Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 391, 2011 г.

Г. В. Ненашев

ОЦЕНКА ХРОМАТИЧЕСКОГО ЧИСЛА ГРАФА ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ХОРД НА ОКРУЖНОСТИ БЕЗ K_4

Введение

Определение 1. *Граф пересечения хорд на окружности – это граф, вершинами которого являются хорды данной окружности, а между вершинами есть ребро тогда и только тогда, когда соответствующие хорды данной окружности пересекаются. Для набора хорд $\mathcal{A}$ этот граф будем обозначать как $G(\mathcal{A})$.*

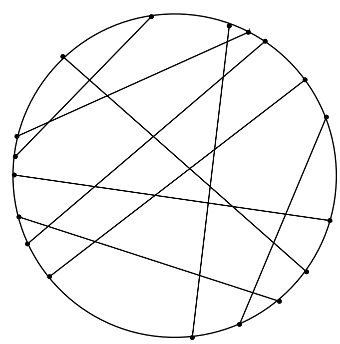

Рис. 1. Граф хорд.

Определение 2. *Правильная раскраска графа – это такая раскраска всех вершин графа, что никакие две смежные вершины не покрашены в один цвет.*

Как обычно, будем обозначать через $\omega(G)$ размер максимальной клики, а через $\chi(G)$ – хроматическое число графа, то есть, минимальное количество цветов, в которое можно покрасить граф G правильным образом.

Ключевые слова: граф пересечения хорд, правильная раскраска, хроматическое число.

Пусть G – это граф хорд на окружности. Доказано немало результатов об оценках $\chi(G)$. В 1988 г. А. В. Косточка в работе [1] доказал, что $\chi(G) \leqslant 5$ при $\omega(G) = 2$. В 1996 г. А. А. Агеев в работе [2] привел пример графа G с $\omega(G) = 2$ и $\chi(G) = 5$, тем самым показав точность оценки для $\omega(G) = 2$. В 1997 г. А. В. Косточка и J. Kratochvil в работе [3] доказали, что $\chi(G) \leqslant 2^{\omega(G)+6}$. В 1999 г. в работе [4] А. А. Агеев доказал, что если $\omega(G) = 2$ и обхват G не менее 5 (то есть нет циклов длины 3 и 4), то $\chi(G) \leqslant 3$.

В 2011 г. А. В. Косточка и K. G. Milans в работе [7] показали, что граф пересечения хорд, не содержащий K_4, можно покрасить правильным образом в 38 цветов. Мы покажем, что можно покрасить в 30 цветов.

Покраска графа хорд без K_4 в 30 цветов

Далее в работе мы будем говорить “покрасить хорды набора $\mathcal{A}$”, имея ввиду “покрасить правильным образом вершины графа $G(\mathcal{A})$”.

Лемма 1. *Пусть дана дуга (X, Y) окружности и два набора хорд $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ такие, что:*

(1) *в графе $G(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ нет треугольника, содержащего две хорды из $\mathcal{B}$;*

(2) *у любой хорды $a_j \in \mathcal{A}$ ровно один конец на дуге (X, Y);*

(3) *у любой хорды $b_j \in \mathcal{B}$ оба конца на дуге (X, Y), и существует такая хорда a_i из $\mathcal{A}$, что a_i и b_j пересекаются.*

Тогда мы можем раскрасить хорды набора $\mathcal{B}$ правильным образом в 3 цвета.

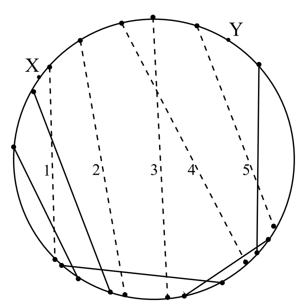

Рис. 2. Множества хорд $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$.

Доказательство. Считаем, что хорды из $\mathcal{A}$ пронумерованы в том же порядке, в котором лежат их концы на дуге (X, Y) (в направлении от X к Y). На рисунке 2 хорды множества $\mathcal{A}$ изображены пунктирными линиями и пронумерованы, хорды множества $\mathcal{B}$ изображены сплошными линиями.

