Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 391, 2011 г.

А. Л. Глазман

ОБОБЩЕННЫЕ РОМАШКИ В k-СВЯЗНОМ ГРАФЕ

Введение

Структура разбиения связного графа его точками сочленения (то есть, вершинами, удаление которых делает граф несвязным) широко известна [1]. Для описания этой структуры удобно использовать так называемое дерево блоков и точек сочленения, вершинами которого являются точки сочленения и блоки – части, на которые они разбивают граф. В 1966 году W.T.Tutte [2] описал структуру взаимного расположения двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе и показал, что она имеет много общего со структурой точек сочленения. В частности, была предложена конструкция дерева блоков для двусвязного графа.

Попытки построения аналогичных конструкций для графов большей связности делались в работах [5, 6, 7]. Однако при этом возникают серьезные трудности, связанные с тем, что k-вершинные разделяющие множества k-связного графа могут быть зависимы, то есть при удалении одного из них вершины другого оказываются в разных компонентах связности. Это приводит к тому, что получающиеся конструкции дерева блоков для k-связного графа оказываются неоднозначными – они существенно зависят от того, в каком порядке при их построении выбираются разделяющие множества. Кроме того, подобные конструкции учитывают не все k-вершинные разделяющие множества графа: разбивая граф при помощи одного из этих множеств мы автоматически теряем информацию обо всех зависимых с ним разделяющих множествах. В работах [6, 7] эти трудности были частично преодолены для графов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям. Однако в общем случае вопрос об описании структуры разбиения k-связного графа всеми его k-вершинными разделяющими множествами при $k \geq 3$ оставался открытым.

В работе [4] был разработан новый метод изучения структуры взаимного расположения k-вершинных разделяющих множеств k-связного

Ключевые слова: k-связный граф, четырехсвязный граф, разделяющее множество.

графа – теорема о разбиении. С ее помощью был получен ряд результатов для случая произвольного k. В качестве иллюстрации работы этого метода в конце работы [4] приведено достаточно наглядное и простое описание структуры двухвершинных разделяющих множеств в двусвязном графе. Это описание в целом аналогично конструкции Татта [2], но хорошо иллюстрирует эффективность нового метода.

Д. В. Карпов и А. В. Пастор [3] описали структуру трехсвязного графа. В их работе трехвершинные множества разбиваются на вполне определенные группы, которые называются комплексами. Благодаря этому новому определению удается построить гипердерево, вершинами которого являются комплексы. То есть и в случае трехсвязного графа получается некий аналог дерева блоков и точек сочленения. Соответственно, окончательной целью исследования структуры четырехсвязных графов и взаимного расположения четырехвершинных разрезов является построение аналогичного гипердерева.

Введем основные понятия, которые будем использовать в течение всей работы. Всюду в настоящей работе под графом будет пониматься конечный неориентированный граф без петель и кратных ребер. Множества вершин и ребер графа G будем обозначать через $\mathrm{V}(G)$ и $\mathrm{E}(G)$ соответственно. Степень вершины v в графе G мы будем обозначать через $d_G(v)$.

Мы будем называть две вершины графа *связанными*, если существует путь между ними. Под компонентой связности графа в работе подразумевается подграф, индуцированный на максимальном по включению множестве его попарно связанных вершин.

Граф G называется *k-связным*, если он содержит как минимум $k+1$ вершину и сохраняет связность при удалении любых $k-1$ вершин. В частности, при $k=2$ такой граф называется двусвязным, при $k=3$ – трехсвязным, а при $k=4$ – четырехсвязным.

Для любого множества ребер $E \subset \mathrm{E}(G)$ мы, как обычно, будем обозначать через $G-E$ граф, полученный из G в результате удаления ребер множества E. Для $e \in \mathrm{E}(G)$ положим $G-e=G-\{e\}$.

Для любого множества вершин $V \subset \mathrm{V}(G)$ мы будем обозначать через $G-V$ граф, полученный из G в результате удаления вершин множества V и всех инцидентных им ребер. Для $v \in \mathrm{V}(G)$ положим $G-v=G-\{v\}$.

Для любого множества $M \subset \mathrm{V}(G) \cup \mathrm{E}(G)$ мы будем обозначать через $G - M$ граф, полученный из G в результате удаления вершин и ребер множества M и всех ребер, инцидентных вершинам множества M.

Множество $S \subset \mathrm{V}(G)$ называется *разделяющим*, если граф $G - S$ несвязен. Семейство всех разделяющих множеств графа G мы будем обозначать через $\mathfrak{R}(G)$, а семейство всех его k-вершинных разделяющих множеств (мы будем называть такие множества *k-разделяющими*) будем обозначать через $\mathfrak{R}_k(G)$.

Мы будем использовать терминологию из работы [4].

Определение 1. 1) *Пусть $R, X \subset \mathrm{V}(G)$. Будем говорить, что множество R разделяет множество X, если не все вершины из $X \setminus R$ лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.*

2) *Пусть $U, W \subset \mathrm{V}(G)$. Будем говорить, что множество R отделяет множество U от множества W, если $U \not\subset R$, $W \not\subset R$ и никакие две вершины $u \in U \setminus R$ и $w \in W \setminus R$ не лежат в одной компоненте связности графа $G - R$.*

В случае, когда $U = \{u\}$, мы будем говорить, что R отделяет вершину u от множества W. Если же $U = \{u\}$ и $W = \{w\}$, то мы будем говорить, что R отделяет вершину u от вершины w.

Определение 2. 1) *Будем называть множества $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$ независимыми, если S не разделяет T и T не разделяет S. В противном случае, назовем эти множества зависимыми.*

2) *Каждому набору $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ поставим в соответствие граф зависимости* $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$*, вершины которого – множества набора $\mathfrak{S}$, а две вершины смежны тогда и только тогда, когда соответствующие множества зависимы.*

Таким образом, набор $\mathfrak{S}$ разбивается на *компоненты зависимости* — поднаборы, соответствующие компонентам связности графа $\mathrm{Dep}(\mathfrak{S})$.

Нетрудно доказать, что если T не разделяет S, то S не разделяет T, то есть, эти множества независимы (см. [5, 6]).

Определение 3. *Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$.*

1) *Часть разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$ (или часть $\mathfrak{S}$-разбиения) – это подграф графа G, индуцированный на максимальном по включению множестве $A \subset \mathrm{V}(G)$ таком, что никакое множество $S \in \mathfrak{S}$ не*

разделяет A. *Будем обозначать через* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *множество всех таких частей. Если набор* $\mathfrak{S}$ *состоит из одного множества* S, *то будем обозначать множество всех частей* $\{S\}$*-разбиения через* $\mathrm{Part}(S)$.

2) *Вершины части* $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$, *не входящие ни в одно из множеств набора* $\mathfrak{S}$, *будем называть внутренними, а множество всех таких вершин – внутренностью части* A, *которую будем обозначать через* $\mathrm{Int}(A)$. *Вершины части* A, *входящие в какие-либо множества из* $\mathfrak{S}$, *мы будем называть граничными, а множество всех этих вершин – границей части* A *и обозначать через* $\mathrm{Bound}(A)$.

3) *Назовем часть* A *пустой, если* $\mathrm{Int}(A) = \varnothing$ *и непустой в противном случае. Назовем часть* A *малой, если* $|V(A)| < k$ *и нормальной, если* $|V(A)| \geq k$.

Нетрудно понять, что две различные части $A_1, A_2 \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ либо не имеют общих вершин, либо $V(A_1) \cap V(A_2)$ содержится в одном из множеств набора $\mathfrak{S}$. В [4, теорема 2] доказано, что граница $\mathrm{Bound}(A)$ состоит из всех вершин части A, имеющих смежные вершины вне A и отделяет $\mathrm{Int}(A)$ от $\mathrm{V}(G) \setminus A$.

Важным частным случаем разбиения k-связного графа набором k-разделяющих множеств является разбиение этого графа одним k-разделяющим множеством S. Понятно, что для любой части $F \in \mathrm{Part}(S)$ ее внутренность $\mathrm{Int}(F)$ есть множество вершин одной из компонент связности графа $G - S$. Поскольку никакое подмножество множества S не является разделяющим множеством графа G, то каждая вершина множества S должна быть смежна хотя бы с одной вершиной из $\mathrm{Int}(F)$, то есть подграф F связен.

Отметим, что каждая вершина x графа G смежна хотя бы с одной другой вершиной y. Тогда никакое множество не может разделить x и y, следовательно, для произвольного набора $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ любая часть $A \in \mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ содержит хотя бы две вершины.

1. Ромашки

Одним из важнейших объектов в исследовании структуры k-связных графов является ромашка. Напомним общее определение для произвольного k. Всюду в данном разделе будут использоваться следующие обозначения.

Пусть $m \geq 4$, и множества $P, Q_1, \ldots, Q_m \subset \mathrm{V}(G)$ удовлетворяют следующим условиям для всех $i \in \{1, \ldots, m\}$:

$$0 \leq |P| < k, \qquad Q_i \cap P = \varnothing, \qquad |Q_i| = \frac{k - |P|}{2}.$$

Рассмотрим набор $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$. Множества $Q_1, \ldots, Q_m$ считаем *циклически упорядоченными*, то есть их циклическая перестановка не меняет F. Введем обозначение $Q_{i,j} = Q_i \cup Q_j \cup P$.

Определение 4. *Назовем Q_i и Q_j близкими, если включение $Q_k \subset Q_{i,j}$ выполняется либо для всех k от i до j, либо для всех k от j до i.*

Замечание 1. Индексы у нас являются вычетами по модулю m, и удобно представлять их себе как числа от 1 до m, расставленные по кругу – по часовой стрелке для определенности. Для $i \neq j$ под индексами от i до j стоит понимать индексы, лежащие на той из дуг между i и j, на которой находится индекс $i + 1$.

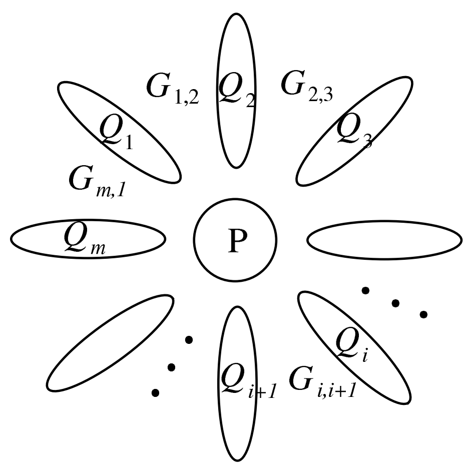

Рис. 1. Ромашка.

Определение 5. 1) *Пусть существует такой набор $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, состоящий из множеств вида $Q_{i,j}$, где i и j – не соседние, что разбиение* $\mathrm{Part}(\mathfrak{S})$ *состоит из m частей $G_{1,2}, G_{2,3}, \ldots, G_{m,1}$, причем* $\mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. *Кроме того, пусть из того, что Q_i и Q_j*

пересекаются, следует, что они близки. Тогда назовем набор F ромашкой.

2) *Множество P назовем центром, а множества $Q_1, \ldots, Q_m$ – лепестками этой ромашки. Разбиением графа G ромашкой F назовем* $\mathrm{Part}(F) = \{G_{1,2}, \ldots, G_{m,1}\}$, *а подграфы $G_{i,i+1}$ будем называть частями этого разбиения. Если никакие два лепестка ромашки F не пересекаются, то назовем эту ромашку правильной. Будем говорить, что набор $\mathfrak{S}$ порождает ромашку F.*

Замечание 2. Дополнительное условие про близость пересекающихся лепестков необходимо – без него не будет верна теорема 1. В работах [4] и [3] авторы имеют дело с правильными ромашками, для которых это условие выполнено тривиальным образом – пересекающихся лепестков там просто нет.

Далее мы хотим ввести понятие *обобщенной ромашки*, с которым и будем работать. Но для этого необходимо определить *обобщенные части*, на которые делит граф разделяющее множество, и сказать про них несколько слов.

