рассмотрим произвольную вершину из T, смежную с a_2, и обозначим ее t. Предположим, что $d_G(t) > k$. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (a_1, t)$ и обозначим компоненты графа $G - (a_1, t) - S$ стандартным образом. Заметим, что, во-первых, $a_2 \in S$, поскольку a_2 смежна и с a_1, и с t, а во-вторых, $|H_t| \geq 2$, поскольку $d_G(t) > k$, следовательно, по лемме 3 вершина a_2 должна быть смежна с отличной от t вершиной H_t. Тогда компонента H_t должна содержать несмежную с a_1 вершину из $V(H) \cup T$. Следовательно, по крайней мере одна из вершин a_3 и a_4 должна содержаться в H_t и быть смежной с a_2. Не умаляя общности можно считать, что $a_3 \in H_t$ и $(a_2, a_3) \in E(G)$. Рассмотрим две возможности:

– $(a_3, a_4) \in E(G)$ (случай (1));

– $(a_3, a_4) \notin E(G)$ (случай (2)).

Случай (1). По нашим предположениям, a_3 смежна с a_2 и a_4, и по условию леммы несмежна с a_1. Следовательно, a_3 смежна с $k-2$ вершинами из T. Тогда H_{a_1} содержит не более двух вершин из T, которые несмежны с a_3. Заметим, что одна из вершин T, несмежная с a_3, – это вершина x, поскольку x – особая вершина. Заметим также, что поскольку x и a_1 смежны, то $x \in V(H_{a_1}) \cup S$ и, следовательно, H_{a_1} не может содержать ровно одну вершину из T (иначе по лемме 2 подграф $H_{a_1} - a_1$ состоит из этой единственной вершины и x не является особой вершиной по лемме 16). Следовательно, H_{a_1} содержит ровно две вершины из T. Заметим также, что вершина a_4 должна быть смежна в множестве T с одной из вершин, с которой несмежна a_3 (иначе $N_G(a_3) \setminus \{a_4\} = N_G(a_4) \setminus \{a_3\}$, что противоречит k-связности G). Таким образом, a_4 смежна и с вершиной из H_{a_1} (а именно, с единственной вершиной из T, несмежной с a_3 и смежной с a_4) и с вершиной из H_t (а именно с a_3), и, следовательно, $a_4 \in S$ и k-разделяющее множество $S \cup \{a_1\}$ содержит три вершины a_1, a_2, a_4 смежные ровно с двумя вершинами в отделяемой компоненте $H_{a_1} - a_1$. Следовательно,

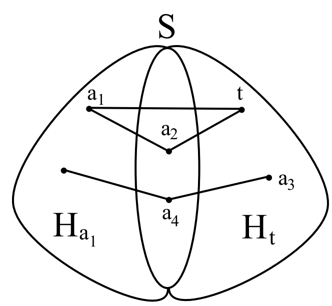

Рис. 12. Компоненты H_{a_1} и H_t, $(k-1)$-разделяющее множество S.

по лемме 2 компонента $H_{a_1} - a_1$ содержит ровно две вершины, одна из которых, как уже было замечено, — x. Следовательно, x – неособая, так как отделяющее множество $S \cup \{a_1\}$ содержит две вершины степени k – вершины a_2 и a_4, а x несмежна только с одной из вершин k-разделяющего множества $S \cup \{a_1\}$. Полученное противоречие доказывает утверждение в случае (1).

Случай (2). Очевидно, что $d_H(a_3) = 1$ и, следовательно, a_3 смежна со всеми вершинами множества $T \setminus \{x\}$. Тогда $S = \{a_2\} \cup (T \setminus \{t, x\})$ и $x, a_4 \notin S$. По лемме 2 вершина a_2 должна быть смежна в H_{a_1} с вершиной, отличной от a_1. Следовательно, $a_4 \in V(H_{a_1})$, поскольку это единственная вершина из $V(H) \cup (T \setminus \{x\})$, которая может содержаться в $H_{a_1} - a_1$. Следовательно, a_4 несмежна с a_3 и t и, по условию леммы, a_4 несмежна с a_1 и x. Таким образом, a_4 несмежна с 4 вершинами из $V(H) \cup T$ и, следовательно, может быть смежна не более чем с $k-1$ вершиной. Полученное противоречие с k-связностью доказывает утверждение в случае (2). Таким образом, все вершины из T, с которыми смежна a_2, имеют степень k. Вершины H, за исключением a_1, также имеют степень k. Таким образом, a_1 – единственная вершина степени выше k, с которой смежна a_2. Кроме того, a_1 смежна с x.

