Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 391, 2011 г.

Н. В. Гравин, Д. В. Карпов

О ПРАВИЛЬНЫХ РАСКРАСКАХ ГИПЕРГРАФОВ

1. Введение

В работе рассматриваются неориентированные графы и гиперграфы. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер – через $E(G)$, а количество вершин и рёбер – через $v(G)$ и $e(G)$ соответственно.

Для любой вершины $v \in V(G)$ ее степень в графе G будем обозначать через $d_G(v)$. Минимальную и максимальную степени вершин графа G мы будем обозначать через $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ соответственно. Аналогичные обозначения ($V(\mathcal{H})$, $E(\mathcal{H})$ и $d_{\mathcal{H}}(v)$) будем применять для гиперграфа $\mathcal{H}$. В этой работе нам удобно оперировать с рёбрами и гиперрёбрами как с множествами вершин графа.

Окрестность вершины v графа G (то есть, множество всех смежных с v вершин графа G) мы будем обозначать через $N_G(v)$.

Для любого множества вершин $W \subset V(G)$ через $G(W)$ мы будем обозначать *индуцированный подграф* графа G на множестве вершин W (то есть, подграф, содержащий все рёбра графа G, оба конца которых лежат в W).

Существует несколько способов обобщать понятие правильной раскраски на гиперграфы. Например, сильные вершинные раскраски [1], в которых все вершины в одном гиперребре должны иметь различные цвета. Мы же будем работать с определением, предложенным в свое время П. Эрдешем.

Определение 1. Раскраска вершин гиперграфа $\mathcal{H}$ называется *правильной*, если в любом гиперребре есть хотя бы две вершины разных цветов.

Про раскраски гиперграфов на сегодняшний день известно не так много фактов, что не удивительно ввиду того, что даже для правильных раскрасок обычных графов до сих пор остаются открытыми

Ключевые слова: гиперграф, правильная раскраска, динамическая раскраска.
Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-5282.2010.1 и гранта РФФИ № 11-01-00760-а.

многие естественные вопросы. Одним из хорошо изученных вопросов, привлекшим значительное внимание исследователей [4–8, 10–13], является задача нахождения n-однородного и не раскрашиваемого в k цветов гиперграфа с минимальным количеством гиперребер $m_k(n)$. С этой задачей тесно связана другая, более конкретная задача поиска минимального такого n, что любой n-однородный и n-регулярный гиперграф (то есть, гиперграф, все гиперрёбра которого содержат по n вершин, а все вершины имеют степень n) допускает правильную раскраску в два цвета. Вероятностными методами, с помощью локальной леммы Ловаса можно показать (см. например [3]), что при $n = 9$ любой такой граф будет 2-раскрашиваем. Алон и Брегман [2] усилили утверждение для $n = 8$ и наконец Томассен [14] доказал наличие 2-раскраски для всех $n \geq 4$.

Следующая теорема является основным результатом нашей статьи.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{H}$ – гиперграф с максимальной степенью вершины Δ, каждое гиперребро которого содержит не менее, чем δ вершин и $k = \lceil \frac{2\Delta}{\delta} \rceil$.*

(1) *Тогда вершины $\mathcal{H}$ можно правильно раскрасить в $k + 1$ цвет.*

(2) *Пусть $\delta \geq 3$ и $k \geq 3$. Тогда вершины $\mathcal{H}$ можно правильно раскрасить в k цветов.*

Эта теорема дает более слабые результаты для случая, когда минимальный размер гиперребер сопоставим с максимальной степенью вершин, чем процитированные выше работы. Однако для малых относительно степени Δ значений δ утверждение теоремы становится интересным. Наше доказательство теоремы использует только классические комбинаторные методы.

Из этой теоремы мы выведем результат о динамической раскраске вершин обычного графа.

Определение 2. Раскраска вершин графа G называется *динамической*, если для любой вершины v степени хотя бы 2 в ее окрестности есть хотя бы две вершины разных цветов.

Отметим, что в ряде работ (например, [9, 15, 16]) исследуются динамические правильные раскраски вершин графа. Доказывается существование динамической правильной раскраски вершин графа G в

$\Delta(G)+1$ цвет [9] и (кроме серии графов-исключений) – в $\Delta(G)$ цветов [16]. Мы не требуем от раскраски правильности и получаем следующий результат.

Теорема 2. *Пусть* $k = \lceil \frac{2\Delta(G)}{\delta(G)} \rceil$.