Определение 6. 1) *Пусть $S \in \mathfrak{R}_k(G)$, причем* $\mathrm{Part}(S) = \{A_1, \ldots, A_m\}$. *Рассмотрим произвольное j от 2 до m и некоторое дизъюнктное разбиение множества натуральных чисел от 1 до m на j подмножеств. Обозначим его за $I = \{I_1, \ldots, I_j\}$. Рассмотрим такие индуцированные подграфы $B_1, \ldots, B_j$ графа G, что $\mathrm{V}(B_t) = \cup_{i \in I_t} \mathrm{V}(A_i)$. Будем говорить, что S делит граф G на* обобщенные части $B_1, \ldots, B_j$, *согласованные с разбиением I. Обозначать набор обобщенных частей, согласованных с I, будем так –* $\mathrm{Part}_I(S)$.

2) *Пусть $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$ – это набор разделяющих множеств $S_1, \ldots, S_t$, которые делят граф на $m_1, \ldots, m_t$ частей соответственно. Рассмотрим набор $\mathfrak{I} = \{I^1, \ldots, I^t\}$ такой, что для всех j от 1 до t множество I^j является разбиением чисел от 1 до m_j на несколько (более одной) групп. Обобщенной частью разбиения графа набором разделяющих множеств $\mathfrak{S}$, согласованной с набором разбиений $\mathfrak{I}$, назовем максимальный по включению индуцированный подграф, целиком лежащий в одной из обобщенных частей разбиения графа каждым из множеств набора. Множество всех обобщенных частей разбиения графа набором $\mathfrak{S}$, согласованных с набором разбиений $\mathfrak{I}$, будем обозначать через* $\mathrm{Part}_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{S})$ *и называть* обобщенным разбиением *графа набором $\mathfrak{S}$, согласованным с $\mathfrak{I}$.*

3) *Внутренность и граница обобщенной части определяются так же, как внутренность и граница обычной части.*

Лемма 1. *Пусть $S, T \in \mathfrak{R}_k(G)$, а набор I задает разбиение частей из $\mathrm{Part}(S)$ на обобщенные части. Тогда множества S и T зависимы тогда и только тогда, когда нет обобщенной части из $\mathrm{Part}_I(S)$, во множестве вершин которой содержатся все вершины из T.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть множества S и T зависимы. Тогда во внутренности каждой из частей разбиения графа G множеством S содержится как минимум одна вершина множества T [6, лемма 10]. Ясно, что тогда и во внутренности каждой из обобщенных частей разбиения графа множеством S, согласованного с I, содержится как минимум одна вершина множества T. Поэтому не найдется обобщенной части, среди вершин которой есть все вершины множества T.

($\Leftarrow$) Пусть нет обобщенной части из $\mathrm{Part}_I(S)$, во множестве вершин которой содержатся все вершины из T. Тогда есть две обобщенные части из $\mathrm{Part}_I(S)$, во внутренности каждой из которых есть вершины множества T. Значит, найдутся и две обыкновенные части разбиения графа G множеством S с таким же свойством. То есть S и T зависимы. $\square$

Замечание 3. Заметим, что все утверждения из [4] верны и для обобщенных частей, и глобальная причина этого такова — в их доказательстве не использовалась связность подграфов, индуцированных на внутренностях частей, а до тех пор, пока мы ей не пользуемся, понятия обобщенной части и части неразличимы.

Определение 7. 1) *Пусть существуют такие набор $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}_k(G)$, состоящий из множеств вида $Q_{i,j}$, где i и j – не соседние, и набор разбиений $\mathfrak{I}$, что обобщенное разбиение $\mathrm{Part}_{\mathfrak{I}}(\mathfrak{S})$ состоит из m частей $G_{1,2}, G_{2,3}, \ldots, G_{m,1}$, причем $\mathrm{Bound}(G_{i,i+1}) = Q_{i,i+1}$. Кроме того, пусть из того, что Q_i и Q_j пересекаются, следует, что они близки. Тогда назовем набор F обобщенной ромашкой.*

2) *Центр и лепестки обобщенной ромашки определим так же, как соответствующие понятия для обычной. Частями разбиения графа G обобщенной ромашкой F мы будем называть подграфы $G_{1,2}, \ldots, G_{m,1}$.*

В дальнейшем считаем, что в графе больше, чем $2k - |P|$ вершин.

Замечание 4. 1) В случае четырехсвязного графа логично работать именно с обобщенными ромашками, но из-за этого придется передоказать некоторые утверждения, доказанные в [4] и [3]. К тому же, мы нигде не предполагаем правильности ромашки, а требуем, чтобы выполнялось гораздо более слабое условие – чтобы могли пересекаться только близкие лепестки. Пример обобщенной ромашки, не являющейся обычной, приведен на рис. 2.

2) Для того, чтобы определение $\mathrm{Part}(F)$ было корректно, необходимо доказать, что независимо от $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{I}$ части $G_{i,i+1}$ будут одни и те же. Это будет доказано в теореме 2. Но сразу же хочется отметить, что, в некоторых случаях обобщенная ромашка, порожденная набором разделяющих множеств с нетривиальным набором разбиений, может быть порождена как обычная при должном выборе набора разделяющих множеств, однако такой набор найдется не всегда.

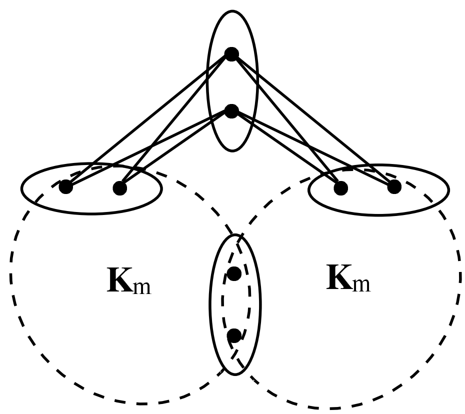

Рис. 2. Обобщенная ромашка, которая не является обычной.

Введенные выше обозначения будем считать стандартными для ромашки, лепестки располагаем в циклическом порядке, а их индексы будем рассматривать все время как вычеты по модулю количества лепестков. Введем обозначение $G_{i,j} = G(\cup_{x=i}^{j-1}\mathrm{V}(G_{x,x+1}))$.

Удобно рассматривать ромашку, расположив лепестки $Q_1, \ldots, Q_m$ по окружности в соответствии с их циклическим порядком, а в центр поместив P. Между лепестками Q_i и Q_{i+1} поместим часть $G_{i,i+1}$. В данном случае фраза “между лепестками” имеет вполне конкретный смысл – естественно, часть $G_{i,i+1}$ располагаем с той стороны, где нет других лепестков. В дальнейшем для того, чтобы понять, что означает словосочетание *между лепестками* Q_i *и* Q_j предлагается воспользоваться только что нарисованной картиной – берем или все, что лежит на одной дуге окружности или все, что на другой.

Определение 8. Внутренними множествами *обобщенной ромашки назовем множества* $Q_{i,j}$ *для всех пар неблизких лепестков. Обозначим через* $\mathfrak{R}(F)$ *набор, состоящий из внутренних множеств ромашки* F. Границами *ромашки назовем множества* $Q_{i,i+1}$ *для всех* i.

Перед тем, как заняться конкретно случаем четырехсвязного графа, перечислим ряд утверждений, доказанных в [4] для произвольного k, которые нам пригодятся. Они все сформулированы там для обычной ромашки, в которой, к тому же, лепестку запрещено содержаться в объединении остальных. Но верны они и безо всех этих ограничений. Поэтому мы дадим новые доказательства этих утверждений, проходящие для общего случая.

Лемма 2. *Для обобщенной ромашки* $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ *справедливы следующие утверждения.*

1) *Лепестки с разными номерами не совпадают.*

2) *Если лепестки* Q_i *и* Q_j *пересекаются, то либо* $\mathrm{V}(G_{i,j})$*, либо* $\mathrm{V}(G_{j,i})$ *совпадает с* $Q_{i,j}$.

3) *Если множество* $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$*, то оно разбивает граф ровно на две обобщенные части, причем это* $G_{i,j}$ *и* $G_{j,i}$.

4) *Если множество* $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$ *и лепесток* $Q_k \subset Q_{i,j}$*, то* $k = i$ *или* $k = j$.

5) *Всякое множество из набора* $\mathfrak{S}$ *представляется в виде* $Q_{i,j}$ *единственным образом.*

6) *Если множество* $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$*, то* Q_i *и* Q_j *не являются близкими.*

7) *Для каждого лепестка* Q_i *найдется такое* j*, что* $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$.

8) *Если* $v \in Q_i \cap Q_j$ *и* $\mathrm{V}(G_{i,j}) = Q_{i,j}$*, то все лепестки с номерами от* i *до* j *содержат* v.

9) *Если* Q_i *и* Q_j *– это два различных лепестка, причем* $j \neq i-1$*, то* $Q_k \cap \mathrm{V}(G_{i,j}) = Q_k \cap (Q_i \cup Q_j)$ *для произвольного* k *от* $j+1$ *до* $i-1$.

Доказательство. 1) Пусть $Q_i = Q_j$, но $i \neq j$. Тогда по определению обобщенной ромашки лепестки Q_i и Q_j близки, то есть все лепестки, лежащие между ними с одной из сторон, содержатся в $Q_{i,j}$. Не умаляя общности, это лепестки с номерами от i до j. Но так как $Q_i = Q_j$, а во всех лепестках поровну вершин, получаем просто, что для всех k от i до j выполнено равенство $Q_k = Q_i$. Тогда части $G_{i,i+1}$ и $G_{j-1,j}$ пусты. Значит, они совпадают. Но все части в определении обобщенной ромашки различные. Поэтому $j = i+1$, и лепесток Q_{j+1} уже не совпадает с Q_i. Но в таком случае $\mathrm{V}(G_{i,i+1}) \subset \mathrm{V}(G_{i+1,i+2})$. Противоречие.

2) Заметим, что по определению обобщенной ромашки лепестки Q_i и Q_j близки. Не умаляя общности, считаем, что лепестки с номерами от i до j лежат в $Q_{i,j}$. Ясно, что тогда любые два таких лепестка пересекаются. Подграф $G_{i,j}$ является объединением нескольких частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$. При этом, очевидно, $G_{i,j} \neq G$ (хотя бы потому, что в $G_{i,j}$ не содержится ни одного множества из набора $\mathfrak{S}$). Поэтому, если мы удалим объединение границ всех частей, содержащихся в $G_{i,j}$, и при этом от $G_{i,j}$ что-то останется, то граф G обязательно распадется на несколько компонент связности. Но заметим теперь, что границы всех этих частей, содержащихся в $G_{i,j}$, состоят из центра ромашки и некоторых вершин лепестков с номерами от i до j, а все эти лепестки содержатся в $Q_{i,j}$. Значит, множество $Q_{i,j}$ как раз и является объединением границ этих частей. Но в нем меньше, чем k вершин, поэтому оно не может быть разделяющим. Тогда после выкидывания $Q_{i,j}$ от $G_{i,j}$ ничего не останется. То есть, действительно $\mathrm{V}(G_{i,j}) = Q_{i,j}$.

3) Докажем, что $Q_{i,j}$ не может разделять $G_{i,j}$ (в смысле обобщенных частей). Мы знаем, что $\mathrm{V}(G_{i,j}) = \cup_{x=i}^{j-1}\mathrm{V}(G_{x,x+1})$, причем любые две соседние части разбиения графа ромашкой F пересекаются как минимум по лепестку, входящему в границы обеих этих частей. Так как по определению $Q_{i,j}$ не может разделять ни одну из частей $G_{x,x+1}$, то для того, чтобы разделить $G_{i,j}$, наше множество должно содержать некий лепесток Q_y, где y от $i+1$ до $j-1$. Но тогда по первой части нашей леммы лепесток Q_y обязан пересекаться и с Q_i, и с Q_j. Значит, по части 2 нашей леммы множество вершин одной из частей $G_{i,y}$ и $G_{y,i}$ совпадает с $Q_{i,y}$. При этом, очевидно, лепесток Q_j не содержится в $Q_{i,y}$. Поэтому именно $\mathrm{V}(G_{i,y})$ совпадает с $Q_{i,y}$. Аналогично, $\mathrm{V}(G_{y,j}) = Q_{y,j}$. Из того, что $Q_{i,y} \cup Q_{y,j} = Q_{i,j}$, следует равенство $\mathrm{V}(G_{i,j}) = Q_{i,j}$. Но тогда множество $Q_{i,j}$, очевидно, не может разделять $G_{i,j}$. Противоречие.