Таким образом, лемма полностью доказана. □

Лемма 24. *Пусть H состоит из 4 вершин и среди них ровно одна имеет степень выше k. Обозначим эту вершину через a_1 и предположим, что $d_H(a_1) = 2$. Другие вершины H обозначим a_2, a_3 и a_4.*

Тогда $(a_1, x) \in E(G)$ *и одна из вершин* a_2, a_3, a_4 (*не умаляя общности можно считать, что* a_2) *отвечает следующим свойствам*

1° a_2 *смежна с* a_1,

2° a_2 *смежна не более чем с тремя вершинами степени выше* k.

Доказательство. Заметим, что в множестве T есть не более одной вершины, которая несмежна с a_1. Если такая вершина существует, обозначим ее z. Обозначим вершины, смежные с a_1, через a_2, a_3, причем выберем a_2 так, чтобы если вершина z существует и смежна с a_2, то z смежна и с a_3. Теперь разобьем множество $N_G(a_2) \cap T$ на следующие три подмножества:

• через T_1 обозначим множество $N_G(a_1) \cap N_G(a_2) \cap N_G(a_3) \cap T$;

• через T_2 обозначим множество $(N_G(a_1) \cap N_G(a_2) \cap T) \setminus N_G(a_3)$;

• через T_3 обозначим множество вершин из T, смежных с a_2, но не смежных с a_1.

Отдельно отметим, что множество T_3 либо пусто, либо состоит из единственной вершины z, которая в этом случае смежна также и с a_3.

Наше доказательство будет состоять из двух шагов. Во-первых, докажем, что в множестве $T_1 \cup T_3$ содержится не более одной вершины степени выше k (**Шаг** 1). Во-вторых, докажем, что в множестве T_2 содержится не более одной вершины степени выше k (**Шаг** 2).

Шаг 1. Докажем, что если среди вершин T_1 есть вершина, имеющая степень выше k, то:

- во-первых, эта вершина единственна;
- во-вторых, вершина z существует и смежна с единственной вершиной T_1, имеющей степень выше k;
- в-третьих, z в этом случае имеет степень k.

Предположим, что $t \in T_1$ и $d_G(t) > k$. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (a_1, t)$ и заметим, что $\{a_2, a_3\} \subset S$. Обозначим компоненты графа $G-(a_1,t)-S$ стандартным образом. По лемме 3 вершины a_2 и a_3 должны быть смежны в H_t по крайней мере с одной вершиной, отличной от t. Следовательно, в H_t есть вершина из $V(H) \cup T$, несмежная с a_1. Рассмотрим два случая:

— $a_4 \in V(H_t)$ (случай (1)) и

— $a_4 \notin V(H_t)$ (случай (2)).

Случай (1). Заметим, что $V(H_t) \cup S$ содержит по крайней мере $k+1$ вершину из $V(H) \cup T$ (а именно, вершину a_4 и все смежные с ней) и, следовательно, H_{a_1} содержит не более двух вершин из $V(H) \cup T$, отличных от a_1. С другой стороны, $a_2, a_3 \in S$ и, по лемме 3, должны быть смежны в компоненте H_{a_1} по крайней мере с одной вершиной, отличной от a_1. То есть подграф $H_{a_1} - a_1$ должен содержать по крайней мере одну вершину из $V(H) \cup T$. Заметим, что подграф $H_{a_1} - a_1$ не содержит вершин компоненты H, поскольку $a_2, a_3 \in S$ и $a_4 \in V(H_t)$. Кроме того, все вершины подграфа $H_{a_1} - a_1$ несмежны с a_4. То есть подграф $H_{a_1} - a_1$ содержит по крайней мере одну вершину множества T, несмежную с a_4. В множестве T таких вершин две, причем одна из них x, поскольку особая вершина x не может быть смежна с вершиной a_4, имеющей степень k.