(1) *Тогда существует динамическая раскраска вершин графа* G *в* $k+1$ *цвет.*

(2) *Пусть* $\delta(G) \geq 3$ *и* $k \geq 3$. *Тогда существует динамическая раскраска вершин графа* G *в* k *цветов.*

2. Образ гиперграфа и чередующиеся цепи

Перейдём к определениям основных понятий, которые потребуются для изложения доказательства нашего результата.

Определение 3. Назовем *образом* гиперграфа $\mathcal{H}$ любой граф G (возможно, с кратными рёбрами), для которого $V(G) = V(\mathcal{H})$ и существует такая биекция $\varphi : E(G) \to E(\mathcal{H})$, что $e \subset \varphi(e)$ для любого ребра $e \in E(G)$. Назовём φ *биекцией образа* G.

Замечание 1. Кратные рёбра графа-образа G, соответствующие различным гиперрёбрам гиперграфа $\mathcal{H}$, мы считаем различными.

Как и в классических теоремах о раскрасках вершин, нам поможет чередующаяся цепь. Следующее определение покажет, что мы имеем ввиду под этим понятием для гиперграфа.

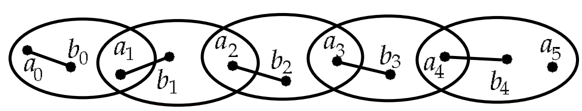

Рис. 1. Чередущаяся цепь длины 5 с началом a_0 и концом a_5.

Определение 4. Пусть $\delta \geq 3$, G – образ гиперграфа $\mathcal{H}$. Рассмотрим последовательность вершин $a_0 b_0 a_1 b_1 \dots a_n$ гиперграфа $\mathcal{H}$, удовлетворяющую следующим условиям.

(1) Вершины a_i, b_i, a_{i+1} различны, существует гиперребро $e_i \in E(\mathcal{H})$, для которого $a_i, b_i, a_{i+1} \in e_i$.

(2) Все гиперрёбра $e_0, \dots, e_{n-1}$ различны, $a_0 b_0, \dots, a_{n-1} b_{n-1} \in E(G)$, причём $\varphi(a_i b_i) = e_i$.

Тогда $a_0b_0a_1b_1\dots a_n$ – *чередующаяся цепь* от a_0 до a_n. Число n назовём *длиной* этой чередующейся цепи. Будем говорить, что эта чередующаяся цепь *проходит* по вершинам a_0, b_0, …, a_n и по рёбрам $a_0b_0,\dots, a_{n-1}b_{n-1}$.

Вершину a_0 назовём *началом* этой цепи, а вершину a_n – *концом.*

Пусть $X, Y \subset V(G)$, причём $a_0 \in X$ и $a_n \in Y$. Тогда будем говорить, что $a_0b_0a_1b_1\dots a_n$ – *чередующаяся цепь* от X до Y.

Замечание 2. 1) Мы допускаем в определении чередующейся цепи случай $n = 0$. Таким образом, вершина a_0 является чередующейся цепью от a_0 до a_0 длины 0.

2) Так как φ – биекция, все рёбра $a_0b_0,\dots,a_{n-1}b_{n-1}$ из определения чередующейся цепи – различные. Напомним, что кратные рёбра графа G, соответствующие разным гиперрёбрам, мы считаем различными.

3) Вершины в определении чередующейся цепи не обязательно различны. Возможно, по некоторым вершинам чередующаяся цепь проходит более одного раза.

Лемма 1. *Пусть $\mathcal{H}$ – гиперграф с максимальной степенью вершины Δ, каждое гиперребро которого содержит не менее, чем δ вершин, $k = \lceil\frac{2\Delta}{\delta}\rceil$. Тогда существует образ G гиперграфа $\mathcal{H}$ с $\Delta(G) \le k$.*

Доказательство. Рассмотрим тривиальный случай $\delta = 2$. В этом случае для любого образа G гиперграфа $\mathcal{H}$ очевидно, что $\Delta(G) \le \Delta = k$. Везде далее $\delta \ge 3$.

Для графа G обозначим через $V_{k+1}(G)$ множество всех вершин графа G, имеющих степень не менее $k + 1$, а через $s_{k+1}(G)$ – сумму степеней вершин из $V_{k+1}(G)$ в графе G.

Предположим, что утверждение леммы неверно. В таком случае для любого образа G мы имеем $V_{k+1}(G) \ne \varnothing$ и $s_{k+1}(G) > 0$. Выберем образ G с наименьшим $s_{k+1}(G)$. Обозначим через φ биекцию образа G, пусть $S = V_{k+1}(G)$.