Таким образом, множество $Q_{i,j}$ не разделяет $G_{i,j}$. Совершенно аналогично получаем, что оно не разделяет и $G_{j,i}$. Но в определении обобщенных частей разбиения графа неким разделяющим множеством говорится, что этих частей должно быть как минимум две. Значит, действительно, подграфы $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ являются обобщенными частями разбиения графа G множеством $Q_{i,j}$, и других обобщенных частей нет.

4) Заметим, что в ходе доказательства части 3) нашей леммы мы предположили, что в разделяющем множестве $Q_{i,j}$ из набора $\mathfrak{S}$ содержится лепесток Q_y, где y от $i+1$ до $j-1$, и доказали, что в таком случае обязательно $\mathrm{V}(G_{i,j}) = Q_{i,j}$. С другой стороны, из той же части 3) следует, что обобщенными частями являются $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$. Но множество вершин обобщенной части не может содержаться в самом разделяющем множестве. Противоречие.

5) Пусть $T \in \mathfrak{S}$, причем $T = Q_{i,j} = Q_{k,\ell}$. Если k совпадает с i или с j, то ℓ совпадает с j или с i соответственно, и это один и тот же способ разбить T на два лепестка и центр. Если же k не совпадает ни с i, ни с j, то это противоречит утверждению пункта 4) нашей леммы.

6) Пусть Q_i и Q_j близки. Тогда в $Q_{i,j}$ содержатся все лепестки, лежащие между Q_i и Q_j с одной из сторон. Предположим, что $Q_{i,j} \in \mathfrak{S}$. По определению обобщенной ромашки лепестки Q_i и Q_j не могут быть соседними. Значит, найдется такое k, отличное от i и j, что $Q_k \subset Q_{i,j}$. А это противоречит утверждению пункта 4) нашей леммы.

7) Рассмотрим лепесток Q_i и части $G_{i-1,i}$ и $G_{i,i+1}$. Заметим, что какое-то множество T из набора $\mathfrak{S}$ должно разделять эти две части. Ясно, что оно обязано содержать все общие вершины этих двух частей. Но среди этих общих вершин есть все вершины лепестка Q_i. Значит, доказали, что $Q_i \subset T$. Тогда по пункту 4) этой леммы получаем, что $T = Q_{i,j}$ для некоторого j.

8) Пусть нашелся лепесток Q_k, где k от $i+1$ до $j-1$, не содержащий вершину v. По пункту 7) этой леммы найдется такое ℓ, что $Q_{k,\ell} \in \mathfrak{S}$. Заметим, что если ℓ от i до j, то $Q_\ell \subset \mathrm{V}(G_{i,j})$, а в $G_{i,j}$ менее k вершин, поэтому Q_ℓ пересекается с Q_k, и, следовательно, эти два лепестка близки, что противоречит пункту 6) нашей леммы. Значит, ℓ от $j+1$ до $i-1$. По пункту 3) нашей леммы множество $Q_{k,\ell}$ разбивает граф на две обобщенные части — $G_{k,\ell}$ и $G_{\ell,k}$. Но вершина v лежит в обеих этих частях. Значит, она обязана лежать и в $Q_{k,\ell}$. Так как $v \notin Q_k$,

обязательно $v \in Q_\ell$. То есть лепесток Q_ℓ должен пересекаться и с Q_i, и с Q_j. Тогда он близок к ним обоим.

Заметим, что по пункту 2) множество вершин одного из подграфов $G_{i,\ell}$ и $G_{\ell,i}$ совпадает с $Q_{i,\ell}$. Но есть следующее включение множеств – $\mathrm{V}(G_{i,\ell}) \supset \mathrm{V}(G_{i,j}) \supset Q_k$. Поэтому если $\mathrm{V}(G_{i,\ell})$ совпадает с $Q_{i,\ell}$, то $Q_k \subset Q_{i,\ell}$, что невозможно, так как Q_k и Q_ℓ не пересекаются. Значит, именно $\mathrm{V}(G_{\ell,i})$ совпадает с $Q_{i,\ell}$. Аналогично получаем, что $\mathrm{V}(G_{j,\ell}) = Q_{j,\ell}$. Но тогда все вершины графа лежат в объединении центра обобщенной ромашки и лепестков Q_i, Q_j и Q_ℓ, а мы изначально предполагаем, что в графе G больше, чем $2k - |P|$ вершин. Противоречие.

9) Пусть $v \in Q_k \cap \mathrm{V}(G_{i,j})$. Тогда, так как v не может лежать во внутренности ни одной из частей разбиения графа G ромашкой F, найдется лепесток Q_ℓ, содержащий v, где ℓ от i до j. По второму пункту текущей леммы одна из частей $G_{\ell,k}$ и $G_{k,\ell}$ должна совпадать с $Q_{k,\ell}$. Пусть это часть $G_{k,\ell}$. Тогда по восьмому пункту текущей леммы все лепестки с номерами от k до ℓ содержат v. В частности, лепесток Q_i содержит ее. Аналогично, если часть $G_{\ell,k}$ совпадает с $Q_{k,\ell}$, то Q_j содержит v. $\square$

Лемма 3 [4, лемма 9]**.** *Граф зависимости любого набора k-разделяющих множеств, порождающего обобщенную ромашку, связен.*

Теорема 1 [4, теорема 6]**.** *Пусть $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ – обобщенная ромашка. Тогда $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}_k(G)$, причем множество $Q_{i,j} \in \mathfrak{R}(F)$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$.*

Доказательство. Рассмотрим два произвольных неблизких лепестка Q_i и Q_j. Заметим, что в обоих подграфах $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ есть вершины, не лежащие в $Q_{i,j}$. Ясно, что все вершины множества $Q_{i,j}$ являются общими вершинами этих двух подграфов. Докажем, что других общих вершин у них нет.

Рассмотрим произвольную их общую вершину v, не лежащую в $Q_{i,j}$. Если она является внутренней вершиной какой-либо из частей разбиения графа ромашкой F, то она лежит только в этой части, и поэтому не может лежать и в $G_{i,j}$, и в $G_{j,i}$. Значит, она не является внутренней вершиной ни одной из частей разбиения. Теперь вспомним, что

$$\begin{aligned}\mathrm{V}(G_{i,j}) &= P \cup \mathrm{V}(G_{i,i+1}) \cup \cdots \cup \mathrm{V}(G_{j-1,j}) \\ &= (\mathrm{Int}(G_{i,i+1}) \cup \cdots \cup \mathrm{Int}(G_{j-1,j})) \cup (Q_i \cup \cdots \cup Q_j).\end{aligned}$$

Поэтому, так как вершина v лежит в части $G_{i,j}$, но не является внутренней вершиной ни одной из частей разбиения графа ромашкой F и не лежит в $Q_{i,j}$, должно найтись такое k от $i+1$ до $j-1$, что $v \in Q_k$. Аналогично, найдется такое ℓ от $j+1$ до $i-1$, что $v \in Q_\ell$. Но тогда лепестки Q_i и Q_j лежат по разные стороны от $Q_{k,\ell}$. Значит, по определению обобщенной ромашки лепестки Q_k и Q_ℓ близки и по пунктам 2 и 8 леммы 2 либо $v \in Q_i$, либо $v \in Q_j$. Противоречие.

Таким образом все общие вершины $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ – это вершины множества $Q_{i,j}$. Предположим, что оно не разделяет подграфы $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$. Тогда должны найтись такие две смежные вершины u и v, не лежащие в $Q_{i,j}$, что $u \in \mathrm{V}(G_{i,j})$, а $v \in \mathrm{V}(G_{j,i})$. Ясно, что должна найтись часть разбиения графа обобщенной ромашкой F, содержащая обе эти вершины. Не умаляя общности, считаем, что это часть $G_{k,k+1}$, где k от i до $j-1$. Но $\mathrm{V}(G_{k,k+1}) \subset \mathrm{V}(G_{i,j})$, поэтому все общие вершины $G_{k,k+1}$ и $G_{j,i}$ лежат в $Q_{i,j}$. Тогда вершина v лежит в $Q_{i,j}$. Противоречие. $\square$

Следствие 1 [4, следствие 4]**.** *Для обобщенной ромашки $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ выполняются следующие утверждения.*

1) *Расположим индексы $1, 2, \dots, m$ по окружности соответственно их циклическому порядку и поставим в соответствие множеству $Q_{i,j}$ хорду этой окружности, соединяющую i и j. Тогда внутренние множества $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$ ромашки F являются зависимыми k-разделяющими множествами в том и только том случае, когда соответствующие им хорды окружности пересекаются во внутренней точке.*

2) *Если множества $Q_{x,y}$ и $Q_{z,t}$ являются зависимыми разделяющими множествами, то $Q_{x,y}$ отделяет друг от друга лепестки Q_z и Q_t.*

Доказательство этих утверждения непосредственно следует из теоремы 1.

Определение 9. *Пусть $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ – обобщенная ромашка,* $\mathrm{Part}(F) = \{G_{1,2}, \dots, G_{m,1}\}$*. Для неравных i и j введем понятия границы и внутренности $G_{i,j}$. Границей $G_{i,j}$ называем* $\mathrm{Bound}(G_{i,j}) = Q_{i,j}$, *а* внутренностью – $\mathrm{Int}(G_{i,j}) = \mathrm{V}(G_{i,j} - Q_{i,j})$*. Соответственно, называем часть $G_{i,j}$ пустой, если у нее пустая внутренность.*

Лемма 4. *Для обобщенной ромашки $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ верно следующее.*

1) *Если ни один из лепестков не лежит в объединении остальных, то* $\mathfrak{R}(F)$ *состоит из множеств* $Q_{i,j}$ *для всех пар различных несоседних в циклическом порядке индексов* i *и* j.

2) *Если лепестки* Q_i *и* Q_j *являются близкими, но не соседними, то одна из частей* $G_{i,j}$ *и* $G_{j,i}$ *пуста.*

Доказательство. 1) Заметим, что если два лепестки является близкими, но не соседними, то в их объединении должен содержаться как минимум один лепесток. Поэтому если ни один из лепестков ромашки не лежит в объединении остальных, то близкими являются только соседние лепестки. А набор $\mathfrak{R}(F)$ состоит как раз из множеств вида $Q_{i,j}$, где лепестки Q_i и Q_j не являются близкими.

2) Если Q_i и Q_j пересекаются, то это просто пункт 2) леммы 2. Теперь предположим, что они не пересекаются. Так как эти лепестки – несоседние, между ними с обеих сторон есть лепестки. Но они являются близкими, поэтому хотя бы с одной из сторон лепестки, лежащие между ними, целиком содержатся в $Q_{i,j}$. Не умаляя общности считаем, что это лепестки с номерами от i до j. Рассмотрим Q_{i+1}. Этот лепесток лежит в $Q_{i,j}$. Поэтому он обязан пересекаться и с Q_i, и с Q_j. Тогда по второй части леммы 2 одна из частей $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i}$ является пустой. Ясно, что пуста именно $G_{i,i+1}$, так как в $G_{i+1,i}$ есть некоторое количество вершин из Q_j, не лежащих в $Q_{i,i+1}$. Аналогично доказываем, что $G_{i+1,j}$ пуста. Так как $\mathrm{V}(G_{i,j}) = \mathrm{V}(G_{i,i+1}) \cup \mathrm{V}(G_{i+1,j})$ и $Q_{i+1} \subset Q_{i,j}$, получаем требуемое. □

Лемма 5. *Пусть набор* $\mathfrak{S}$ *разделяющих множеств порождает обобщенную ромашку* F. *Известно, что вершина* u *содержится в каждом из множеств набора* $\mathfrak{S}$. *Тогда* u *лежит в центре ромашки* F.