Предположим, что в подграфе $H_{a_1} - a_1$ лежит только одна вершина из множества T. Обозначим эту вершину u и заметим, что по лемме 3 вершина u смежна с a_2, a_3 и, следовательно, отлична от x. По условию леммы, a_1 — единственная вершина H, имеющая степень выше k и, следовательно, единственная вершина в H, с которой может быть смежна особая вершина x, а значит, $(x, a_1) \in E(G)$. Отсюда следует, что $x \in S$, поскольку $(x, a_1) \in E(G)$ и $x \notin V(H_{a_1})$. Кроме того, отме-

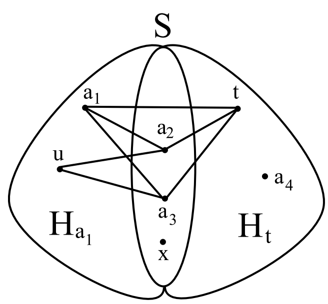

Рис. 13. Компоненты H_{a_1} и H_t, $(k-1)$-разделяющее множество S.

тим, что $|N_G(a_1) \cap N_G(a_4) \cap T| \geq k-3$, поскольку вершина a_1 смежна по крайней мере с $k-1$ вершиной из T, а a_4 – по крайней мере с $k-2$.

Таким образом, множество S состоит из $k-4$ вершин множества $N_G(a_1) \cap N_G(a_4) \cap (T \setminus \{t\})$ и a_2, a_3, x. По лемме 3 компонента H_{a_1} состоит из двух вершин a_1, u. Отсюда получаем, что среди вершин

T есть вершина u, смежная только с вершинами из $V(H) \cup T$, что противоречит лемме 2. Таким образом, этот случай невозможен.

Осталось рассмотреть случай, когда $H_{a_1} - a_1$ содержит две вершины из $V(H) \cup T - x$ и u. Таким образом, три вершины a_1, a_2, a_3 k-разделяющего множества $S \cup \{a_1\}$ смежны с двумя вершинами в отделяемой компоненте $H_{a_1} - a_1$. Следовательно, по лемме 2 получаем, что $V(H_{a_1} - a_1) = \{x, u\}$, что противоречит предположению о том, что x – особая вершина, поскольку x может быть несмежна только с одной вершиной из $S \cup \{a_1\}$ и, следовательно, должна быть смежна по крайней мере с одной из вершин a_2 или a_3. Таким образом, случай (1) невозможен.

Заметим, что при разборе случая (1) *не использовалось существование ребра* (a_3, t), *использовалось только то, что* $a_3 \in S$. *Это соображение понадобится при рассмотрении шага* 2.

Случай (2). По нашему предположению, $a_4 \notin V(H_t)$. С другой стороны, компонента H_t должна содержать вершину из $V(H) \cup T$, отличную от t. Следовательно, z (то есть вершина из множества T несмежная с a_1) существует и $z \in V(H_t)$. Заметим, что поскольку это единственная вершина $V(H) \cup T$, содержащаяся в $H_t - t$, три вершины a_1, a_2, a_3, входящие в k-разделяющее множество $S \cup \{a_1\}$, смежны в H_t только с двумя вершинами t и z. Следовательно, по лемме 2 получаем, что $V(H_t) = \{t, z\}$. Тогда $(z, t) \in E(G)$, поскольку $d_G(t) > k$. Из $d_G(t) > k$ по лемме 5 также следует, что $d_G(z) = k$. Кроме того, все вершины, смежные с a_1 и z, лежат в S и, следовательно, смежны с t. Отсюда получаем, что все эти вершины входят в треугольники с a_1 и t и, по теореме 1, имеют степень k. Отсюда следует, что t – единственная вершина степени выше k среди вершин, смежных с a_1, a_2, a_3 одновременно. Тогда, если среди вершин множества T_1 есть вершина, имеющая степень выше k, то такая вершина только одна, и единственная вершина множества T_3 имеет степень k. Таким образом, утверждение шага 1 доказано.

Шаг 2. Предположим, что в множестве T_2 есть вершины, имеющие степень выше k. Обозначим через t произвольную такую вершину. Рассмотрим $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G - (a_1, t)$ и обозначим компоненты $G - (a_1, t) - S$ стандартным образом. Заметим, что $a_2 \in S$ и, следовательно, H_t содержит отличную от t вершину из $V(H) \cup T$, смежную с a_2.