Пусть U – множество, состоящее из всех вершин графа G, являющихся концами чередующихся цепей с началом в вершинах S, а $F = G(U)$. Понятно, что $S \subset U$. Докажем ряд свойств U.

1. *Для любого ребра $e \in E(F)$ гиперребро $\varphi(e) \subset U$.*
Предположим, что это не так, пусть $e = uw \in E(F)$ и гиперребро $\varphi(e)$ содержит вершину $v \notin U$ (см. рис. 2a). Мы построим чередующуюся цепь от S до v и тем самым получим $v \in U$, что противоречит предположению.

Рассмотрим кратчайшую чередующуюся цепь $P = a_0 b_0 \dots a_n$ от S до $\{u, w\}$. Не умаляя общности можно предположить, что $a_n = u$. Тогда $a_i \notin \{u, w\}$ при $0 \le i < n$, поэтому цепь P не проходит по ребру $e = uw$. Добавим к цепи P вершины w, v и получим чередующуюся цепь от $a_0 \in S$ до v.

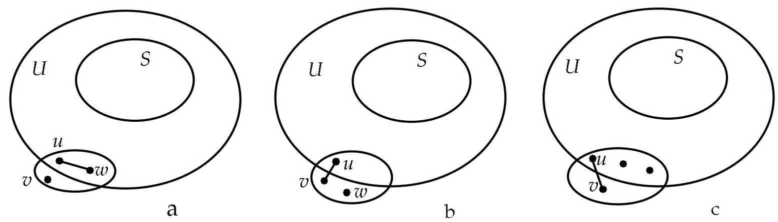

Рис. 2. Гиперрёбра, пересекающие U

2. *Если вершина $u \in U$ смежна в графе G с вершиной $v \notin U$, то все отличные от v вершины гиперребра $\varphi(uv)$ лежат в U.*
Предположим, что это не так и $u \in U$, $v \notin U$, $uv \in E(G)$. Пусть $e = \varphi(uv)$ – гиперребро $\mathcal{H}$. Предположим, что в e есть вершина $w \notin U$ (см. рис. 2b).

Как и в предыдущем пункте, построим кратчайшую чередующуюся цепь P от S до u (в случае $u \in S$ эта цепь состоит из единственной вершины). Пусть цепь P проходит по ребру uv. Так как мы выбрали кратчайшую цепь до u, то в этом случае для некоторого $i < n$ мы имеем $v = a_i$, $u = b_i$. Но тогда $v \in U$, противоречие.

Таким образом, цепь P не проходит по ребру uv. Дополнив цепь P вершинами v и w, мы получим $w \in U$, что противоречит предположению. Значит, v – единственная вершина гиперребра e, не входящая в U (см. рис. 2c).

3. *Для любой вершины $u \in U$ выполняется $d_G(u) \ge k$.*
Пусть $u \in U$ и $d_G(u) \le k - 1$. Понятно, что $u \notin S$. Рассмотрим чередующуюся цепь $P = a_0 b_0 \dots a_n$ от S до $u = a_n$. Построим новый граф G': возьмём граф G и для каждого $i \in [0, n-1]$ заменим в гиперребре $e_i \supset \{a_i, b_i, a_{i+1}\}$ ребро $a_i b_i$ на ребро $b_i a_{i+1}$. Нетрудно понять, что полученный граф G' – также образ гиперграфа $\mathcal{H}$.

Так как $d_{G'}(u) = d_G(u) + 1 \le k$, вершина $u \notin V_{k+1}(G')$. Степени остальных вершин в графе G' не более, чем в G, а значит, $V_{k+1}(G') \subseteq S = V_{k+1}(G)$. Остаётся лишь отметить, что $a_0 \in S$ и $d_G(a_0) > d_{G'}(a_0)$, следовательно, $s_{k+1}(G') < s_{k+1}(G)$. Противоречие с минимальностью $s_{k+1}(G)$ завершает доказательство утверждения.