Доказательство. Предположим, что вершина u не лежит в центре ромашки F. Ясно, что u есть в границе каждой из частей разбиения графа G набором $\mathfrak{S}$. Тогда для любого i знаем, что либо $u \in Q_i$, либо $u \in Q_{i+1}$. Теперь предположим, что нашлись два лепестка Q_i и Q_j, не содержащие u. Ясно, что они не могут быть соседними. Разберем два случая.

Случай 1. *Лепестки* Q_i *и* Q_j *близки.* Тогда по лемме 4 одна из частей $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ пуста, то есть, множество ее вершин совпадает с $Q_{i,j}$. Пусть это часть $G_{i,j}$. Тогда $Q_{i,i+1} \subset Q_{i,j}$. Но $u \notin Q_{i,j}$, а один из лепестков Q_i и Q_{i+1} обязан содержать u. Противоречие.

Случай 2. *Лепестки Q_i и Q_j не близки.* Тогда по теореме 1 множество $Q_{i,j}$ отделяет $G_{i,j}$ от $G_{j,i}$. Но при этом вершина u есть и в той, и в другой части, а в $Q_{i,j}$ ее нет. Противоречие.

Значит, нет двух лепестков, не содержащих u. Заметим, однако, что любое множество $T \in \mathfrak{S}$ является множеством вида $Q_{i,j}$, где Q_i и Q_j – это два непересекающихся лепестка. В частности, в составе любого $T \in \mathfrak{S}$ есть лепесток, не содержащий u. Но у нас среди лепестков ромашки F найдется не более, чем один такой. Таким образом, он есть, и все множества из $\mathfrak{S}$ содержат его как один из двух образующих лепестков. Выберем любую вершину v этого лепестка и проведем для нее то же самое рассуждение. Получим, что найдется некий другой лепесток, который участвует в образовании всех множеств из $\mathfrak{S}$. Значит, набор $\mathfrak{S}$ состоит из одного множества. Противоречие. $\square$

Лемма 6. *Пусть два несоседних лепестка Q_i и Q_j обобщенной ромашки F пересекаются, причем именно часть $G_{i,j}$ является пустой. Тогда имеет место следующее включение множеств:*

$$Q_i \cap Q_{i+1} \supset Q_i \cap Q_{i+2} \supset \cdots \supset Q_i \cap Q_j.$$

Доказательство. Докажем, что для любого k от i до j есть включение $Q_k \supset Q_i \cap Q_j$. Пусть это не так. То есть нашлись такие вершина $u \in Q_i \cap Q_j$ и номер k от i до j, что $u \notin Q_k$. Рассмотрим произвольный лепесток Q_ℓ, для которого ℓ не равно ни одному из $i, i+1, \dots, j$. Докажем, что все такие лепестки содержат вершину u. Разберем два случая.

Случай 1. *Лепестки Q_ℓ и Q_k близки.* Тогда либо $Q_i \subset Q_{\ell,k}$ либо $Q_j \subset Q_{\ell,k}$. Так как $u \in Q_i \cap Q_j$, в любом случае получаем, что $u \in Q_{\ell,k}$. Но $u \notin Q_k$. Значит, $u \in Q_\ell$.

Случай 2. *Лепестки Q_ℓ и Q_k не близки.* Тогда по теореме 1 множество $Q_{\ell,k}$ отделяет $G_{\ell,k}$ от $G_{k,\ell}$. Но при этом вершина u есть и в той, и в другой части. Значит, она должна быть и в $Q_{\ell,k}$.

Теперь рассмотрим любое множество $T \in \mathfrak{S}$. Заметим, что максимум один из двух лепестков, образующих T, находится среди Q_i, Q_{i+1}, $\dots$, Q_j, так как любые два лепестка из этой группы пересекаются. Значит, для любого $T \in \mathfrak{S}$ найдется такое ℓ, не равное ни одному из i, $i+1$, $\dots$, j, что $Q_\ell \subset T$. Но мы доказали, что все такие лепестки содержат вершину u. Тогда и любое множество из набора $\mathfrak{S}$ содержит u. По лемме 5 получаем, что $u \in P$ и приходим к противоречию.

Итак, мы доказали, что для всех k от i до j есть включение $Q_k \supset Q_i \cap Q_j$. Значит, для всех k от i до j есть и включение $Q_i \cap Q_k \supset Q_i \cap Q_j$. Если лепестки Q_i и Q_{j-1} – соседние, то все уже доказано. Пусть нет. Заметим, что Q_{j-1} пересекается с Q_i, причем именно часть $G_{i,j-1}$ является пустой. Поэтому можно совершенно аналогично доказать, что для всех k от i до $j-1$ есть и включение $Q_i \cap Q_k \supset Q_i \cap Q_{j-1}$. И так далее. В итоге получим требуемое включение множеств. □

Следствие 2. *Если Q_j пересекается с Q_i, а $Q_{i+1}, \ldots, Q_{j-1} \subset Q_{i,j}$, то $Q_i \cap Q_{i+1} \cap \cdots \cap Q_j \neq \varnothing$.*

Лемма 7. *Для любого i найдется лепесток Q_j, не пересекающийся ни с Q_i, ни с Q_{i+1}.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Рассмотрим произвольный лепесток Q_j, где $j \neq i, i+1$, пересекающийся с Q_i. Тогда либо часть $G_{i,j}$, либо часть $G_{j,i}$ – малая по лемме 2. Но если мала часть $G_{i,j}$, то мала и часть $G_{i+1,j}$. Таким образом, если Q_j пересекается с Q_i то мала одна из частей $G_{j,i}$ и $G_{i+1,j}$. К тому же выводу приходим в случае, когда Q_j пересекается с Q_{i+1}. А так как мы предположили, что все лепестки пересекаются либо с Q_i либо с Q_{i+1}, получаем что для любого $j \neq i, i+1$ мала одна из частей $G_{j,i}$ (первый вариант) и $G_{i+1,j}$ (второй вариант). Заметим, что если для некоторого $x \neq i, i+1$ выполнен первый вариант, то и для всех y от x до $i-1$ выполнен первый вариант. Аналогично, если для какого-то x выполнен второй вариант, то и для всех y от $i+2$ до x выполнен второй вариант. Теперь рассмотрим два случая.

Случай 1. *Найдутся два лепестка, для одного из которых выполняется первый вариант, а для другого – второй.* Рассмотрим такое $x \neq i, i+1$, что для Q_x выполняется первый вариант, а для Q_{x-1} – второй. Ясно, что такое x найдется. Тогда все лепестки содержатся либо в части $G_{i+1,x-1}$, либо в части $G_{x,i}$. Так как эти части являются малыми, по следствию 2 все лепестки, лежащие в $G_{x,i}$, имеют общую вершину – пусть это будет вершина u, и все лепестки, лежащие в $G_{i+1,x-1}$, имеют общую вершину – пусть это будет вершина v. Значит, каждый лепесток нашей обобщенной ромашки содержит как минимум одну из вершин u и v. Рассмотрим произвольное множество $S = Q_{s,t}$ из набора, порождающего ромашку F. Ясно, что лепестки Q_s и Q_t не могут пересекаться, поэтому один из них содержит вершину u, а другой – вершину v. И так для произвольного множества из порождающего набора. Тогда все множества из набора, порождающего ромашку F, содержат вершины u и v. По лемме 5 приходим к противоречию.

Случай 2. Либо для всех лепестков выполняется первый вариант, либо для всех — второй. Пусть для всех $j \neq i, i+1$ часть $G_{i+1,j}$ является малой. Тогда часть $G_{i+1,i-1}$ мала, и все лепестки, кроме Q_i, лежат в ней. Значит, по следствию 2 все лепестки, кроме Q_i, имеют общую вершину – пусть это будет вершина u. Тогда все множества из набора, порождающего ромашку F, содержат эту вершину u, и по лемме 5 приходим к противоречию. □

Следствие 3. *Объединение двух соседних лепестков обобщенной ромашки не может содержать других лепестков.*

Доказательство. Пусть $Q_j \subset Q_{i,i+1}$. Ясно, что тогда лепесток Q_j пересекается с обоими лепестками Q_i и Q_{i+1}. Значит, одна из частей $G_{j,i+1}$ и $G_{i+1,j}$ пуста. Рассмотрим лепесток Q_ℓ, не пересекающийся ни с Q_i, ни с Q_{i+1}. Не умаляя общности, будем считать, что j от ℓ до i. Тогда по лемме 6, если пуста часть $G_{j,i+1}$, то все общие вершины лепестков Q_j и Q_{i+1} содержатся в Q_i, а если пуста часть $G_{i+1,j}$, то все эти вершины содержатся в Q_ℓ. Значит, так как лепестки Q_{i+1} и Q_ℓ не пересекаются, есть включение $Q_j \cap Q_{i+1} \subset Q_i \cap Q_{i+1}$. При этом $Q_j \subset Q_i \cup Q_{i+1}$. Тогда $Q_j \subset Q_i$. Противоречие с пунктом 1 леммы 2. □

Введем определение *множества вершин ромашки* и *максимальной ромашки*, которые нам пригодятся в дальнейшем.

Определение 10. Множеством вершин ромашки *назовем множество $V(F)$, состоящее из всех вершин графа, лежащих в центре или хотя бы в одном ее лепестке. Будем говорить, что ромашка F содержит ромашку F', если у них общий центр и $V(F') \subset V(F)$. Назовем ромашку F максимальной, если все ромашки, в которых она содержится, имеют то же множество вершин, и лепестков в них не больше, чем в F.*

Лемма 8. *Для обобщенной ромашки $F = (P; Q_1, \dots, Q_m)$ выполняются следующие утверждения.*

1) *Пусть Q_i и Q_j – это два таких ее различных лепестка, что $i \neq j-1$. Тогда если хотя бы одна из частей $G_{i,j-1}$ или $G_{i+1,j}$ непуста, то граф $G(\mathrm{Int}(G_{i,j}))$ связен и непуст.*

2) *Пусть* Q_i *и* Q_j *– это два таких ее различных лепестка, что* $i \neq j-1$. *Тогда если граф* $G(\mathrm{Int}(G_{i,j}))$ *несвязен, то в* $\mathrm{Int}(G_{i,j})$ *вершин не больше, чем в лепестке ромашки* F.

3) *Если* Q_i *и* Q_j *– это два не соседних, но близких лепестка, то* $Q_{i,j}$ *не является разделяющим множеством.*

4) *Множество* $Q_{i,i+1}$ *не разделяет множество* $V(F)$.

Доказательство. 1) Предположим, что одна из частей $G_{i,j-1}$ и $G_{i+1,j}$ непуста. Не умаляя общности, это $G_{i,j-1}$. Тогда в ее внутренности найдется некоторая вершина v. Обозначим через u произвольную вершину лепестка Q_{j-1}, не лежащую в Q_j. Заметим, что если $Q_{i,j}$ не является разделяющим множеством, то по теореме 1 лепестки Q_i и Q_j близки, и либо часть $G_{i,j}$ пуста (что невозможно, так как часть $G_{i,j-1}$ непуста), либо часть $G_{j,i}$ пуста, и тогда $G(\mathrm{Int}(G_{i,j})) = G - Q_{i,j}$ (а этот граф связен, поскольку $Q_{i,j} \notin \mathfrak{R}_k(G)$). Считаем, что множество $Q_{i,j}$ все же является разделяющим. Тогда Q_i не пересекается с Q_j. А из этого следует, что $Q_{i,j-1} \in \mathfrak{R}_k(G)$, так как обе части $G_{i,j-1}$ и $G_{j-1,i}$ непусты. Обозначим через H_1 подграф $G_{i,j-1} - Q_{i,j}$, а через H_2 – $G(\mathrm{Int}(G_{j-1,j}) \cup \{u\})$.