Если $a_3 \in S$, то аналогично случаю (1) шага (1) доказывается, что $a_4 \notin V(H_t)$. Заметим, что здесь можно воспользоваться доказательством этого случая, поскольку, как было замечено выше, при рассмотрении случая (1) шага 1 нигде не использовалось существование ребра (a_3, t), а только $a_3 \in S$. Рассмотрим случай $a_3 \notin S$ и предположим, что $a_4 \in V(H_t)$. Значит, $a_3 \in H_{a_1}$. В этом случае $(a_3, a_4) \notin E(G), d_H(a_3) \leq 2, d_H(a_4) = 1$, причем, поскольку a_3 несмежна в T с двумя вершинами (x и t), то $d_H(a_3) = 2$. Следовательно, a_3 несмежна в множестве T ровно с двумя вершинами – x и t. Следовательно, $T_2 \subset \{x, t\}$ и в этом случае утверждение шага 2 выполено.

Таким образом, осталось рассмотреть только случай $a_4 \notin V(H_t)$. Заметим, что в $H_t - t$ должна содержаться вершина, смежная с вершиной a_2, лежащей в k-разделяющем множестве $S \cup \{t\}$, отделяющем $H_t - t$. Значит, в $H_t - t$ должна содержаться вершина из $H \cup T$ (поскольку только эти вершины могут быть смежны с a_2) и несмежная с a_1, поскольку $a_1 \in V(H_{a_1})$, причем эта вершина должна быть отлична от t и a_4. Следовательно, вершина z существует и $z \in V(H_t)$. Кроме того, z в этом случае должна быть смежна с a_2, а по выбору обозначений, если z смежна с вершиной a_2, то также $(z, a_3) \in E(G)$. Таким образом, $a_3 \in S$ и по лемме 3 получим, что $H_t = \{t, z\}$. По выбору t несмежна с вершиной a_3, лежащей в S. Полученное противоречие доказывает утверждение шага 2.

Доказано, что в множестве $T_1 \cup T_3$ не более одной вершины степени выше k и в множестве T_2 не более одной вершины степени выше k, причем $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ – это все вершины множества T, смежные с a_2.

Таким образом, лемма полностью доказана. □

Лемма 25. *Пусть H состоит из 4 вершин и среди них ровно одна имеет степень выше k. Обозначим эту вершину через a_1 и предположим, что $d_H(a_1) = 3$. Другие вершины H обозначим a_2, a_3 и a_4. Тогда $(a_1, x) \in E(G)$ и одна из вершин a_2, a_3, a_4 (не умаляя общности можно считать, что a_2) отвечает следующим свойствам*

1° *a_2 смежна с a_1,*

2° *a_2 смежна не более чем с тремя вершинами степени выше k.*

Доказательство. По лемме 2 вершина x должна быть смежна по крайней мере с одной вершиной из компоненты H. С другой стороны, единственная вершина, с которой x может быть смежна – это a_1, поскольку x – особая вершина. Отсюда получаем, что $(x, a_1) \in E(G)$.

Также отметим, что, поскольку $d_H(a_1) = 3$, условие 1° выполнено для всех вершин из H. Следовательно, требуется только выбрать нумерацию этих вершин так, чтобы выполнялось условие 2°.

Заметим, что в случае если a_1 смежна в множестве T с k или $k-1$ вершиной, доказательство аналогично предыдущей лемме (за исключением невозможности случаев $a_4 \in H_t$). Таким образом, не умаляя общности можно считать, что a_1 несмежна в T ровно с двумя вершинами, которые мы обозначим z_1 и z_2. Заметим, что по лемме 2 каждая из вершин z_1 и z_2 смежна по крайней мере с одной вершиной в H и обе вершины z_1 и z_2 вместе смежны по крайней мере с двумя вершинами в H. Таким образом, можно обозначить вершину, смежную с z_1, через a_3 и вершину, смежную с z_2, через a_4. Через a_2 обозначим единственную оставшуюся вершину из компоненты H.