4. *Оценим сумму степеней вершин из U в гиперграфе $\mathcal{H}$.*
Пусть $u_1, \dots u_\ell$ – все вершины множества U, имеющие в индуцированном подграфе $F = G(U)$ степень менее k. Положим

$$t_i = d_G(u_i) - d_F(u_i), \quad t = \sum_{i=1}^{\ell} t_i.$$

Из пункта 3 следует, что степени всех вершин множества U в графе G хотя бы k. Так как $S \subset U$, в множестве U есть вершины, имеющие в графе G степень более k. Следовательно,

$$e(F) = \frac{1}{2}\sum_{u\in U} d_F(u) > \frac{k|U| - t}{2}.$$

Теперь оценим $m = \sum\limits_{u\in U} d_{\mathcal{H}}(u)$. По пункту 1, все гиперрёбра гиперграфа $\mathcal{H}$, соответствующие при отображении φ рёбрам графа F, содержатся в множестве U и вносят в m вклад не менее, чем

$$\delta \cdot e(F) > \delta \cdot \left(\frac{k|U| - t}{2}\right) \geq \Delta|U| - \delta\frac{t}{2}.$$

Каждое из t рёбер графа G, выходящих из U в $V(\mathcal{H}) \setminus U$, по пункту 2 входит в гиперребро гиперграфа $\mathcal{H}$, у которого только одна вершина лежит вне U, а следовательно, остальные вершины (их не менее $\delta - 1$) лежат в U. Все эти t гиперрёбер, очевидно, различны. Таким образом,

$$m > \Delta|U| - \delta\frac{t}{2} + (\delta - 1)t > \Delta|U|.$$

Следовательно, найдется вершина $u \in U$ степени $d_{\mathcal{H}}(u) > \Delta$, что противоречит условию леммы.

Полученное противоречие показывает, что существует образ G гиперграфа $\mathcal{H}$ с $\Delta(G) \leq k$. $\square$

3. Доказательства теорем 1 и 2

Доказательство теоремы 1. 1) По лемме 1, существует образ G гиперграфа $\mathcal{H}$ с $\Delta(G) \leq k = \lceil \frac{2\Delta}{\delta} \rceil$. Очевидно, существует правильная раскраска вершин графа G в $k+1$ цвет.

Докажем, что эта раскраска будет правильной раскраской вершин гиперграфа $\mathcal{H}$. Пусть φ – биекция образа G. Для каждого гиперребра

$e \in E(\mathcal{H})$ мы имеем $\varphi^{-1}(e) \subset e$, а вершины ребра $\varphi^{-1}(e) \in E(G)$ покрашены в разные цвета.

2) Нам нужно доказать существование образа гиперграфа $\mathcal{H}$, имеющего правильную раскраску в k цветов при $k \geq 3$ и $\delta \geq 3$. Для начала рассмотрим образ G гиперграфа $\mathcal{H}$ с $\Delta(G) \leq k$ и его биекцию образа φ.

Вспомним классическую теорему Брукса: *если $\Delta(G) \leq k$, ни одна из компонент связности графа G не является кликой на $k+1$ вершине и $k \geq 3$, то вершины графа G красятся правильным образом в k цветов.*

Пусть компоненты-клики на $k+1$ вершине в графе G есть и это $C_1, \ldots, C_q$ (в дальнейшем для краткости именно эти компоненты мы будем называть просто *кликами*). Возможно, есть и другие компоненты связности, обозначим индуцированные на них подграфы графа G через $D_{q+1}, \ldots, D_p$. Нам нужно немного подправить граф-образ G так, чтобы получился раскрашиваемый в k цветов граф. Мы сделаем это очень просто.

Изменение образа.
В каждой клике C_i рассмотрим любое ребро u_iw_i. Понятно, что существует отличная от u_i и w_i вершина $v_i \in e_i = \varphi(u_iw_i)$. Построим новый образ G' гиперграфа $\mathcal{H}$, одновременно заменив каждое из рёбер u_iw_i на u_iv_i. Назовём только что проведённые рёбра $u_1v_1, \ldots, u_qv_q$ *новыми* рёбрами.

Далее мы докажем, что вершины G' можно правильно раскрасить в k цветов.
Построим вспомогательный орграф F, вершинами которого будут компоненты связности графа G, а из каждой компоненты-клики C_i ведёт ориентированное ребро (*стрелка*) в компоненту, содержащую вершину v_i. Если v_i – вершина клики C_i, то стрелка окажется петлёй. Фактически, мы ориентировали новые рёбра и стянули каждую компоненту связности графа G в вершину.

Наш алгоритм покраски вершин в k цветов будет выполняться по следующему плану:

— если существует клика, в которую в графе F не входит ни одной стрелки, то выполним шаг 1, после чего вернемся к началу алгоритма;

— если в каждую клику в графе F входит хотя бы одна стрелка, то выполним шаг 2, после чего алгоритм завершит работу.