Теперь сопоставим каждой хорде из $\mathcal{B}$ отрезок числовой прямой: для хорды b_j это будет отрезок P_jQ_j, где P_j+1 и Q_j – соответственно минимальный и максимальный номера хорд из $\mathcal{A}$, пересекающиеся с b_j.

Заметим, что наши отрезки, не могут *пересекаться*, то есть невозможна ситуация, когда $P_i < P_j < Q_i < Q_j$ для двух отрезков P_iQ_i и P_jQ_j. Иначе хорды, соответствующие этим отрезкам, и хорда a_{P_j} образуют треугольник в графе $G(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$.

Если хорды из $\mathcal{B}$ пересекались, то соотвествующие им отрезки будут *касаться* (совпадает правый конец одного с левым концом второго). Если для каких-то двух хорд получились одинаковые отрезки, то мы их считаем за один отрезок.

Теперь покрасим все построенные отрезки в три цвета так, чтобы касающиеся отрезки были разного цвета (раскраска хорд из $\mathcal{B}$ в соответствие с раскраской отрезков будет правильной).

Мы будем красить отрезки так же, как и их левые концы (то есть цвет отрезка – это цвет его левого конца). Опишем порядок покраски. На каждом шаге мы

1° выбираем *максимальный* непокрашенный левый конец, который является правым концом покрашенного отрезка;

2° если нельзя выполнить 1°, то выбираем *минимальный* левый конец из непокрашенных.

Докажем, что на каждом шаге можно выбрать цвет для этого левого конца. Пусть выбранный левый конец – это L, а с ним образуют отрезки правые концы $R_1, \ldots, R_n$ (они даны в порядке возрастания).

Докажем, что как левый конец может быть покрашено максимум одно R_i. Пусть нет и покрашены R_i и R_j, где $i < j$. Рассмотрим строго внутри отрезка LR_j первую точку D, которая была покрашена. Теперь рассмотрим момент покраски точки D. У нас нет покрашенного отрезка ID (D – правый конец), иначе либо I на отрезке LR_j и раньше покрашена, либо ID и LR_j пересекаются. Значит мы не можем красить D по пункту 1°, но и по пункту 2° не можем, так как $L < D$ и L еще не покрашена.

Докажем, что покрашен максимум один отрезок с концом в L. Пусть не так, тогда покрашены два каких-то отрезка P_1L и P_2L (так как L не покрашена, то L у обоих покрашенных отрезков – правый конец) и будем считать что P_1 покрасили раньше. В момент покраски P_2 уже покрашена P_1 (а значит, покрашен и отрезок P_1L) и, так как точка L не покрашена и является правым концом покрашенного отрезка, то мы должны красить отрезок по пункту 1°. Но тогда мы покрасили бы L, а не P_2, так как $L > P_2$. Противоречие.

Таким образом, у L максимум два запрещенных цвета, и мы можем покрасить L.

Тогда можно покрасить хорды из $\mathcal{B}$ правильным образом в 3 цвета в соответствие с раскраской отрезков. $\square$

Лемма 2. *Пусть дана дуга (X, Y) на окружности и есть два набора хорд $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ такие, что:*

(1) *$G(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ не содержит K_4;*

(2) *у любой хорды $a_j \in \mathcal{A}$ максимум один конец на дуге (X, Y);*

(3) *у любой хорды b_j из $\mathcal{B}$ оба конца на дуге (X, Y) и существует такая хорда a_i из $\mathcal{A}$, что a_i и b_j пересекаются.*

Тогда мы можем раскрасить хорды из набора $\mathcal{B}$ правильным образом в 15 цветов.

Доказательство. Заметим что хорды из $\mathcal{A}$, у которых нет конца на (X, Y), не могут пересекаться с хордами из $\mathcal{B}$, поэтому мы уменьшим $\mathcal{A}$ и оставим там только хорды, у которых ровно один конец лежит на (X, Y).