Заметим, что H_1 связен, так как для каждой вершины x из $Q_{i,j-1}$ и каждой из частей разбиения $\mathrm{Part}(Q_{i,j-1})$ найдется вершина, содержащаяся во внутренности этой части и смежная с x, и при этом в H_1 есть вершины u и v. Теперь убедимся в том, что и H_2 связен. Заметим, что если часть $G_{j-1,j}$ пуста, то H_2 состоит из единственной вершины u, и утверждение очевидно. Ну а если эта часть непуста, то вершина u смежна хотя бы с одной вершиной каждой из компонент связности графа $G - Q_{j-1,j}$, что гарантирует связность H_2.

Остается заметить, что

$$\mathrm{V}(\mathrm{Int}(G_{i,j})) = \mathrm{V}(H_1) \cup \mathrm{V}(H_2),$$

причем $\mathrm{V}(H_1) \cap \mathrm{V}(H_2) \neq \varnothing$, так как в обоих подграфах есть вершина u.

2) Предположим, что граф $G(\mathrm{Int}(G_{i,j}))$ несвязен. По предыдущей части леммы получим, что обе части $G_{i,j-1}$ и $G_{i+1,j}$ пусты. Значит, $\mathrm{Int}(G_{i,j}) = (Q_{i+1} \cup Q_{j-1}) \setminus Q_{i,j}$. Но ясно, что $Q_{j-1} \subset \mathrm{V}(G_{i+1,j}) = Q_{i+1,j}$. Поэтому $\mathrm{Int}(G_{i,j}) = Q_{i+1} \setminus Q_{i,j}$. А тогда в $\mathrm{Int}(G_{i,j})$ вершин не больше, чем в лепестке ромашки F.

3) По части 2) леммы 4 одна из частей $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ пуста. Не умаляя общности, допустим, что это $G_{j,i}$. Тогда $G - Q_{i,j} = \mathrm{Int}(G_{i,j})$. Предположим, что $Q_{i,j}$ все же является разделяющим. Значит, граф $G(\mathrm{Int}(G_{i,j}))$

несвязен. Поэтому из первой части этой леммы следует, что обе части $G_{i,j-1}$ и $G_{i+1,j}$ пусты. Но тогда $\mathrm{Int}(G_{i,j}) \subset Q_{i+1}$, из чего следует, что в графе G слишком мало вершин (то есть меньше, чем $2k - |P|$). Противоречие.

4) Заметим, что любое множество из набора, порождающего ромашку, лежит либо в $G_{i+2,i}$, либо в $G_{i+1,i-1}$. Предположим, что обе эти части пусты. Тогда порождающих множества всего два, и они являются границами этих частей. Но они, очевидно, пересекаются по вершинам, не содержащимся в центре (часть $G_{i+2,i}$ пуста, и лепесток Q_{i+1} лежит в ней). Противоречие с леммой 5.

Поэтому обе эти части не могут быть пусты. Значит по первому пункту этой леммы, примененному к лепесткам Q_{i+1} и Q_i (именно в таком порядке) получаем, что граф $G(\mathrm{Int}(G_{i+1,i}))$ связен. Но, очевидно, имеет место включение $V(F) \subset \mathrm{Int}(G_{i+1,i}) \cup Q_{i,i+1}$. Значит, множество $Q_{i,i+1}$ не разделяет $V(F)$. □

Следствие 4. *Пусть $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ – обобщенная ромашка. Каждому множеству $Q_{i,j}$ из $\mathfrak{R}(F)$ мы поставим в соответствие обобщенное разбиение графа на части $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$. Тогда $\mathfrak{R}(F)$ с таким набором разбиений порождает F.*

Доказательство. Рассмотрим произвольный набор разделяющих множеств, порождающих F. Из части 3) леммы 8 следует, что каждое из множеств этого набора состоит из двух неблизких лепестков ромашки F. Тогда этот набор является подмножеством $\mathfrak{R}(F)$. Заметим, что добавление остальных внутренних множеств (не вошедших в этот набор) ничего испортить не может, потому что обобщенные части для каждого из множеств берутся такие, что каждая из частей разбиения графа ромашкой F лежит в одной из них. □

Следствие 5. *Пусть F и F' – это две обобщенные ромашки с одинаковыми по величине центрами, а разделяющее множество S является внутренним для обеих этих ромашек, причем в первом случае разбиение на обобщенные части согласовано с разбиением I, а во втором – с I'. Тогда разбиение графа G множеством S на обобщенные части, согласованное с I, совпадает с разбиением, согласованным с I'.*

Доказательство. Заметим, что если $|\operatorname{Part}(S)| = 2$, то утверждение тривиально. Теперь рассмотрим случай, когда $|\operatorname{Part}(S)| > 2$. По пункту 3 леммы 2, множество S разбивает граф G ровно на две обобщенные части и как внутреннее множество ромашки F, и как внутреннее множество ромашки F'. Пусть разбиения графа G множеством S на обобщенные части, согласованные с I – это A_1 и A_2, а согласованное с I' – это B_1 и B_2. Так как S разбивает граф G более, чем на две части, одна из обобщенных частей A_1 и A_2 не является настоящей частью разбиения графа множеством S. Не умаляя общности, это часть A_1. То есть подграф, индуцированный на внутренности этой части, несвязен. Тогда во внутренности A_1 по второму пункту леммы 8 вершин не больше, чем в лепестке F. Поэтому во внутренности A_2 – больше, чем в лепестке (иначе в графе будет слишком мало вершин). Рассуждая аналогично, получим, что если часть A_2 не является настоящей частью, то в ее внутренности вершин не больше, чем в лепестке F, что невозможно. Значит, обобщенная часть A_2 является настоящей частью разбиения графа множеством S. Тогда она обязана лежать в B_1 или в B_2. Не умаляя общности, считаем, что она лежит в B_2. Если $A_2 = B_2$, то $A_1 = B_1$, и нужное доказано. Предположим, что это не так, то есть в B_2 есть что-то еще кроме A_2. Но в таком случае внутренность обобщенной части B_2 несвязна, и по лемме 8 вершин в ней должно быть не больше, чем в лепестке F'. Ясно, что лепестки ромашек F и F' имеют один и тот же размер, так как их центры содержат одно и то же количество вершин. Но $\mathrm{V}(A_2) \supset \mathrm{V}(B_2)$, в A_2 вершин больше, чем в лепестке, а в B_2 – не больше. Противоречие. □

Следующая теорема очень похожа на соответствующую теорему из [4], только сформулирована для обобщенных ромашек. Доказательство почти то же самое, однако в нем используются доказанные ранее нетривиальные леммы, что делает его гораздо более сложным. Благодаря этой теореме станет корректно определено понятие разбиения графа ромашкой F.

Теорема 2 [4, теорема 7]**.** *Пусть наборы* $\mathfrak{S}, \mathfrak{T} \in \mathfrak{R}_k(G)$ *порождают обобщенные ромашки* F_S *и* F_T *соответственно с одинаковым центром и одинаковыми множествами лепестков. Тогда* $\operatorname{Part}(\mathfrak{S}) = \operatorname{Part}(\mathfrak{T})$ *и* $F_S = F_T$ *(то есть, циклические порядки лепестков в этих ромашках одинаковы).*

Доказательство. Пусть

$$F_S = (P; Q_1, \ldots, Q_m), \quad \text{а} \quad F_T = (P; Q'_1, \ldots, Q'_m).$$

Ясно, что $V(F_S) = V(F_T)$. Рассмотрим неблизкие лепестки Q_i и Q_j ромашки F_S. По теореме 1 знаем, что множество $Q_{i,j}$ является разделяющим, причем оно разделяет $V(F_S)$. Пусть в ромашке F_T это лепестки Q'_x и Q'_y. По пункту 3) леммы 8 получаем, что они являются либо соседними, либо неблизкими, а по пункту 4) той же леммы заключаем, что соседними они быть не могут. Таким образом мы доказали, что неблизкие лепестки одной ромашки являются неблизкими лепестками другой.

Тогда два соседних лепестка одной ромашки в другой является либо соседними, либо близкими, но не соседними. Но в объединении двух соседних лепестков по следствию 3 не может содержаться других лепестков, поэтому второй вариант исключается. Значит, соседние лепестки одной ромашки являются соседними и в другой. Тогда циклические порядки лепестков в наших ромашках одинаковы. Применим следствие 4 и получим, что $\mathrm{Part}(\mathfrak{S}) = \mathrm{Part}(\mathfrak{T})$. $\square$

Лемма 9. *Пусть F – обобщенная ромашка, а Q_i и Q_j – это два ее различных лепестка. Рассмотрим множество $T \subset Q_{i,j}$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Если часть $G_{i,j}$ непуста, а $T \neq Q_{i,j}$, то граф $G_{i,j} - T$ связен.*

2) *Если $T = P \cup Q_i \cup (Q_j \setminus \{u\})$, где $u \in Q_j$, то граф $G_{i,j} - T$ является либо пустым, либо связным.*

Доказательство. 1) Заметим, что если часть $G_{j,i}$ пуста, то граф $G_{i,j} - T$ совпадает с графом $G - T$, который связен, так как сам граф G является k-связным, а в множестве T менее k вершин. Значит, можно считать, что часть $G_{j,i}$ непуста. Тогда множество $Q_{i,j}$ является k-разделяющим и разбивает граф на обобщенные части $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$. Заметим, что каждая из вершин множества $Q_{i,j}$ должна быть смежна хотя бы с одной из вершин каждой из компонент связности графа $G - Q_{i,j}$. Поэтому, так как T лежит в $Q_{i,j}$, но содержит не все его вершины, граф $G_{i,j} - T$ связен.

2) Нам важно, пусты или нет части $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$, поэтому удобно разобрать несколько случаев.

Случай 1. *Часть $G_{i,j}$ пуста.* Тогда либо граф $G_{i,j} - T$ пуст, если $u \in Q_i$, либо в нем всего одна вершина и он, очевидно, связен.

Случай 2. *Часть $G_{j,i}$ пуста.* В этом случае граф $G_{i,j} - T$ совпадает с графом $G - T$, который связен, так как сам граф G является k-связным, а в множестве T менее k вершин.
Случай 3. *Части $G_{i,j}$ и $G_{j,i}$ непусты.* Тогда лепестки Q_i и Q_j не пересекаются, и, в частности, $u \notin Q_i$. Значит, множество $T \neq Q_{i,j}$, и можно применить утверждение предыдущего пункта. □

Определение 11. *Для произвольных двух множеств вершин A и B графа G через $E(A, B)$ будем обозначать множество ребер этого графа, соединяющих вершины из A с вершинами из B.*

Лемма 10. *Пусть $F = (P; Q_1, \ldots, Q_m)$ – это обобщенная ромашка, а Q_i и Q_j – это два ее различных лепестка, причем $i \neq j - 1$. Рассмотрим произвольное k от i до j, исключая i и j. Предположим, что $Q_i \not\subset Q_{j,k}$ и $Q_j \not\subset Q_{i,k}$. Тогда множество $Q_k \cup (Q_i \cap Q_j)$ отделяет $\mathrm{V}(G_{i,k})$ от $\mathrm{V}(G_{k,j})$ в подграфе $G_{i,j} - \mathrm{E}(Q_i, Q_j) - P$.*

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы не выполнено. Пусть, кроме того, лепестки Q_i и Q_j не пересекаются. Тогда либо найдется вершина v, лежащая в обеих этих частях, но не лежащая ни в центре, ни в лепестке Q_k, либо найдутся такие две смежные вершины u и v, не лежащие ни в центре, ни в лепестке Q_k, что $u \in \mathrm{V}(G_{i,k})$, а $v \in \mathrm{V}(G_{k,j})$, причем одна из них не лежит в $Q_{i,j}$.
Случай 1. *Существует вершина v, лежащая в $\mathrm{V}(G_{i,k})$ и в $\mathrm{V}(G_{k,j})$, но не лежащая ни в центре, ни в лепестке Q_k.* Из определения ромашки следует, что эта вершина v обязана быть вершиной нашей ромашки, и найдутся такие лепестки Q_x и Q_y, содержащие ее, что x от i до k, а y от k до j. Тогда одна из частей $G_{x,y}$ и $G_{y,x}$ является пустой. Значит, по лемме 6 либо Q_k содержит v, либо оба лепестка Q_i и Q_j содержат ее. Так как последнее невозможно, получаем, что пересечение любых двух таких лепестков содержится в Q_k. Противоречие.
Случай 2. *Существуют такие две смежные вершины u и v, не лежащие ни в центре, ни в лепестке Q_k, что $u \in \mathrm{V}(G_{i,k})$, а $v \in \mathrm{V}(G_{k,j})$, причем одна из них не лежит в $Q_{i,j}$.* Рассмотрим часть разбиения графа G ромашкой F, содержащую u и v (такая, очевидно, есть). Пусть это $G_{\ell,\ell+1}$. Заметим, что ℓ от i до $j-1$, так как иначе обе вершины u и v обязаны быть вершинами подграфа $G_{j,i}$, а это не так. Ясно, что ℓ либо от i до $k-1$, либо от k до $j-1$. Не умаляя общности, будем

считать, что ℓ от i до $k-1$. Тогда v является одновременно вершиной $G_{i,k}$ и $G_{k,j}$. Значит, по первому случаю, вершина v должна лежать либо в Q_k, либо в центре ромашки F. Противоречие.