1. *Существует клика C_i, в которую не входит ни одной стрелки.* Тогда $d_{G'}(w_i) = k - 1$. Произвольно пронумеруем вершины C_i, начиная с w_i и заканчивая вершиной u_i, смежной в G' с вершиной какой-то другой компоненты связности графа G. Предположим, что мы покрасили вершины остальных компонент правильным образом в k цветов. Тогда мы можем легко докрасить вершины C_i в порядке, обратном их нумерации: на каждом шаге очередная рассматриваемая вершина будет смежна менее, чем с k уже покрашенными.

Значит, мы можем удалить из графа G' вершины компоненты C_i и перейти к вопросу о покраске остальных компонент связности. Соответственно преобразуем и граф F, удалив из него вершину C_i и выходящую из нее стрелку.

2. *В каждую компоненту-клику входит хотя бы одна стрелка.* Так как из каждой такой компоненты выходит ровно по одной стрелке, то и входит в каждую клику также ровно по одной стрелке. Таким образом, все компоненты-клики разбиваются в графе F на ориентированные циклы, вершины которых не связаны друг с другом в графе G'. Мы будем красить эти циклы независимо друг от друга. Остальные компоненты связности графа G (не клики из $k + 1$ вершин) являются компонентами связности и в графе G', и их вершины по теореме Брукса можно правильным образом покрасить в k цветов.

Итак, пусть клики $C_1, \ldots, C_\ell$ образуют в F ориентированный цикл. Обозначим через G^* индуцированный подграф графа G' на множестве вершин всех этих клик. Остается доказать, что вершины графа G^* можно правильным образом покрасить в k цветов. При $\Delta(G^*) \leq k$ это следует из теоремы Брукса, так как граф G^* связен и не является кликой на $k + 1$ вершине. Предположим, что $\Delta(G^*) > k$ и рассмотрим два случая.

2.1. *$\ell = 1$, то есть, цикл является петлёй и $v_1 \in V(C_1)$.* Тогда G^* – это клика на $k + 1$ вершине с удалённым ребром u_1w_1 и ребром u_1v_1 кратности два. Мы легко можем покрасить вершины C_1 правильным образом в k цветов, покрасив в цвет 1 вершины u_1 и w_1, а остальные вершины клики – по одной в оставшиеся цвета.

2.2. $\ell \geq 2$.
Пусть в графе G^* есть вершина x степени более k и лежит она в клике C_i. Тогда понятно, что x смежна с вершиной клики C_{i-1} и $x \neq w_i$. Более того, в этом случае $d_G(w_i) = k - 1$. Удалим вершину w_i из графа, мы ее сможем покрасить после покраски остальных вершин.

Если $x \neq u_i$, то x была смежна с w_i, а значит, все вершины из C_i имеют в графе $G^* - w_i$ степень не более k (см. рис. 3a).

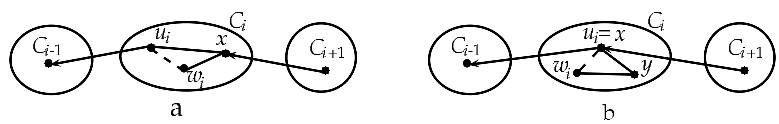

Рис. 3. Покраска клики C_i в графе G^*.

Если же $x = u_i$, то в клике C_i есть еще одна вершина y и $d_{G^*-w_i}(y) = k-1$, удалим из графа и ее (опять же, покрасив в k цветов остальные вершины, мы легко сможем докрасить y). В графе $G^* - w_i - y$ все вершины из C_i имеют степень не более k (см. рис. 3b).

Выполним такие операции со всеми компонентами-кликами, имеющими в графе G^* вершину степени более k. В результате получим связный граф H^* с максимальной степенью не более k.

Докажем, что граф H^* отличен от клики на $k+1$ вершине. По построению ясно, что все новые рёбра между компонентами $C_1, \dots, C_n$ вошли в граф H^* (мы не удаляли из графа G^* их концы). Рассмотрим компоненту C_2 и два инцидентных её вершинам новых ребра u_1v_1 и u_2v_2. Понятно, что граф $H^* - u_1v_1 - u_2v_2$ несвязен (вершины из C_2 отделены в нём от остальных). Таким образом, граф H^* теряет связность при удалении двух рёбер, а следовательно, не является кликой на $k+1 \geq 4$ вершинах.