Теперь докажем, что в T не более двух вершин, смежных с a_2 и имеющих степень выше k. Докажем, что если существует вершина степени выше k, смежная с a_1 и a_2, то эта вершина смежна по крайней мере с одной из вершин z_1 и z_2, причем по крайней мере одна из вершин z_1, z_2 имеет степень k. Рассмотрим произвольную вершину $t \in T$, имеющую степень выше k и смежную с a_1, a_2, и $(k-1)$-разделяющее множество S в графе $G-(a_1,t)$. Обозначим компоненты $G-(a_1,t)-S$ стандартным образом. Заметим, что вершина a_2, лежащая в множестве S, должна быть смежна с отличной от t вершиной в H_t, причем эта вершина должна быть несмежна с a_1, лежащей в $V(H_{a_1})$. Такой вершиной может быть только z_1 или z_2. Рассмотрим две возможности:

(1) в H_t содержится только одна из вершин z_1, z_2 (не умаляя общности можно считать $z_1 \in V(H_t)$);
(2) $\{z_1, z_2\} \subset V(H_t)$.

Случай (1). Заметим, что $(a_3, a_1), (a_3, z_1) \in E(G)$ и, следовательно, $a_3 \in S$. Таким образом, в k-разделяющем множестве $S \cup \{t\}$ содержатся две вершины (a_2 и a_3), смежные в отделяемом подграфе $H_t - t$ только с одной вершиной (а именно, z_1). Таким образом, по лемме 2 получаем, что $V(H_t - t) = \{z_1\}$ и, следовательно, $d_G(z_1) = k$ и $(z_1, t) \in E(G)$. Кроме того, все вершины, смежные с a_1 и z_1, за исключением t, лежат в S и, следовательно, смежны с t. Отсюда получаем, что все эти вершины входят в треугольники с a_1 и t и, по теореме 1, имеют степень k. Следовательно, t – единственная вершина из $T \setminus \{z_2, z_1\}$, имеющая степень выше k и смежная с z_1.

Случай (2). В этом случае $a_3, a_4 \in S$ и, следовательно, по лемме 2, примененной к компоненте H_t и k-разделяющему множеству $S \cup \{a_1\}$, получаем $V(H_t) = \{z_1, z_2, t\}$. По лемме 5, примененной к $\{z_1, z_2\}$ и отделяющему их k-разделяющему множеству $S \cup \{t\}$, получаем, что не более одной вершины из z_1, z_2 может иметь степень выше k.

Теперь докажем, что *если есть две вершины степени выше k, смежные с a_1 и a_2, то обе вершины z_1, z_2 имеют степень k.*

Рассмотрим вершину $u \in T \setminus \{z_1, z_2, t\}$, смежную с z_1 или z_2. Заметим, что вершина u смежна с a_1 и $u \in S$, т.к. $S \cup \{t\}$ отделяет множество $\{z_1, z_2\}$. Далее, если u смежна с t, то u входит в треугольник с вершинами t, a_1 и, следовательно, $d_G(u) = k$. С другой строны, t смежна по крайней мере с $k - 2$ вершинами из S, то есть несмежна не более чем с одной. То есть все вершины из множества $T \setminus \{z_1, z_2, t\}$, смежные хотя бы с одной из вершин z_1, z_2, кроме, быть может, одной, входят в треугольники с a_1 и t. Следовательно, среди вершин из множества $T \setminus \{z_1, z_2, t\}$, смежных хотя бы с одной из вершин z_1, z_2, не более одной вершины может иметь степень выше k.

Предположим, что такая вершина существует и обозначим ее b. Заметим, что поскольку b смежна с a_1 (так как лежит в $T \setminus \{z_1, z_2, t\}$) и с одной из вершин z_1, z_2, то, следовательно, лежит в S. Докажем, что в этом случае $d_G(z_1) = d_G(z_2) = k$. Предположим противное. Не умаляя общности можно считать, что $d_G(z_1) > k$. В этом случае $(t, z_1) \in E(G)$, поскольку в множестве $S \cup (V(H_t) \setminus \{z_1\})$ ровно $k+1$ вершина и, следовательно, z_1 должна быть смежна со всеми этими вершинами. Очевидно, что в этом случае $(b, z_1) \notin E(G)$ (иначе получено противоречие с теоремой 1 – цикл (z_1, b, a_1, t) содержит только вершины степени выше k). Полученное противоречие: $b \in S$ и b несмежна с z_1, доказывает, что $d_G(z_1) = d_G(z_2) = k$.

Таким образом, доказано, что если существует вершина степени выше k, смежная с a_1 и a_2, то эта вершина смежна по крайней мере с одной из вершин z_1 и z_2, причем по крайней мере одна из вершин z_1, z_2 имеет степень k. Если вершин, имеющих степень выше k, смежных с a_1 и a_2 две, то обе вершины z_1, z_2 имеют степень k. А более двух вершин степени больше k, смежных с a_1 и a_2 одновременно, быть не может. Отсюда следует, что a_2 смежна в T не более чем с двумя вершинами, имеющими степень выше k, поскольку в T только вершины z_1 и z_2 не смежны с a_1. Следовательно, a_2 смежна не более чем с тремя вершинами степени выше k, включая и a_1. $\square$

Лемма 26. *Предположим, что H состоит из четырех вершин и ровно одна из них имеет степень выше k. Тогда каждая из вершин T_{xy} смежна хотя бы с одной вершиной степени k.*

Доказательство. Заметим, что по лемме 15 все вершины T_{xy} смежны по крайней мере с двумя вершинами из H, и, значит, все эти вершины смежны по крайней мере с одной вершиной степени k. □

Лемма 27. *Минимальная компонента H, содержащая три или четыре вершины, не содержит особых вершин.*

Доказательство. Заметим, что для компоненты H, содержащей три вершины это утверждение выполнено по леммам 10 и 11.

Теперь рассмотрим случай, когда H содержит четыре вершины. Тогда по леммам 20, 21, 23, 24 и 25 одна из вершин $V(H)$, во-первых, имеет степень k, а во-вторых, смежна по крайней мере с $k-3$ вершинами степени k. Таким образом, из $k+4$ вершин, входящих в множество $T \cup V(H)$ по крайней мере $k-2$ имеют степень ровно k. Следовательно, все вершины множества $V(H)$, поскольку они могут быть смежны только с вершинами из $T \cup V(H)$, смежны по крайней мере с одной вершиной степени k. Следовательно, среди вершин компоненты H нет особых. □

§5. Основной результат

Введем следующие обозначения: через S_0 обозначим множество всех особых вершин графа G, через S_1 – множество вершин степени k, смежных по крайней мере с одной, но не более чем с пятью, вершинами степени k, и через S_2 – множество вершин степени k, смежных хотя бы с шестью вершинами степени k.

Лемма 28. *Пусть G — минимальный и минимальный относительно стягивания k-связный граф, где $k \in \{9, 10\}$ и $|G| \geq 2k$. Тогда $4|S_2| \geq |S_0|$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольную особую вершину x и рассмотрим наименьшее множество H, отделяемое k-разделяющим множеством T, содержащим x и смежную с x вершину. По леммам 4 и 7 получаем, что H состоит из трех или четырех вершин. Рассмотрим два случая:

(1) $|H| = 3$;

(2) $|H| = 4$.

Случай (1). Поставим в соответствие вершине x упорядоченную пару смежных вершин, состоящую из единственной вершины H, имеющей степень выше k, и любой из вершин H, имеющей степень k, которые существуют по леммам 10 и 11 (обозначим эту пару вершин (y, z), где $d_G(y) > k$ и $d_G(z) = k$). Заметим, что по леммам 10 и 11 вершина y смежна с x и может быть поставлена в соответствие только одной особой вершине (поскольку это единственная особая вершина в $V(H) \cup T$, а y может быть смежна только с вершинами из этого множества), а z входит не более чем в две различные пары со смежными с ней вершинами степени выше k.

Случай (2). Рассмотрим две возможности:

(2.1) H содержит одну вершину степени выше k;
(2.2) H содержит две вершины степени выше k.

Случай (2.1). По леммам 23, 24 и 25 получаем, что вершине x можно поставить в соответствие упорядоченную пару смежных вершин, состоящую из единственной вершины H, имеющей степень выше k, и вершины H, имеющей степень k и смежной не более чем с тремя вершинами степени выше k (обозначим эту пару (y, z), где $d_G(y) > k$ и $d_G(z) = k$). Заметим, что при этом x – единственная особая вершина в множестве $T \cup V(H)$ по леммам 26 и 27 и, следовательно, y в этом случае может быть сопоставлена только одной особой вершине.

Случай (2.2). В случае, если H содержит две вершины, имеющие степень выше k, из лемм 21 и 20 следует, что вершине x можно поставить в соответсвие упорядоченную пару смежных вершин (y, z) из H, такую что y имеет степень выше k и z имеет степень k, причем z смежна не более чем с тремя вершинами степени выше k и не более одной из них лежит в T. В этом случае y может быть поставлена в соответствие не более чем двум особым вершинам, поскольку по леммам 22 и 27, множество вершин $V(H) \cup T$ содержит не более двух особых вершин.

Теперь докажем, что *вершина z, имеющая степень k и смежная не более чем с тремя вершинами степени выше k, может быть поставлена в соответствие не более чем четырем особым вершинам.*

Заметим, что если вершина z входит только в минимальные компоненты, содержащие одну вершину, имеющую степень выше k, то

- по леммам 10, 11, 23, 24 и 25 вторая вершина, вместе с которой z ставится в соответствие особой вершине – смежная с z вершина, имеющая степень выше k;
- по доказанному в случаях (1) и (2.1) вторая вершина пары может быть поставлена в соответствие только одной особой вершине.

Следовательно, количество вершин, которым поставлена в соответсвие z, не превосходит количества вершин степени выше k, смежных с z, а именно трех. Таким образом, для вершин, входящих только в компоненты, содержащие ровно одну вершину степени выше k, утверждение выполняется.

Теперь предположим, что вершина z входит в хотя бы одну компоненту, содержащую две вершины, имеющие степень выше k. Из лемм 21 и 20 следует, что z смежна не более чем с тремя вершинами степени выше k и не более одной из них лежит в $N_G(H)$. Заметим, что из леммы 22 следует, что пары вершин, состоящие из z и одной из вершин, входящих в H, могут быть поставлены в соответствие не более чем двум различным особым вершинам (по леммам 22 и 27, множество вершин $V(H) \cup T$ содержит не более двух особых вершин). Кроме того, за исключением двух вершин степени выше k, входящих вместе с z в компоненту, содержащую две вершины степени выше k, вершина z может быть смежна только с одной вершиной степени выше k. Следовательно, даже в случае, если пара из z и этой вершины входит в другую минимальную компоненту, содержащую две вершины степени выше k, вершина z может быть поставлена в соответствие еще не более чем двум особым вершинам. Таким образом, и в этом случае z может быть поставлена в соответствие не более чем четырем особым вершинам.

Напомним, что множество S_2 состоит из всех вершин степени k, смежных не более чем с тремя вершинами степени выше k. Мы доказали, что каждая вершина множества S_2 может быть поставлена в соответствие не более чем четырем особым вершинам. С другой стороны, каждой особой вершине мы поставили в соответствие пару, содержащую вершину из множества S_2. Следовательно, $4|S_2| \geq |S_0|$. □

Теорема 2. *Пусть G – минимальный и минимальный относительно стягивания k-связный граф, где $k \in \{9, 10\}$. Тогда $|V_k(G)| > \frac{1}{2}|G|$.*

Доказательство. При $|G| < 2k$ утверждение теоремы очевидно следует из леммы 12 и того факта, что $\Delta(G) \geq k$. Таким образом, нам достаточно рассмотреть случай $|G| \geq 2k$.

Разобьем множество ребер, инцидентных вершинам из $V_{>k}(G)$, на два подмножества:

$E_{>k}(G)$ – ребра, инцидентные двум вершинам из $V_{>k}(G)$;

$E_k(G)$ – ребра, инцидентные одной вершине из $V_{>k}(G)$.

Из теоремы 1 следует, что $G(V_{>k}(G))$ является лесом. Тогда, ребер, инцидентных двум вершинам из $V_{>k}(G)$, не более $|V_{>k}(G)| - 1$. Заметим, что $\sum_{v\in V_{>k}(G)} d(v) = 2|E_{>k}(G)| + |E_k(G)|$. Следовательно,

$$|E_k(G)| = \sum_{v\in V_{>k}(G)} d(v) - 2|E_{>k}(G)| \geq \sum_{v\in V_{>k}(G)} d(v) - 2(V_{>k}(G)| - 1)$$
$$\geq (k+1)|V_{>k}(G)| - 2(|V_{>k}(G)| - 1) > (k-1)|V_{>k}(G)|.$$

Из леммы 28 следует, что $4|S_2| \geq |S_0|$. Любой вершине из S_1 инцидентно не более $k-1$ ребра из $E_k(G)$, любой вершине из S_2 инцидентно не более $k-6$ ребер из $E_k(G)$ и любой вершине из S_0 – ровно k. Таким образом, вершинам из $V_k(G)$ инцидентно не более $k|S_0| + (k-1)|S_1| + (k-6)|S_2|$ ребер из $E_k(G)$. Следовательно, вершинам из $V_k(G)$ инцидентно не более $(k-1)|V_k(G)|$ ребер из $E_k(G)$, поскольку

$$(k-1)|S_1|+(k-6)|S_2|+k|S_0| \leq (k-1)|S_1|+(k-6)|S_2|+k|S_0|+(4|S_2|-|S_0|)$$
$$\leq (k-1)(|S_1| + |S_2| + |S_0|) = (k-1)|V_k(G)|.$$

Таким образом, $(k-1)|V_{>k}(G)| < |E_k(G)| \leq (k-1)|V_k(G)|$ и, следовательно, $|V_{>k}(G)| < |V_k(G)|$, откуда немедленно следует утверждение теоремы. $\square$

Литература

1. K. Ando, *A Local structure theorem on 5-connected graphs.* — J. Graph Theory **60** (2009), 99–129.
2. K. Ando, A. Kaneko, K. Kawarabayashi, *Vertices of degree 6 in a contraction critically 6-connected graphs.* — Discrete Mathematics **273** (2003), 55–69.
3. Y. Egawa, *Contractible edges in n-connected graphs with minimum degree greater than or equal to $\frac{5n}{4}$.* — Graphs Combin. **7** (1991), 15–21.
4. M. Fontet, *Graphes* 4*-essentiels.* — C. R. Acad. Se. Paris **287**, serie A (1978), 289–290.
5. R. Halin, *A theorem on n-connected graphs.* — J. Comb. Theory **7** (1969), 150–154.

6. Д. В.Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
7. M. Kriesell, *A degree sum condition for the existence of a contractible edge in a k-connected graph.* — J. Combin. Theory Ser.B **82** (1) (2001) 81–101.
8. M. Li, X. Yuan, J. Su, *The number of vertices of degree* 7 *in a contraction-critical* 7*-connected graph.* — Discrete Mathematics **308** (2008), 6262–6268.
9. W. Mader, *Ecken Vom Gard n in minimalen n-fach zusammenhangenden Graphen.* — (German), Arch.Math. (Basel) **23** (1972), 219–224.
10. W. Mader, *Generalizations of critical connectivity of graphs.* — Discrete Mathematics **72** (1988), 267–283.
11. N. Martinov, *A recursive characterization of the* 4*-connected graphs.* — Discrete Mathematics **84** (1990), 105–108.
12. С. А. Образцова, *О локальной структуре* 5 *и* 6*-связных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 88–96.
13. С. А. Образцова, А. В. Пастор, *О локальной структуре* 7 *и* 8*-связных графов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 97–111.
14. C. Qin, X. Yuan, J. Su, *Some properties of contraction-critical* 5*-connected graphs.* — Discrete Mathematics **308** (2008), 5742–5756.
15. C. Qin, X. Yuan, J. Su, *Triangles in contraction critical* 5*-connected graphs.* — Australas. J. Combin. **33** (2005), 139–146.
16. C. Thomassen, *Non-separating cycles in k-connected graphs.* — J. Graph Theory **5** (1981), 351–354.
17. W. T. Tutte, *A theory of* 3*-connected graphs.* — Indag. Math. **23** (1961), 441–455.
18. X. Yuan, J. Su, *Contractible Edges in 7-Connected Graphs.* — Graphs and Combinatorics **21** (2005), 445–457.

Obraztsova S. A. Local structure of 9 and 10-connected graphs.

In his paper R. Halin (in "Recent Progress in Combinatorics", Academic Press, 1969) discusses, what is the constant c_k such that any minimally and contraction critically k-connected graph has at least $c_k|V(G)|$ vertices of degree k. Twenty years later the exact bound for $k = 4$ ($c_4 = 1$) was found by N. Martinov and, independently, by M. Fontet. For larger k exact bounds are unknown.

This paper contributes to the study of local structure of minimally and contraction critically k-connected graphs and lower bounds for c_k. It was proved that $c_k \geq \frac{1}{2}$ for $k = 9, 10$. This result extends the sequence of the lower bounds for c_k which is equal to $\frac{1}{2}$ to $k = 6, 7, 8, 9, 10$.

Nanyang Technological University,
Singapore

E-mail: svetlana.obraztsova@gmail.com

Поступило 12 октября 2011 г.