Таким образом, осталось доказать утверждение для пересекающихся лепестков Q_i и Q_j. Рассуждаем так же, как и раньше, разбираем те же два случая. В первом получаем, что все общие вершины $\mathrm{V}(G_{i,k})$ и $\mathrm{V}(G_{k,j})$ на этот раз лежат в $Q_k \cup (Q_i \cap Q_j)$, а во втором случае вообще ничего не меняется. Остается заметить, что от $\mathrm{V}(G_{i,k})$ и $\mathrm{V}(G_{k,j})$ что-то останется после удаления $Q_k \cup (Q_i \cap Q_j)$, потому что от первого из этих множеств останется как минимум одна вершина лепестка Q_i, а от второго – как минимум одна вершина лепестка Q_j, иначе $Q_i \subset Q_{j,k}$ или $Q_j \subset Q_{i,k}$. □

Лемма 11. *Пусть F – обобщенная ромашка, а Q_i и Q_j – это два ее различных лепестка. Рассмотрим множество S, которое не содержит ни одной вершины из части $G_{i,j}$ кроме, возможно, некоторых вершин лепестка Q_j. Тогда множество S не отделяет Q_i от Q_j в $G_{i,j} - P$.*

Доказательство. Очевидно, можно считать, что $S \subset Q_j$, так как вершины множества S, не лежащие в части $G_{i,j}$, нам не мешают. Заметим, что если $S = Q_j$, то утверждение очевидно. Поэтому далее будем считать, что это не так. Ясно, что можно ограничиться случаем $S = Q_j \setminus \{v\}$, где v – произвольная вершина лепестка Q_j.

Случай 1. *Часть $G_{j,i}$ не является малой.* Будем доказывать требуемое утверждение по индукции по количеству лепестков в части $G_{i,j}$ в предположении того, что часть $G_{j,i}$ не является малой. В качестве базы рассмотрим случай $j = i + 1$. Если $v \in Q_i$, то утверждение очевидно. Предположим теперь, что $v \notin Q_i$. Заметим, что по лемме 5 обязательно найдется множество из набора, порождающего ромашку, не содержащее вершину v. Пусть это множество $Q_{x,y}$. Очевидно, оба множества Q_x и Q_y не могут содержать $Q_i \setminus Q_{i+1}$, так как они не могут пересекаться. Не умаляя общности, считаем, что $Q_x \not\supset Q_i \setminus Q_{i+1}$. Тогда $Q_i \not\subset Q_{x,i+1}$. Кроме того, $Q_{i+1} \not\subset Q_{x,i}$, так как в множестве $Q_{x,i}$ точно нет вершины v. Значит, можно применить лемму 10 к лепесткам Q_{i+1}, Q_i и Q_x. Получаем, что $Q_x \cup (Q_i \cap Q_{i+1})$ отделяет $\mathrm{V}(G_{i+1,x})$ от $\mathrm{V}(G_{x,i})$ в $G_{i+1,i} - \mathrm{E}(Q_i, Q_{i+1}) - P$. Теперь удалим из графа G множество $T = Q_{x,i+1} \setminus \{v\}$. Ясно, что оно содержит в себе множество $P \cup Q_x \cup (Q_i \cap Q_{i+1})$, но не содержит целиком ни Q_i, ни Q_{i+1}, поэтому отделяет $\mathrm{V}(G_{i+1,x})$ от $\mathrm{V}(G_{x,i})$ в $G_{i+1,i} - \mathrm{E}(Q_i, Q_{i+1})$. В частности, отделяет v от Q_i в этом подграфе. Однако, множество T не может быть разделяющим в G, так как в нем не более, чем $k-1$ вершина. Значит, от Q_i до v есть путь в $G_{i,i+1} - (Q_{i+1} \setminus \{v\})$. А это как раз то, что мы хотели доказать.

Теперь докажем переход. Рассмотрим произвольные i и j. Знаем, что множество $S \subset Q_j$. Поэтому $S \cap \mathrm{V}(G_{i,j-1}) \subset Q_j \cap \mathrm{V}(G_{i,j-1})$. Кроме того, есть включение $Q_j \subset \mathrm{V}(G_{j-1,i})$, причем, так как часть $G_{j,i}$ не является малой, по лемме 6 знаем, что $Q_i \cap Q_j \subset Q_{j-1}$. Но по девятому пункту леммы 2 все общие вершины Q_j и $\mathrm{V}(G_{i,j-1})$ содержатся в $Q_i \cup Q_{j-1}$. Значит, получается, что $Q_j \cap \mathrm{V}(G_{i,j-1}) \subset Q_{j-1}$. Тогда все общие вершины S и $\mathrm{V}(G_{i,j-1})$ содержатся в лепестке Q_{j-1}. Применим доказанное утверждение для Q_{j-1} и Q_j и получим, что найдется вершина v', связанная с v в $G_{j-1,j} - P - S$. Рассмотрим $S' = S \cup (Q_{j-1} \setminus \{v'\})$. Ясно, что все вершины множества S_1, содержащиеся в части $G_{i,j-1}$, содержатся в лепестке Q_{j-1}. Применим индукционное предположение для множества S' и лепестков Q_i и Q_{j-1} и получим, что S' не отделяет Q_i от Q_{j-1} в $G_{i,j-1} - P$, то есть найдется вершина $u \in Q_i$, связанная с v' в $G_{i,j-1} - P - S'$. Так как $S \subset S'$ вершины u и v' связаны и в $G_{i,j-1} - P - S$. Тогда вершины u и v связаны в $G_{i,j} - P - S$, то есть множество S не отделяет Q_i от Q_j в $G_{i,j} - P$.
Случай 2. *Часть $G_{j,i}$ является малой.* Заметим, что в этом случае $G = G_{i,j}$, и нужное утверждение очевидно следует просто из k-связности графа G. □

2. Ромашки в четырехсвязном графе

Теперь вернемся к случаю четырехсвязного графа, то есть $k = 4$. Заметим, что центр ромашки в этом случае состоит либо из двух вершин, либо из нуля вершин.

Определение 12. *Ромашки с центром, состоящим из двух вершин, мы будем называть* 2-*ромашками, а ромашки с пустым центром –* 0-*ромашками.*

2.1. 2-Ромашки. Ромашки с центром, состоящим из двух вершин, очень похожи на ромашки в трехсвязном графе (см. [3]). Причина кроется в том, что при удалении одной из вершин центра 2-ромашки граф становится трехсвязным, а наша ромашка становится ромашкой в нем. Для удобства будем обозначать лепестки не множествами Q_i, а вершинами q_i, где $Q_i = \{q_i\}$. Вершины центра P обозначим через p_1 и p_2.

В следующей лемме мы покажем, что обобщенные и обычные 2-ромашки — это одно и то же, причем все 2-ромашки являются правильными. Заметим сразу же, что из первой ее части будет следовать, что в данном случае $\mathfrak{R}(F)$ – это набор разделяющих множеств, состоящий из множеств $Q_{i,j}$ для всех пар различных несоседних в циклическом порядке индексов i и j.

Лемма 12. 1) *В случае 2-ромашки соседние и близкие лепестки – это одно и то же.*

2) *Утверждение леммы 8 в данном случае можно усилить – для любых двух несоседних в циклическом порядке индексов i, j получается, что* $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

3) *Все обобщенные 2-ромашки являются правильными 2-ромашками.*

Доказательство. 1) Очевидно, так как все лепестки состоят из одной вершины, и если какой-то содержится в объединении других, то он обязан совпадать с одним из них.

2) Если хотя бы одна из частей $G_{i+1,j}$ и $G_{i,j-1}$ непуста, то можно воспользоваться леммой 8. Предположим, что обе они пусты. Тогда $j = i + 2$, и в $\mathrm{Int}(G_{i,j})$ есть ровно одна вершина – q_{i+1}. Таким образом $G_{i,j} \in \mathrm{Part}(Q_{i,j})$. Аналогично $G_{j,i} \in \mathrm{Part}(Q_{i,j})$.

3) Непосредственно следует из пункта 2) и определения обобщенной ромашки, в котором сказано, что все разделяющие множества, порождающие ромашку, должны состоять из несоседних лепестков. При этом лепестки 2-ромашки пересекаться не могут, так как состоят из одной вершины. □

Следующее замечание (и его доказательство) совершенно аналогично замечанию 2 из [3].

Замечание 5. 1) Если часть $G_{i,i+1}$ пуста, то вершины q_i и q_{i+1} смежны.

2) Если обе части $G_{i-1,i}$ и $G_{i,i+1}$ пусты, то вершина q_i смежна в графе G с вершинами $p_1, p_2, q_{i-1}, q_{i+1}$ и только с ними.

Следствие 6. *Если граф зависимости набора* $\{S_1, S_2, \dots, S_n\} \subset \mathfrak{R}_4(G)$ *связен и* $|\bigcap_{i=1}^n S_i| \geq 2$, *то этот набор порождает 2-ромашку.*

Данное следствие совершенно аналогично следствию 4 из [3], а следующая лемма доказывается так же, как лемма 4 из [3].

Лемма 13. *Пусть $F = (P; q_1, \dots, q_m)$ – максимальная 2-ромашка. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) *Не существует множества $T \in \mathfrak{R}_4(G) \setminus \mathfrak{R}(F)$, содержащего P и зависимого хотя бы с одним из внутренних множеств ромашки F.*

2) *Для любой вершины $v \in \mathrm{Int}(G_{i,i+1})$ существует путь из q_i в q_{i+1}, не проходящий через v, внутренние вершины которого лежат в $\mathrm{Int}(G_{i,i+1})$.*

Замечание 6 [3, замечание 3]**.** 1) По набору $\mathfrak{R}(F)$ нетрудно восстановить центр и лепестки ромашки F.

2) Нетрудно понять, что ромашка F содержит ромашку F' тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}(F) \subset \mathfrak{R}(F')$.

3) Из пункта 1 леммы 13 легко следует, что каждая 2-ромашка содержится в единственной максимальной.

Теорема 3. *Любое 4-разделяющее множество, содержащееся в множестве вершин максимальной 2-ромашки, содержит ее центр, то есть является либо ее внутренним множеством, либо границей.*

Доказательство. Пусть F – 2-ромашка, а S – 4-разделяющее множество, содержащееся в множестве вершин F. Предположим, что S не является ни внутренним множеством F, ни ее границей. Обозначим через P центр F и разберем два возможных случая расположения S.
Случай 1. $S \cap P = \varnothing$. Тогда S состоит из четырех вершин, являющихся лепестками F. Пусть $F = (P; q_1, \dots, q_m)$, где $S = \{q_1, q_i, q_j, q_k\}$, причем i от 2 до $j-1$, а k от $j+1$ до m. Заметим, что граница части $G_{1,i}$ состоит из четырех вершин, поэтому по лемме 9, если эта часть непуста, то граф $G_{1,i} - S$ – связен. Кроме того, если она все же пуста, то после удаления S от нее останется только $G(P)$. Аналогично для частей $G_{i,j}$, $G_{j,k}$ и $G_{k,1}$. Так как минимум одна из четырех частей все же непуста (иначе в графе слишком мало вершин), получаем, что в графе $G - S$ две вершины центра связаны. Значит, и весь граф $G - S$ связен. Противоречие.
Случай 2. $S \cap P \neq \varnothing$. Если $S \supset P$, то все уже доказано. Пусть $|S \cap P| = 1$. Обозначим эту вершину в пересечении через p. Теперь выкинем из нашего графа эту вершину p. Заметим, что получится трехсвязный граф. Наша 2-ромашка F превратится в ромашку в этом графе, а множество $S \setminus \{p\}$ будет состоять из трех лепестков. Но тогда это множество не будет разделяющим в $G - p$ [3, лемма 10]. Значит, и множество S не является разделяющим в G. □

2.2. 0-Ромашки. Теперь займемся анализом ромашек с пустым центром. К сожалению, максимальная 0-ромашка, содержащая данную, может быть не единственной. Наша цель – описать эту неединственность и выяснить, какие разделяющие множества могут быть зависимы с множествами из $\mathfrak{R}(F)$ для 0-ромашки F. Для начала поймем, что означают общие утверждения про ромашки в k-связном графе в нашем конкретном случае 0-ромашек.

Лемма 14. *Для обобщенной 0-ромашки $F = (Q_1, \dots, Q_m)$ выполняются следующие утверждения.*

1) *Пересекаться могут только соседние лепестки. В частности, никакая вершина графа G не лежит сразу в трех лепестках ромашки F. Причем, если лепестки Q_i и Q_{i+1} пересекаются, то две их необщие вершины смежны.*

2) *Два лепестка являются близкими тогда и только тогда, когда они являются соседними или между ними (с какой-то из сторон) лежит ровно один лепесток, который при этом содержится в их объединении.*

3) *Если $j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$, то $Q_{i,j}$ является внутренним множеством ромашки F, причем $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.*

4) *Если множество $Q_{i,i+2}$ является разделяющим, то либо $G_{i,i+2} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+2})$, либо обе части $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$ пусты, и внутренность $G_{i,i+2}$ состоит из двух несмежных вершин, образующих лепесток Q_{i+1}.*

5) *Если множество $Q_{i,i+2}$ является разделяющим, то либо $G_{i+2,i} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+2})$, либо в F всего четыре лепестка, обе части $G_{i+2,i+3}$ и $G_{i+3,i}$ пусты, и внутренность $G_{i+2,i}$ состоит из двух несмежных вершин, образующих лепесток Q_{i+3}.*

Доказательство. 1) Рассмотрим два пересекающихся лепестка Q_i и Q_j. Пусть их общая вершина – это вершина v. Тогда либо часть $G_{i,j}$, либо часть $G_{j,i}$ является малой. Не умаляя общности, считаем, что это $G_{i,j}$. Значит, она состоит из вершины v и двух других вершин лепестков Q_i и Q_j. Предположим, что $j \neq i+1$. Рассмотрим лепесток Q_{i+1}. Он по пункту 8 леммы 2 должен содержать вершину v. Но так как он лежит в части $G_{i,j}$, в таком случае он будет совпадать либо с Q_i, либо с Q_j. Противоречие.

Пусть лепестки Q_i и Q_{i+1} пересекаются. Обозначим их вершины через x, y, z, где $Q_i = \{x, y\}$, а $Q_{i+1} = \{y, z\}$. Ясно, что часть $G_{i,i+1}$ – это $G(\{x, y, z\})$. По лемме 11 множество $\{y\}$ не разделяет Q_i и Q_{i+1} в $G_{i,i+1}$. Поэтому вершины x и z обязаны быть соединены ребром.

2) Рассмотрим два близких, но не соседних лепестка Q_i и Q_j. Тогда все лепестки, лежащие между ними с одной из сторон, содержатся в $Q_{i,j}$. Считаем, что это лепестки с номерами от i до j. Рассмотрим лепесток Q_{i+1}. Он содержится в $Q_{i,j}$ и поэтому пересекается и с Q_i, и с Q_j. Тогда по первому пункту лепестки Q_{i+1} и Q_j являются соседними. Значит, обязательно $j = i + 2$.

3) По определению внутренними множествами (обобщенной) ромашки называются множества вида $Q_{i,j}$, где лепестки Q_i и Q_j не близки. По предыдущему пункту близкими лепестками 0-ромашки могут являться только лепестки, между которыми с одной из сторон не более одного лепестка. Значит, если $j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$, множество $Q_{i,j}$ является внутренним множеством ромашки F.

Заметим, что по лемме 8 либо граф $G(\mathrm{Int}(G_{i,j}))$ связен, и тогда $G_{i,j} \in \mathrm{Part}(Q_{i,j})$, либо обе части $G_{i,j-1}$ и $G_{i+1,j}$ пусты. Докажем, что если $j \notin \{i-2, i-1, i, i+1, i+2\}$, то граф $G(\mathrm{Int}(G_{i,j}))$ связен. Пусть это не так. Тогда в нем есть хотя бы две вершины. Но по лемме 8 обе части $G_{i,j-1}$ и $G_{i+1,j}$ должны быть пусты. Из пустоты части $G_{i,j-1}$ следует, что все вершины из $\mathrm{Int}(G_{i,j})$ должны лежать в Q_{j-1}. Так как в $\mathrm{Int}(G_{i,j})$ не менее двух вершин, а в Q_{j-1} ровно две, получаем что эти два множества совпадают. Аналогично, $\mathrm{Int}(G_{i,j}) = Q_{i+1}$. То есть лепестки Q_{j-1} и Q_{i+1} совпадают. Но тогда $j = i + 2$. Противоречие.

Таким образом, доказали, что $G_{i,j} \in \mathrm{Part}(Q_{i,j})$. Аналогично получаем, что $G_{j,i} \in \mathrm{Part}(Q_{i,j})$. Тогда, очевидно, $\mathrm{Part}(Q_{i,j}) = \{G_{i,j}, G_{j,i}\}$.

4) По лемме 8 получаем, что лепестки Q_i и Q_{i+2} не являются близкими, причем либо $G_{i,i+2} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+2})$, либо обе части $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$ пусты. Предположим, что $G_{i,i+2} \notin \mathrm{Part}(Q_{i,i+2})$. Тогда в $\mathrm{Int}(G_{i,i+2})$ должно быть хотя бы две вершины, и обе части $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$ пусты. Из пустоты частей $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$ получаем, что лепесток Q_{i+1} содержит $\mathrm{Int}(G_{i,i+2})$. Но в Q_{i+1} ровно две вершины, а в $\mathrm{Int}(G_{i,i+2})$ не менее двух. Значит, $\mathrm{Int}(G_{i,i+2}) = Q_{i+1}$. Из несвязности $G(\mathrm{Int}(G_{i,i+2}))$ получаем, что вершины лепестка Q_{i+1} несмежны.

5) В этом случае $Q_{i,i+2}$ по лемме 8 – это внутреннее множество ромашки F. Заметим, что в части 3 текущей леммы при доказательстве того, что $G_{i,j} \in \mathrm{Part}(Q_{i,j})$, мы пользовались лишь наличием в части $G_{i,j}$ как минимум двух лепестков (кроме Q_i и Q_j) и, разумеется, тем, что множество $Q_{i,j}$ является внутренним. Поэтому если в части $G_{i+2,i}$ есть хотя бы два лепестка кроме Q_i и Q_{i+2}, то рассуждая так же, как в части 3 этой леммы, получим, что $G_{i+2,i} \in \mathrm{Part}(Q_{i,i+2})$.

Предположим, что это не так, то есть в части $G_{i+2,i}$ лежит всего один лепесток. Тогда $i+2+2=i$, и в ромашке ровно 4 лепестка. Применяя предыдущий пункт нашей леммы к индексам $i+2$ и $i+4$, получаем требуемое. $\square$

Определение 13. *Назовем лепесток 0-ромашки переключателем, если он состоит из двух несмежных вершин и лежит в объединении двух соседних с ним лепестков. Если лепесток Q_i 0-ромашки $F=(Q_1,\dots,Q_m)$ является переключателем, то переключением Q_i назовем замену Q_i на $Q'_i=(Q_{i-1}\cup Q_{i+1})\setminus Q_i$.*

Лемма 15. *Пусть лепесток Q_i является переключателем обобщенной 0-ромашки $F=(Q_1,\dots,Q_m)$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) *Лепестки Q_{i-1} и Q_{i+1} пересекаются только с лепестком Q_i.*

2) *Лепестки Q_{i-2}, Q_{i-1}, Q_{i+1} и Q_{i+2} не являются переключателями.*

3) *После переключения Q_i получается 0-ромашка.*

4) *Множество переключателей в ромашке, получающейся после переключения Q_i, отличается от множества переключателей исходной заменой Q_i на Q'_i.*

Доказательство. 1) Докажем, что лепесток Q_{i-1} не пересекается с отличными от Q_i лепестками, для лепестка Q_{i+1} все будет совершенно аналогично. Предположим, что Q_{i-1} пересекается еще с каким-то лепестком. По лемме 14 это обязательно лепесток Q_{i-2}. Пусть вершина x лежит в лепестках Q_{i-2} и Q_{i-1}, а y – это вторая вершина лепестка Q_{i-1}. По той же лемме 14, лепесток Q_i не содержит вершину x. Значит, в нем лежит вершина y. Пусть вторая его вершина – это z. Ясно, что лепестки Q_{i-2} и Q_{i+1} не являются соседними, так как иначе нет лепестка, не близкого к Q_{i-1}, что невозможно по пунктам 6 и 7 леммы 2. С другой стороны, часть $G_{i+1,i-2}$ непуста, так как иначе в графе G было бы всего пять вершин. Значит, лепестки Q_{i-2} и Q_{i+1} не близки, и по теореме 1 множество $Q_{i-2,i+1}$ отделяет вершину y от остального графа. То есть вершина y смежна только с вершинами из множества $Q_{i-2,i+1}$, в котором всего четыре вершины. Но вершины y и z не смежны по определению переключателя. Поэтому степень y не более трех. Противоречие.

2) Утверждение следует из предыдущего пункта и того, что переключатели по определению должны пересекаться с обоими соседними лепестками.

3) Пусть $Q_i = \{x,y\}$, $Q_{i-1} = \{x,u\}$, $Q_{i+1} = \{y,v\}$. Докажем, что если Q_j и Q_i не близки, то множество $S_j = Q_j \cup \{u,v\}$ является разделяющим, причем отделяет $A_j = (\mathrm{V}(G_{i,j}) \cup \{u\}) \setminus \{x\}$ от $B_j = (\mathrm{V}(G_{j,i}) \cup \{v\}) \setminus \{y\}$.

Предположим, что нашлось j, для которого это не так. Тогда либо A_j и B_j имеют общую вершину, не лежащую в S_j, либо есть две смежные вершины $a,b \notin S_j$, где $a \in A_j$, а $b \in B_j$.

Случай 1. *A_j и B_j имеют общую вершину, не лежащую в S_j.* Заметим, что множество $Q_{i,j}$ отделяет $\mathrm{V}(G_{i,j})$ от $\mathrm{V}(G_{j,i})$, поэтому в их пересечении только вершины из $Q_{i,j}$. Значит, в пересечении A_j и B_j только вершины из S_j.

Случай 2. *Есть две смежные вершины $a,b \notin S_j$, где $a \in A_j$, $b \in B_j$.* Заметим, что $a,b \notin \{u,v\}$, так как обе вершины u и v есть в S_j. Тогда $a \in \mathrm{V}(G_{i,j})$ и $b \in \mathrm{V}(G_{j,i})$. Теперь вспомним о том, что множество $Q_{i,j}$ отделяет $\mathrm{V}(G_{i,j})$ от $\mathrm{V}(G_{j,i})$. Поэтому, если $a,b \notin Q_{i,j}$, то они не могут быть смежны. Но ни одна из a и b точно не лежит в Q_j. К тому же, $a \neq x$ и $b \neq y$, так как $x \notin A_j$, а $y \notin B_j$. Значит, либо $a = y$, либо $b = x$. Не умаляя общности, считаем, что $a = y$. Так как $b \neq v$, получаем, что $b \in \mathrm{V}(G_{j,i-1})$. По лемме 10 лепесток Q_{i-1} отделяет $\mathrm{V}(G_{j,i-1})$ от $\mathrm{V}(G_{i-1,i})$ в графе $G_{j,i} - \mathrm{E}(Q_i, Q_j)$. В частности, из этого следует, что все вершины из $\mathrm{V}(G_{j,i-1})$, с которыми смежна вершина y, лежат в $Q_{i-1,j}$. Значит, вершина b лежит в $Q_{i-1,j}$. Но в то же время $b \notin S_j$. Поэтому обязательно $b = x$. Теперь вспомним о том, что $a = y$, и получим, что вершины x и y смежны. А по определению переключателя это не так. Противоречие.

Теперь рассмотрим набор $\mathfrak{S}$, порождающий ромашку F. По определению все множества в $\mathfrak{S}$ представляются в виде $Q_{s,t}$, и обобщенные части, на которые такое множество делит G – это $G_{s,t}$ и $G_{t,s}$. Выберем из нашего набора множества вида $Q_{i,j}$ и заменим на S_j с обобщенными частями A_j и B_j. Получим набор $\mathfrak{S}'$. Докажем, что этот набор порождает ромашку $F' = (Q_1, \ldots, Q_{i-1}, Q'_i, Q_{i+1}, \ldots, Q_m)$, где $Q'_i = \{u,v\}$.

Для этого заметим, что во всех разделяющих множествах из набора $\mathfrak{S}$, не содержащих Q_i, содержатся либо обе вершины u и x, либо ни одной из них. При этом обобщенные части, на которые эти множества разбивают граф G, тоже либо содержат целиком лепесток Q_{i-1}, либо не пересекаются с ним. И то же утверждение верно для вершин v и y. Все эти разделяющие множества мы не меняем – то есть они есть и в $\mathfrak{S}'$, причем с теми же обобщенными частями. Теперь рассмотрим множества вида $Q_{i,j}$, имеющиеся в наборе $\mathfrak{S}$. Мы их заменяем на множества S_j, то есть вершину x заменяем на u, а y – на v. С обобщенными частями происходит то же самое – в одной из них x заменяется на u, а в другой – y на v. При этом в первой либо есть обе вершины y и v, либо нет ни одной из них, а во второй – либо есть обе вершины x и u, либо нет ни одной из них.

Из всего этого можно сделать следующий вывод – если мы во всех множествах набора $\mathfrak{S}$ и их обобщенных частях заменим x на u, а u на x, и y на v, а v на y, то получим множества набора $\mathfrak{S}'$ и их обобщенные части. Поэтому, если первый набор порождает обобщенную ромашку F, то второй – обобщенную ромашку F', у которой те же лепестки, что и у F, только вместо Q_i берется Q_i', и те же части разбиения, только вместо $G_{i-1,i}$ и $G_{i,i+1}$ получаются $G(\{x,u,v\})$ и $G(\{u,v,y\})$, соответственно.

4) Заметим, что на лепестки, не соседние с Q_i, переключение этого лепестка не влияет, то есть если они были переключателями, то и останутся, и наоборот. А лепестки Q_{i-1} и Q_{i+1} по пункту 2 этой леммы не являются переключателями ни в F, ни в F'. □

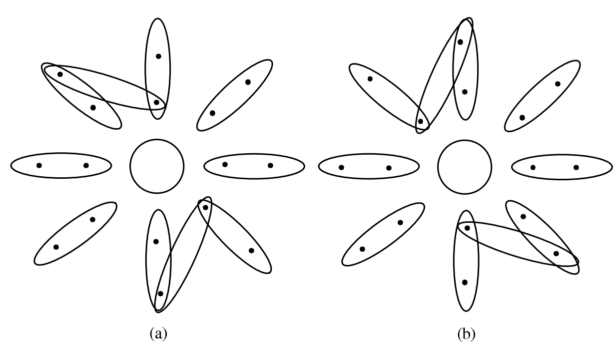

Рис. 3. Похожие ромашки

Определение 14. *Две обобщенные* 0*-ромашки будем называть похожими, если одна из них получается из другой после нескольких переключений* (*см. рис.* 3). *Внутренние множества ромашки, похожей на ромашку* F, *будем называть квазивнутренними множествами* F.

Замечание 7. Из части 4) леммы 15 следует, что похожесть обобщенных 0-ромашек является отношением эквивалентности.

Теорема 4. *Любое* 4*-разделяющее множество, содержащееся в множестве вершин максимальной обобщенной* 0*-ромашки, является либо ее внутренним множеством, либо квазивнутренним множеством, либо ее границей.*

Доказательство. Пусть 4-разделяющее множество T содержится в множестве вершин максимальной 0-ромашки F. Заметим, что если T есть объединение каких-то двух лепестков F, то T является либо внутренним множеством F, либо ее границей. Также ясно, что T заведомо лежит в объединении некоторых четырех лепестков F. Разберем два случая.
Случай 1. *T можно покрыть тремя лепестками F.* Не умаляя общности, считаем, что T содержит обе вершины лепестка Q_1 и по одной вершине лепестков Q_i и Q_j, где i от 1 до j. Заметим, что по лемме 9 либо граф $G_{1,i} - T$ связен, либо $\mathrm{V}(G_{1,i}) \subset T$. Кроме того, лепесток Q_i может содержаться целиком в T, только если $\mathrm{V}(G_{1,i}) \subset T$. Поэтому если граф $\mathrm{V}(G_{1,i}) \not\subset T$, то у подграфов $G_{1,i} - T$ и $G_{i,j} - T$ есть общая вершина. То же можно сказать про $G_{j,1} - T$. Тогда граф $G_{i,j} - T$ не может быть связным (так как иначе $G - T$ связен). Предположим, что часть $G_{i,j}$ непуста. Применим лемму 9, получим, что граф $G_{i,j} - T$ связен и придем к противоречию.

Значит, часть $G_{i,j}$ все же пуста, причем либо граф $G_{i,j} - T$ обязан быть несвязным, либо $\mathrm{V}(G_{i,j}) \subset T$. Но если $\mathrm{V}(G_{i,j}) \subset T$, то часть $G_{i,j}$ пуста, и каждый из лепестков Q_i и Q_j обязан пересекаться с Q_1, из чего следует, что части $G_{1,i}$ и $G_{j,1}$ обе являются малыми, а это невозможно (тогда в графе всего четыре вершины). Поэтому граф $G_{i,j} - T$ обязан быть несвязным, и в нем, следовательно, должно быть по крайней мере две вершины. Тогда в $G_{i,j} - T$ есть ровно две вершины – как раз те вершины лепестков Q_i и Q_j, которые не входят в T. Если $T \setminus Q_1$ является лепестком F, то все в порядке. Предположим, что это не так. Пусть $Q_i = \{u, x\}$, $Q_j = \{v, y\}$, $T \cap Q_i = \{u\}$, а $T \cap Q_j = \{v\}$. Заметим, что из доказанного выше следует, что $\mathrm{Part}(T) = \{G(\mathrm{V}(G_{1,i}) \cup \{v\}), G(\mathrm{V}(G_{j,1}) \cup \{u\})\}$. Поэтому, если Q_i и Q_j являются соседними лепестками, то можно добавить к F лепесток $\{u, v\}$, а к порождающему набору – множество T, что противоречит максимальности F.

Тогда лепестки Q_i и Q_j не являются соседними, но при этом $G_{i,j}$ пуста. Значит, $j = i + 2$, и обе части $G_{i,i+1}$ и $G_{i+1,i+2}$ являются малыми. Заметим, что $Q_{i+1} \neq \{u, y\}$, так как иначе по лемме 14 вершины x и y должны быть смежны, а это не так. Аналогично $Q_{i+1} \neq \{v, x\}$. Поэтому лепесток $Q_{i+1} = \{x, y\}$ и является переключателем, причем при его переключении он переходит в $T \setminus Q_1$, а ромашка F – в ромашку F', похожую на нее. Ясно, что T является внутренним множеством F' (граничным оно являться, очевидно, не может), то есть квазивнутренним множеством ромашки F.

Случай 2. *T нельзя покрыть тремя лепестками F.* Пусть T содержит по одной вершине лепестков Q_1, Q_i, Q_j и Q_k, $i < j < k$. Введем обозначения – для произвольных индексов ℓ и m возьмем $H_{\ell,m} = G_{\ell,m} - T$. Заметим, что по лемме 9 граф $H_{1,i}$ несвязен, только если часть $G_{1,i}$ пуста. Причем в этом случае $H_{1,i}$ – это две несмежные вершины. Аналогично для $H_{i,j}$, $H_{j,k}$ и $H_{k,1}$.

Предположим, что какие-то два соседних из них являются несвязными – пусть это $H_{j,k}$ и $H_{k,1}$. Но тогда вершина из Q_k, не входящая в T, может быть соединена лишь с тремя вершинами (это все вершины T кроме той, что лежит в Q_i), что противоречит четырехсвязности графа G.

Теперь предположим, что какие-то два соседних из них являются связными – пусть это $H_{1,i}$ и $H_{i,j}$. Тогда $H_{1,j}$ – тоже связен. В таком случае $G - T$ будет несвязен, только если оба подграфа $H_{j,k}$ и $H_{k,1}$ несвязны, а такого, как мы только что доказали, не бывает.

Значит, можно считать, что подграфы $H_{1,i}$ и $H_{j,k}$ несвязны, а подграфы $H_{i,j}$ и $H_{k,1}$ связны. Ясно, что тогда компонентами связности в графе $G - T$ будут как раз подграфы $H_{i,j}$ и $H_{k,1}$. Пусть $Q_k \cap T = \{u\}$, а $Q_j \setminus T = \{v\}$. Заметим, что множество $Q_{1,j}$ разбивает граф G на обобщенные части $G_{1,j}$ и $G_{j,1}$, поэтому вершина u может быть смежна только с одной вершиной графа $H_{i,j}$ – с вершиной v.

Поэтому $S = T \cup \{v\} \setminus \{u\}$ отделяет u от $\mathrm{V}(H_{i,j})$. Так как S нельзя покрыть двумя лепестками ромашки F, но можно тремя, из доказательства случая 1 следует, что $S \setminus Q_j$ является лепестком F или ромашки, похожей на F. Но при этом ясно, что $S \setminus Q_j = T \cap (Q_1 \cup Q_i)$.

Аналогично для $T \cap (Q_j \cup Q_k)$. Поэтому T является квазивнутренним множеством. $\square$

Литература

1. Ф. Харари, *Теория графов.* Москва, Мир (1973). (Перевод с английского. F. Harary, Graph theory, 1969.)
2. W. T. Tutte, *Connectivity in graphs.* Toronto, Univ. Toronto Press (1966).
3. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *Структура разбиения трехсвязного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 90–148.
4. Д. В. Карпов, *Разделяющие множества в k-связном графе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **340** (2006), 33–60.
5. W. Hohberg, *The decomposition of graphs into k-connected components.* — Discr. Math. **109** (1992), 133–145.
6. Д. В. Карпов, А. В. Пастор, *О структуре k-связного графа.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 76–106.
7. Д. В. Карпов, *Блоки в k-связных графах.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **293** (2002), 59–93.

Glazman A. L. Generalized flowers in k-connected graph.

In this article we study k-cutsets in k-connected graphs. We introduce generalized flowers and prove some fundamental statements describing their structure. After this we consider generalized flowers in case $k = 4$. For $k = 4$ we give a complete description of 4-cutsets lying in a generalized flower.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
С.-Петербург, Россия

Поступило 7 ноября 2011 г.

Section de Mathématiques,
Université de Genève. 2-4 rue du Lièvre,
Case postale 64, 1211 Genève 4, Suisse.

E-mail: alev729@mail.ru