Считаем, что хорды из $\mathcal{A}$ пронумерованы в том же порядке, в котором лежат их концы на дуге (X, Y) (в порядке от X к Y). Пусть A_j – это конец хорды $a_j \in \mathcal{A}$, лежащий на (X, Y). Мы добавим точки $A_0 = X$, $A_{\text{last}} = Y$.

Построим новый набор хорд $\mathcal{C}$. Для каждого j рассмотрим хорды из $\mathcal{B}$, у которых есть конец между A_j и A_{j+1} и раздвинем их так, чтобы пропали пересечения между хордами, у одной из которых между A_j и A_{j+1} лежит левый конец, а у другой – правый.

Для этого рассматриваем концы хорд между A_j и A_{j+1} и меняем их так, чтобы сначала шли все правые концы (в том же порядке, в котором и были), а потом все левые концы (в том же порядке, в котором и были). Это возможно, так как нет хорды, у которой оба конца лежат

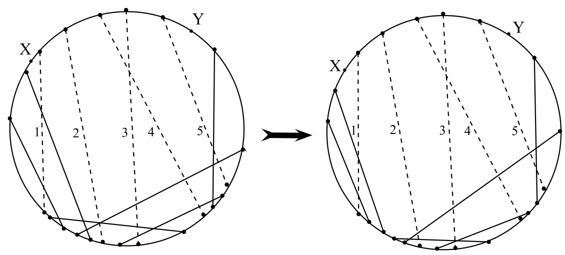

Рис. 3. Построение множества $\mathcal{C}$.

между A_j и A_{j+1} (такая хорда ни с какой хордой из $\mathcal{A}$ не пересекается). На рисунке 3 изображен пример такой операции.

У хорд из $\mathcal{A} \cup \mathcal{C}$ остались все те же пересечения, что и у $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, кроме пересечений пар хорд из $\mathcal{B}$, у одной из которых левый конец между A_j и A_{j+1}, а у другой – правый.

Докажем, что никакие хорды из $\mathcal{C}$ не образуют K_3. Пусть это не так, и хорды L_1R_1, L_2R_2 и L_3R_3 образуют треугольник. Тогда по построению набора $\mathcal{C}$ есть конец A_j между $\max(L_i)$ и $\min(R_i)$, а значит в $G(\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$ есть K_4, а тогда и в $G(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ есть K_4, что невозможно.

Значит, в графе $G(\mathcal{C})$ нет K_3, а тогда по работе [1] можно покрасить хорды из $\mathcal{C}$ в 5 цветов. Далее мы рассмотрим раскраску хорд $\mathcal{B}$, соответствующую этой раскраске хорд $\mathcal{C}$.

Исправим раскраску хорд из $\mathcal{B}$. Рассмотрим отдельно цвет w и набор хорд этого цвета $\mathcal{B}_w$.

Докажем, что граф хорд $G(\mathcal{B}_w \cup \mathcal{A})$ не может иметь K_3 полностью на $\mathcal{B}_w$ или из двух хорд $\mathcal{B}_w$ и одной из $\mathcal{A}$. Из построения множества $\mathcal{C}$ следует, что, если хорды b_k и b_l из $\mathcal{B}_w$ пересекаются, тогда левый конец одной из них и правый конец другой лежат между соседними хордами из $\mathcal{A}$ (пусть между a_i и a_{i+1}, см. рисунок 4).

Значит, они не могут пересекать одну и ту же хорду из $\mathcal{A}$. Тогда у нас не может быть треугольника из двух хорд $\mathcal{B}_w$ и одной из $\mathcal{A}$. Если какая-та хорда из $\mathcal{B}$ пересекает и b_k и b_l, то она должна пересечь либо a_i, либо a_{i+1}, но тогда будет треугольник из двух хорд $\mathcal{B}_w$ и одной из $\mathcal{A}$, а мы уже доказали, что это невозможно.

Тогда по Лемме 1 мы покрасим хорды из $\mathcal{B}_w$ в 3 цвета так, чтобы не было пересечений среди хорд $\mathcal{B}_w$.