Теперь понятно, что вершины графа H^* по теореме Брукса можно покрасить правильным образом в k цветов, после чего мы докрасим с соблюдением правильности все удалённые из G^* вершины.

Таким образом, вершины графа G' можно правильным образом покрасить в k цветов, и эта раскраска, как уже указывалось выше, будет правильной раскраской вершин гиперграфа $\mathcal{H}$. □

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим следующий гиперграф $\mathcal{H}$: множество вершин $V(\mathcal{H})$ совпадает с $V(G)$, а множество гиперребер $E(\mathcal{H})$ состоит из окрестностей $N_G(v)$ всех вершин $v \in V(G)$. Каждое гиперребро $\mathcal{H}$ имеет размер по крайней мере $\delta(G)$ и каждая вершина $\mathcal{H}$ лежит не более, чем в $\Delta(G)$ гиперребрах. Теперь легко видеть, что доказываемое утверждение является прямым следствием теоремы 1 для гиперграфа $\mathcal{H}$. □

Литература

1. G. Agnarsson, M. M. Halldorśson, *Strong Colorings of Hypergraphs.* Approximation and Online Algorithms Lecture Notes in Computer Science (2005), Volume 3351/2005, pp.253-266.
2. N. Alon and Z. Bregman, *Every* 8*-uniform* 8*-regular hypergraph is* 2*-colorable.* — Graphs Combinat. **4** (1988), 303–305.
3. N. Alon and J. Spencer, *The probabilistic method.* Wiley-Interscience, New York, 2000.
4. J. Beck, *On a combinatorial problem of P. Erdős and L. Lovász.* — Discrete Math. **17** (1977), 127–131.
5. J. Beck, *On* 3*-chromatic hypergraphs.* — Discrete Math. **24** (1978), 127–137.
6. P. Erdős, *On a combinatorial problem.* — Nordisk Mat. Tidskr. **11** (1963), 5–10.
7. P. Erdős, *On a combinatorial problem.* — Acta Math Acad. Sci. Hungar **15** (1964), 445–447.
8. P. Erdős, L. Lovász, *Problems and results on* 3*-chromatic hypergraphs and some related questions.* — In: Infinite and finite sets, Colloq. Math. Soc. J. Bolyai, Vol. 10, North Holland, Amsterdam (1974), pp. 609–627.
9. L. Hong-Jian, B. Montgomery, H. Poon, *Upper Bounds of Dynamic Chromatic Number.* — Ars. Combinatoria **68** (2003), 193–201.
10. A. Kostochka, *Coloring uniform hypergraphs with few colors.* — Random Structures and Algorithms **24** (2004), 1–10.
11. A. Pluha'r, *Greedy colorings of uniform hypergraphs.* — Random Structures and Algorithms **35** (2009), 216–221.
12. W. M. Schmidt, *Ein kombinatoriches problem.* — Acta Math. Acad. Sci. Hungar **15** (1964), 373–374.
13. J. H. Spencer, *Coloring* n*-sets red and blue.* — J. Combin Theory Ser. A **30** (1981), 112–113.
14. C. Thomassen, *The even cycle problem for directed graphs.* — J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 217–229.
15. Н. В. Гравин, *Невырожденные раскраски в теореме Брукса.* — Дискр. матем. **21** (2009), вып. 4, 106–128.
16. Д. В. Карпов, *Динамические правильные раскраски вершин графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 47–77.

Karpov D. V., Gravin N. V. On proper colorings of hypergraphs.

Let $\mathcal{H}$ be a hypergraph with maximal vertex degree Δ, such that each hyperedge of it has at least δ vertices. Let $k = \lceil\frac{2\Delta}{\delta}\rceil$. We prove that $\mathcal{H}$ admits a proper vertex coloring with $k+1$ colors, (i.e., in any hyperedge there should be at least two vertices of different colors). For $k \geq 3$ and $\delta \geq 3$ we prove that $\mathcal{H}$ admits a proper vertex coloring with k colors.

For a graph G set $k = \lceil \frac{2\Delta(G)}{\delta(G)} \rceil$. As a corollary we derive that there exists a proper dynamic coloring of the graph G with $k+1$ colors, and for $k \geq 3$ and $\delta(G) \geq 3$ – with k colors.

Поступило 18 октября 2011 г.

Division of Mathematical Sciences,
Nanyang Technological University, Singapore
E-mail: ngravin@gmail.com

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru