Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 391, 2011 г.

С. Л. Берлов, И. И. Богданов

О ГРАФАХ С БОЛЬШИМ ХРОМАТИЧЕСКИМ ЧИСЛОМ, НЕ СОДЕРЖАЩИХ МАЛЕНЬКИХ НЕЧЁТНЫХ ЦИКЛОВ

§1. Введение

П. Эрдёш [2] показал, что для любого $n > 1$ и $g > 2$ существует граф с обхватом g и хроматическим числом, большим n, содержащий не более, чем n^{2g+1} вершин. Позже он же [3] предположил, что для любого натурального s существует константа c_s такая, что для любого графа G на N вершинах, в котором длина любого нечётного цикла не меньше $c_s N^{1/s}$, его хроматическое число не превосходит $s+1$.

Эта гипотеза была доказана Кирстедом, Семереди и Троттером [4]. В интересующем нас случае из результатов их статьи следует, что хроматическое число графа на N вершинах, в котором нет нечётных циклов длины, не превосходящей $4sN^{1/s}+1$, не превосходит $s+1$.

Основываясь на этих результатах, введём следующее обозначение.

Определение 1. *Пусть $n, k > 1$ – натуральные числа. Обозначим через $f(n,k)$ наибольшее число f, обладающее следующим свойством: если в графе $G = (V,E)$ нет нечетных циклов длины, не превосходящей $2k-1$, и $|V| \le f$, то существует правильная раскраска его вершин в n цветов.*

Заметим, что условие отсутствия нечетных циклов длины, не превосходящей $2k-1$, равносильно условию отсутствия простых нечётных циклов таких же длин.

Из вышеупомянутых результатов теперь следует, что $f(n,k) < n^{4k+1}$ и $f(s+1, [2sN^{1/s}]+1) \ge N$. Последняя оценка, как несложно видеть, равносильна неравенству

$$f(n,k) \ge \left(\frac{k}{2(n-1)}\right)^{n-1} - 1. \tag{1}$$

Ключевые слова: хроматическое число, нечетные циклы, обхват.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-01-00096-А.

Другая верхняя оценка числа $f(n,k)$ следует из свойств следующего графа, построенного Схрейвером [6]. Пусть m, d – натуральные числа. Положим $X = \{1, 2, \dots, 2m+d\}$, $V = \{x \subset X : \ |x| = m, \ 1 < |i-j| < 2m+d-1$ при всех различных $i, j \in x\}$, $E = \{(x,y) \in V^2 : \ x \cap y = \varnothing\}$. Граф Схрейвера (V,E) является $(d+2)$-хроматическим и не содержит нечетных циклов длины, меньшей $\frac{2m+d}{d}$. При этом $|V| = \frac{2m+d}{m+d}\binom{m+d}{d}$; отсюда можно получить, что

$$f(n,k) < \frac{(n-1)(2k-1)+2}{(n-1)k+1}\binom{(n-1)k+1}{n-1}. \tag{2}$$

При фиксированном n оценки (1) и (2) являются многочленами от k одной и той же степени, т. е. в некотором смысле близки друг к другу. К сожалению, при фиксированном k и $n > k/(2e)+1$ правая часть неравенства (1) как функция от n начинает убывать, так что при бóльших значениях n эта оценка перестаёт давать дополнительную информацию.

С другой стороны, при $k=2$ нахождение асимптотики чисел $f(n,2)$ тесно связано с нахождением асимптотики чисел Рамсея $R(n,3)$. В работах Айтаи, Комлоша и Семереди [1] и Кима [5] показано, что $c_1\frac{n^2}{\log n} \le R(n,3) \le c_2\frac{n^2}{\log n}$ при некоторых константах c_1, c_2. Можно показать, что из этих результатов следуют оценки

$$c_3 n^2 \log n \le f(n,2) \le c_4 n^2 \log n$$

при некоторых константах c_3, c_4.

Цель данной заметки состоит в получении нетривиальных нижних оценок на $f(n,k)$ при любых значениях n и $k \ge 2$. В разделе 2 изучаются комбинаторные соображения, приводящие к рекуррентным оценкам на число $f(n,k)$. В разделе 3 приведены явные оценки, следующие из этих реккурентных оценок. В частности, мы показываем (см. теорему 3), что

$$f(n,k) \ge \frac{(n+k)(n+k+1)\dots(n+2k-1)}{2^{k-1}k^k}$$

при всех $n \ge 2$, $k \ge 2$.

§2. Рекуррентные оценки

Введем некоторые обозначения.

Пусть $G = (V,E)$ – (неориентированный) граф. *Расстояние* между вершинами $u, v \in V$ графа G мы обозначаем через $\operatorname{dist}_G(u,v)$.

Пусть $v \in V$, r – неотрицательное целое число. Обозначим через $U_r(v,G) = \{u \in V \mid \mathrm{dist}_G(u,v) \le r\}$ шар радиуса r с центром в v, а через $S_r(v,G) = \{u \in V \mid \mathrm{dist}_G(u,v) = r\}$ – сферу с теми же радиусом и центром. В частности, $S_0(v,G) = U_0(v,G) = \{v\}$. Обозначим также через $\partial_G^{\mathrm{out}} V_1 = \{u \in V \setminus V_1 \mid \exists v \in V_1 : (u,v) \in E\}$ *внешнюю границу* множества V_1. В частности, $S_r(v,G) = \partial_G^{\mathrm{out}} U_{r-1}(v,G)$.

Если $V_1 \subseteq V$, то через $G(V_1)$ мы обозначаем индуцированный подграф графа G на множестве вершин V_1.

Зафиксируем натуральные n и k, большие единицы. Нам понадобится следующее несложное предложение.

Предложение 1. *Граф G не содержит нечетных циклов длины, не превосходящей $2k-1$, тогда и только тогда, когда для любой вершины $v \in V$ и любого натурального $r < k$ подграф $G(S_r(v,G))$ пуст.*

Доказательство. Пусть на вершинах множества $S_r(v,G)$ есть ребро (u_1,u_2). Дополнив его путями минимальной длины, соединяющими v с u_1 и u_2, получим нечётный цикл длины $2r+1 \le 2k-1$.

Наоборот, предположим, что в G есть нечётный цикл из $\le 2k-1$ вершин. Рассмотрим минимальный такой цикл C; пусть $2r+1$ – его длина (тогда $r<k$), v – одна из его вершин, а u_1,u_2 – две вершины, удалённые (по циклу) от v на расстояние r. Заметим, что $\mathrm{dist}_G(u_1,v) = \mathrm{dist}_G(u_2,v) = r$. Действительно, пусть, скажем, $\mathrm{dist}_G(v,u_1) < r$, и P – путь минимальной длины из v в u_1. Тогда его можно дополнить одним из участков C с концами u_1 и v так, чтобы полученный цикл C' был нечётен. При этом длина C' будет меньше, чем $r+(r+1) = 2r+1$, что противоречит выбору C.

Итак, $u_1,u_2 \in S_r(v,G)$, то есть в $G(S_r(v,G))$ есть ребро. $\square$

Выберем минимальный по количеству вершин граф $G=(V,E)$, в котором нет нечетных циклов длины, не превосходящей $2k-1$ и хроматическое число более n (тогда $|V| = f(n,k)+1$). В силу минимальности, граф G связен. Далее, для любых $v \in V$ и $0 \le r \le k$ сфера $S_r(v,G)$ непуста. Действительно, иначе мы бы имели $G = \bigcup_{i=0}^{r-1} S_i(v,G)$; при этом по предложению 1 все индуцированные графы $G(S_i(v,G))$ пусты. Значит, можно окрасить вершины G в два цвета правильным образом: вершины множеств $S_i(v,G)$ при чётных i – в цвет 1, а при нечётных i – в цвет 2 (вершину v надо при этом окрасить в цвет 1).

Введём обозначение $d = \max_{v \in V} |U_{k-1}(v,G)|$.

Лемма 1. $|U_{k-1}(v,G)| \geq n(k-1)+1$ *для любой вершины* $v \in V$. *В частности,* $d \geq n(k-1)+1$.

Доказательство. Заметим, что $U_{k-1}(v,G) = \bigcup_{r=0}^{k-1} S_r(v,G)$. Если $|S_r(v,G)| \geq n$ при всех $r = 1, \ldots, k-1$, то

$$|U_{k-1}(v,G)| = \sum_{r=0}^{k-1} |S_r(v,G)| \geq 1 + (k-1) \cdot n,$$

что и требовалось.

Пусть теперь $|S_r(v,G)| < n$ при некотором $1 \leq r \leq k-1$. Рассмотрим подграф $G' = G\big(V \setminus U_{r-1}(v,G)\big)$. Из предположения минимальности, его можно правильно окрасить в n цветов. При этом среди цветов вершин множества $S_r(v,G)$ отсутствует какой-то цвет – скажем, 1. Докрасим теперь вершины множества $S_{r-1}(v,G)$ в цвет 1, потом докрасим остальные вершины множеств $S_i(v,G)$ $(i < r-1)$ в цвета 1 и 2 (где 2 – любой из оставшихся цветов) по очереди: при четном $i-(r-1)$, все вершины множества $S_i(v,G)$ красятся в цвет 1, а при нечетном – в цвет 2. Из предложения 1 следует, что полученная раскраска графа G в n цветов – правильная. Это противоречит выбору G. □

Лемма 2. $|V| \geq f(n-1,k) + d + 1$.

Доказательство. Пусть вершина v такова, что $d = |U_{k-1}(v,G)|$. Если $|V \setminus U_{k-1}(v,G)| \leq f(n-1,k)$, то можно окрасить все вершины множества $V \setminus U_{k-1}(v,G)$ в $n-1$ цветов правильным образом. Теперь докрасим вершины $U_{k-1}(v,G)$ в цвета 1 и n, где n – новый цвет, а 1 – любой из старых цветов, следующим образом: при четном $r-(k-1)$ все вершины множества $S_r(v,G)$ красятся в цвет n, а при нечетном – в цвет 1. Согласно предложению 1, мы получили правильную раскраску графа G в n цветов, что невозможно. Значит, наше предположение неверно, $|V \setminus U_{k-1}(v,G)| \geq f(n-1,k)+1$ и

$$|V| \geq f(n-1,k) + 1 + |U_{k-1}(v,G)| = f(n-1,k) + d + 1. \quad \square$$

Лемма 3. $|V| \geq \dfrac{d^{1/(k-1)}}{d^{1/(k-1)}-1}\big(f(n-2,k)+1\big)$.

Доказательство. Мы будем последовательно строить разбиения V на несколько непересекающихся частей

$$V = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \cdots \sqcup U_s \sqcup N_s \sqcup V_s$$

так, чтобы выполнялись следующие условия:

(i) $\partial_G^{\mathrm{out}} U_i \subseteq N_s$ при всех $i = 1, \ldots, s$, а также $\partial_G^{\mathrm{out}} V_s \subseteq N_s$;

(ii) $G(U_i)$ – двудольный граф (на самом деле, U_i будет окрестностью некоторой вершины радиуса, не превосходящего $k-1$, в определенном подграфе G);

(iii) $(d^{1/(k-1)} - 1)(|U_1| + \cdots + |U_s|) \geq |N_s|$.

В начале можно положить $s = 0$, $V_0 = V$, $N_0 = \varnothing$; множества U_i при $s = 0$ отсутствуют.