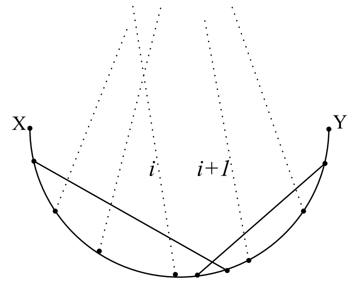

Рис. 4. Пересекающиеся хорды из $\mathcal{B}_w$.

Теперь все хорды из $\mathcal{B}$ покрашены в $15 = 5 \cdot 3$ цветов и нет одноцветных пересечений, значит раскраска правильная. $\square$

Лемма 3. *Пусть дана дуга (X, Y) на окружности и есть два набора хорд $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ такие, что:*

(1) *$G(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ не содержит K_4;*

(2) *у любой хорды $a_j \in \mathcal{A}$ максимум один конец на дуге (X, Y);*

(3) *у любой хорды $b_j \in \mathcal{B}$ оба конца на дуге (X, Y);*

(4) *в любой компоненте связности графа $G(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ есть хорда из $\mathcal{A}$.*

Пусть хорды из $\mathcal{A}$ покрашены правильным образом не более, чем в 15 *цветов. Тогда можно так покрасить хорды из $\mathcal{B}$, чтобы получилась правильная раскраска $G(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$ и было использовано не более* 30 *цветов.*

Доказательство. Заметим, что хорды из $\mathcal{A}$, у которых нет конца на (X, Y), не могут пересекаться с хордами из $\mathcal{B}$, поэтому мы уменьшим $\mathcal{A}$ и оставим там только хорды, у которых ровно один конец на (X, Y).

Считаем, что хорды из $\mathcal{A}$ пронумерованы в том же порядке, в котором лежат их концы на дуге (X, Y) (в порядке от X к Y). Пусть A_j – это конец хорды $a_j \in \mathcal{A}$, лежащий на (X, Y) (мы добавим $A_0 = X$, $A_{\text{last}} = Y$). Считаем, что при покраске $\mathcal{A}$ использованы цвета только из первых 30 и мы сами тоже будем использовать только первые 30 цветов.

Будем доказывать утверждение индукцией по $|\mathcal{B}|$. База $|\mathcal{B}|$=0 очевидна.

Переход. Пусть $\mathcal{C}$ – это все хорды из $\mathcal{B}$, которые имеют пересечение с хордами из $\mathcal{A}$, а $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$. Очевидно, что $\mathcal{C}$ непусто.

Мы можем покрасить правильным образом хорды из $\mathcal{C}$ в 15 цветов по лемме 2.

Так как ни одна хорда из $\mathcal{B}'$ не пересекается с хордами из $\mathcal{A}$, для каждой хорды $b \in \mathcal{B}'$ существует такой номер j, что оба конца хорды b лежат между A_j и A_{j+1}. Пусть $\mathcal{B}_j$ – это множество хорд из $\mathcal{B}'$, у которых оба конца лежат между A_j и A_{j+1}. Тогда $\mathcal{B}' = \bigcup \mathcal{B}_j$. Очевидно, хорды из разных множеств $\mathcal{B}_j$ не пересекаются.

Нам достаточно покрасить по отдельности каждое множество $\mathcal{B}_j$ так, чтобы раскраска графа $G(\mathcal{A} \cup \mathcal{C} \cup \mathcal{B}_j)$ была правильной. Так как в $\mathcal{B}_j$ нет хорд, пересекающихся с хордами из $\mathcal{A}$, и раскраска $G(\mathcal{A} \cup \mathcal{C})$ – правильная, то нам достаточно покрасить $\mathcal{B}_j$ так, чтобы раскраска графа $G(\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_j)$ была правильной.

Рассмотрим дугу (A_j, A_{j+1}). Докажем, что хорды из $\mathcal{B}_j$ можно покрасить по предположению индукции (в качестве дуги (X, Y) будет дуга (A_j, A_{j+1}), а в качестве наборов хорд $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ будут наборы $\mathcal{C}$ и $\mathcal{B}_j$). Проверим условия.

1) Граф $G(\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_j)$ является подграфом графа $G(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, а значит, не содержит K_4.

2) У хорд из $\mathcal{C}$ максимум один конец на (A_j, A_{j+1}), так как любая хорда из $\mathcal{C}$ пересекается с какой-то хордой из $\mathcal{A}$.

3) Очевидно по построению $\mathcal{B}_j$.

4) Пусть не выполняется условие (4), и есть компонента в $G(\mathcal{C} \cup \mathcal{B}_j)$, не содержащая хорд из $\mathcal{C}$. Но тогда хорды из этой компоненты не пересекаются с $\mathcal{A}$ (так как с $\mathcal{A}$ пересекаются только хорды из $\mathcal{C}$) и не пересекаются с хордами из $\mathcal{B}_i$ для $i \neq j$, а значит, эта же компонента связности – без хорд из $\mathcal{A}$ – есть и в $G(\mathcal{A} \cup \mathcal{B})$, противоречие.

Таким образом, все условия выполнены и $|\mathcal{B}_j| < |\mathcal{B}|$ (так как иначе $|\mathcal{C}| = 0$). Применим индукционное предположение и тем самым докажем переход. □

Теорема 1. *Пусть набор хорд $\mathcal{A}$ таков, что граф $G(\mathcal{A})$ не содержит K_4. Тогда мы можем раскрасить хорды из набора $\mathcal{A}$ правильным образом в 30 цветов.*

Доказательство. Считаем, что граф хорд $G(\mathcal{A})$ связный (если нет, то отдельно покрасим каждую компоненту связности).

Рассмотрим хорду CD из $\mathcal{A}$, выберем дугу (X, Y) которая содержит все концы хорд из $G(\mathcal{A})$, кроме конца D.

Пусть $\mathcal{B} = \mathcal{A} \setminus \{CD\}$. Покрасим хорду CD в первый цвет.

Проверим, что для дуги (X, Y), первого набора хорд $\{CD\}$ и второго набора хорд $\mathcal{B}$ выполняется условие леммы 3.

1) Граф $G(\{CD\} \cup \mathcal{B}) = G(\mathcal{A})$ не содержит K_4.

2) У хорды CD один конец на (X, Y) по построению.

3) У любой хорды из $\mathcal{B}$ оба конца на (X, Y) по построению.

4) Так как граф $G(\{CD\}\cup\mathcal{B})=G(\mathcal{A})$ – связный, то в нем есть только одна компонента связности и она содержит хорду CD.

Значит условие выполнено и мы можем покрасить все хорды в 30 цветов. $\square$

Замечание. Ровно этим же методом получается, что мы можем покрасить граф хорд на окружности, не содержащий K_n в $5 \cdot 6^{n-3}$ цветов правильным образом.

Литература

1. A. V. Kostochka, *On upper bounds for the chromatic numbers of graphs.* — Trudy Inst. Math. **10** (1988), 204–226.
2. A. A. Ageev, *A triangle-free circle graph with chromatic number* 5. — Discr. Math. **152** (1996), 295–298.
3. A. V. Kostochka, J. Kratochvil, *Covering and coloring polygon-circle graphs.* — Discr. Math. **163** (1997), 299–305.
4. A. A. Ageev, *Every circle graph of girth at least* 5 *is* 3*-colourable.* — Discr. Math. **195** (1999), 229–233.
5. A. V. Kostochka, *Coloring intersection graphs of geometric figures with a given clique number.* — Contemp. Math. **342** (2004), 127–138.
6. J. Cerny, *Coloring circle graphs.* — Electr. Notes Discr. Math. **29** (2007), 457–461.
7. A. V. Kostochka, K. G. Milans, *Coloring clean and K_4-free circle graphs.* (2011) (submitted).

Nenashev G. V. An upper bound on the chromatic number of circle graphs without K_4.

Let G be a circle graph without clique on 4 vertices. We proof that the chromatic number of G doesn't exceed 30.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: glebnen@mail.ru

Поступило 20 сентября 2011 г.