Пусть уже построено разбиение $V = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \cdots \sqcup U_{s-1} \sqcup N_{s-1} \sqcup V_{s-1}$, причем V_{s-1} непусто. Рассмотрим граф $G_{s-1} = G(V_{s-1})$. Выберем $v \in V_{s-1}$. Рассмотрим множества

$$U_0(v, G_{s-1}) = \{v\}, \quad U_1(v, G_{s-1}), \quad \ldots, \quad U_{k-1}(v, G_{s-1}).$$

Одно из отношений

$$\frac{|U_1(v, G_{s-1})|}{|U_0(v, G_{s-1})|}, \quad \frac{|U_2(v, G_{s-1})|}{|U_1(v, G_{s-1})|}, \quad \ldots, \quad \frac{|U_{k-1}(v, G_{s-1})|}{|U_{k-2}(v, G_{s-1})|}$$

не превосходит $d^{1/(k-1)}$, поскольку их произведение равно

$$|U_{k-1}(v, G_{s-1})| \leq |U_{k-1}(v, G)| \leq d.$$

Пусть $1 \leq m \leq k-1$ таково, что

$$\frac{|U_m(v, G_{s-1})|}{|U_{m-1}(v, G_{s-1})|} \leq d^{1/(k-1)}.$$

Положим теперь

$$U_s = U_{m-1}(v, G_{s-1}), \; N_s = N_{s-1} \cup S_m(v, G_{s-1}), \; V_s = V_{s-1} \setminus U_m(v, G_{s-1}).$$

Поскольку условие (i) выполнялось на предыдущем шаге, то

$$\partial_G^{\mathrm{out}} V_s \subseteq \partial_G^{\mathrm{out}} V_{s-1} \cup S_m(v, G_{s-1}) \subseteq N_s$$

и

$$\partial_G^{\mathrm{out}} U_s \subseteq \partial_G^{\mathrm{out}} V_{s-1} \cup S_m(v, G_{s-1}) \subseteq N_s,$$

то есть условие (i) выполнено и на этом шаге. Условие (ii) выполнено согласно предложению 1. Наконец, из нашего выбора и условия (iii) на предыдущем шаге мы имеем

$$d^{1/(k-1)}|U_s| = d^{1/(k-1)}|U_{m-1}(v, G_{s-1})| \geq |U_m(v, G_{s-1})|,$$
$$(d^{1/(k-1)} - 1)(|U_1| + \cdots + |U_{s-1}|) \geq |N_{s-1}|,$$

а значит,

$$(d^{1/(k-1)} - 1)(|U_1| + \cdots + |U_s|) \geq |N_{s-1}| + |U_m(v, G_{s-1})| - |U_{m-1}(v, G_{s-1})| = |N_s|.$$

Таким образом, условие (iii) на этом шаге также выполнено.

Продолжая этот процесс, мы в конце концов придем к разбиению с $V_s = \varnothing$, так как на каждом шаге $|V_s|$ уменьшается. Таким образом, в результате получено разбиение $V = U_1 \sqcup U_2 \sqcup \cdots \sqcup U_s \sqcup N_s$, причем $|N_s| \leq (d^{1/(k-1)} - 1)(|U_1| + \cdots + |U_s|)$, откуда

$$d^{1/(k-1)}|N_s| \leq (d^{1/(k-1)} - 1)(|U_1| + \cdots + |U_s|) + (d^{1/(k-1)} - 1)|N_s| = |V|(d^{1/(k-1)} - 1),$$

то есть $|N_s| \leq |V|\dfrac{d^{1/(k-1)} - 1}{d^{1/(k-1)}}$. Теперь, если $|N_s| \leq f(n-2, k)$, то можно раскрасить вершины графа $G(N_s)$ в $n-2$ цветов, а вершины каждого из двудольных графов $G(U_i)$ – в оставшиеся два цвета. При этом правильность раскраски исходного графа G могла нарушиться, только если вершины двух графов $G(U_i)$ и $G(U_j)$ $(i \neq j)$ окажутся соседними, что невозможно согласно (i). В итоге, граф G оказался правильно раскрашенным в n цветов, что невозможно. Значит, $|N_s| \geq f(n-2, k) + 1$, а тогда $|V| \geq \dfrac{d^{1/(k-1)}}{d^{1/(k-1)} - 1}|N_s| \geq \dfrac{d^{1/(k-1)}}{d^{1/(k-1)} - 1}(f(n-2, k) + 1)$, что и требовалось. □

Замечание 1. В доказанной лемме можно вместо числа d использовать число $d' = \max\limits_{\varnothing \neq V' \subseteq V} \min\limits_{u \in V'} |U_{k-1}(u, G(V'))|$. Для этого достаточно на каждом шаге выбирать такую $v \in V_{s-1}$, для которой

$$|U_{k-1}(v, G_{s-1})| = \min_{u \in V_{s-1}} |U_{k-1}(u, G_{s-1})|.$$

Ясно, что $d' \leq d$.

Замечание 2. С другой стороны, число $d^{1/(k-1)}$ в утверждении леммы можно заменить на $(f(n,k)+1)^{1/k}$. Для этого на каждом шаге достаточно рассматривать уже $k+1$ множество

$$U_0(v, G_{s-1}) = \{v\}, \quad U_1(v, G_{s-1}), \quad \dots, \quad U_k(v, G_{s-1})$$

и пользоваться условием $|U_k(v, G_{s-1})| \le |V| = f(n,k)+1$.

Из лемм 2 и 3 немедленно следует

Теорема 1. *При всех $n, k \ge 2$ выполнено неравенство*

$$f(n,k) \ge \min_{t \ge n(k-1)+1} \max \left\{ f(n-1,k)+t, \right.$$
$$\left. \frac{t^{1/(k-1)}}{t^{1/(k-1)}-1}(f(n-2,k)+1)-1 \right\}. \qquad (3)$$

Доказательство. Из выбора графа G следует, что $f(n,k) = |V|-1$. Из лемм 2 и 3 следует, что

$$|V| \ge \max \left\{ f(n-1,k)+d, \ \frac{d^{1/(k-1)}}{d^{1/(k-1)}-1}(f(n-2,k)+1)-1 \right\} + 1.$$

Поскольку $d \ge n(k-1)+1$, по лемме 1 из этого следует требуемое. $\square$

Следствие 1. *При любом вещественном $g > 1$ имеем*

$$f(n,k) \ge \min \left\{ f(n-1,k)+g, \ \frac{g^{1/(k-1)}}{g^{1/(k-1)}-1}(f(n-2,k)+1)-1 \right\}. \qquad (4)$$

Доказательство. Пусть t_0 – точка, в которой достигается минимум в выражении (3). Заметим, что значение выражения $f(n-1,k)+t$ с ростом $t > 1$ возрастает, а выражения $\frac{t^{1/(k-1)}}{t^{1/(k-1)}-1}(f(n-2,k)+1)-1$ – убывает. Итак, если $g \le t_0$, то

$$f(n-1,k)+g \le f(n-1,k)+t_0 \le f(n,k).$$

Наоборот, если $g > t_0$, то

$$\frac{g^{1/(k-1)}}{g^{1/(k-1)}-1}(f(n-2,k)+1)-1$$
$$\le \frac{t_0^{1/(k-1)}}{t_0^{1/(k-1)}-1}(f(n-2,k)+1)-1 \le f(n,k). \quad \square$$

§3. Явные оценки

Приведём теперь явные оценки, следующие из доказанных результатов.

Заметим сразу, что при любом k мы имеем $f(1,k) = 1$ и $f(2,k) = 2k$. Теперь из леммы 2 вытекает

Теорема 2. *При всех натуральных $n \geq 1$, $k \geq 2$ выполнено неравенство $f(n,k) \geq n + \dfrac{(k-1)(n-1)(n+2)}{2}$.*

Доказательство. Будем доказывать теорему методом математической индукции. База индукции при $n = 1$ и $n = 2$ выполнена. Пусть $n > 2$. В силу лемм 1 и 2 мы имеем $f(n,k) \geq f(n-1,k) + n(k-1) + 1$. Из индукционного предположения следует, что

$$f(n-1,k) \geq (n-1) + \frac{(k-1)(n-2)(n+1)}{2}.$$

Тогда

$$f(n,k) \geq f(n-1,k) + n(k-1) + 1 \geq n + \frac{(k-1)(n-1)(n+2)}{2},$$

что и требовалось доказать. □

Следующая оценка требует уже использования теоремы 1. Для удобства мы используем обозначение $n^{\overline{k}} = n(n+1)\ldots(n+k-1)$.

Лемма 4. *Пусть при некоторых натуральных $n_0 \geq 1$, $k \geq 2$ и вещественном a оценка*

$$f(m,k) \geq \frac{(m+a)^{\overline{k}}}{2^{k-1}k^k} \tag{5}$$

выполнена при $m = n_0$ и $m = n_0 + 1$. Тогда она также выполнена и при всех $m \geq n_0$.

Доказательство. Докажем индукцией по $n \geq n_0$, что неравенство (5) верно при $m = n$. База индукции при $m = n_0$ и $m = n_0 + 1$ верна по условию леммы.

Пусть теперь $n \geq n_0 + 2$. Положим $c = 2^{1-k}k^{-k}$, $g = ck(n+a)^{\overline{k-1}}$. По предположению индукции имеем

$$\begin{aligned} f(n-1,k) + g &\geq c(n+a-1)^{\overline{k}} + ck(n+a)^{\overline{k-1}} \\ &= c(n+a)^{\overline{k-1}}(n+a-1+k) = c(n+a)^{\overline{k}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Из лемм 1 и 2 следует, что $f(n,k) \geq f(n-1,k)+n(k-1)+1$. Значит, если $g \leq n(k-1)+1$, то $f(n,k) \geq f(n-1,k)+g \geq c(n+a)^{\overline{k}}$, что и требовалось.

Пусть теперь $g > n(k-1)+1$; в частности, $g > 1$. Мы собираемся воспользоваться следствием 1; для этого оценим второй член в правой части (4).

Из неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим имеем

$$g^{1/(k-1)} = (ck)^{1/(k-1)} \left((n+a)^{\overline{k-1}}\right)^{1/(k-1)} \leq \frac{1}{2k}\left(n+a+\frac{k}{2}-1\right).$$

Положим $s = n+a+\frac{k}{2}-1$; тогда $s \geq 2kg^{1/(k-1)} > 2k$. Значит,

$$\begin{aligned}\frac{g^{1/(k-1)}}{g^{1/(k-1)}-1} &\geq \frac{s}{s-2k} \geq \frac{s+k-1}{s-(k+1)} \\ &\geq \frac{s^2+s(k-1)+\frac{k(k-2)}{4}}{s^2-s(k+1)+\frac{k(k+2)}{4}} = \frac{(n+a+k-2)(n+a+k-1)}{(n+a-2)(n+a-1)}.\end{aligned}$$

Наконец, из предположения индукции получаем

$$\begin{aligned}\frac{g^{1/(k-1)}}{g^{1/(k-1)}-1}(f(n-2,k)+1)-1 &\geq \frac{g^{1/(k-1)}}{g^{1/(k-1)}-1}f(n-2,k) \\ &\geq \frac{(n+a+k-2)(n+a+k-1)}{(n+a-2)(n+a-1)} \cdot c(n+a-2)^{\overline{k}} = c(n+a)^{\overline{k}}. \quad (7)\end{aligned}$$

Итак, при выбранном нами значении g из следствия 1 и оценок (6) и (7) получаем

$$\begin{aligned}f(n,k) &\geq \min\left\{f(n-1,k)+g,\ \frac{g^{1/(k-1)}}{g^{1/(k-1)}-1}(f(n-2,k)+1)-1\right\} \\ &\geq c(n+a)^{\overline{k}},\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Следующее следствие показывает, что число a можно выбрать довольно большим.

Теорема 3. *При всех $k \geq 2$ и $n \geq 2$ верно неравенство*

$$f(n,k) \geq \frac{(n+k)^{\overline{k}}}{2^{k-1}k^k}.$$

Доказательство. Положим $a = k$. Проверим неравенство (5) при $m = 2, 3$; напомним, что $f(2,k) = 2k$. При $m = 2$ имеем

$$2^{k-1}k^k f(2,k) = 2^k k^{k+1} = (2k)^{k-1}\cdot 2k^2 \geq (k+2)\cdot\dots\cdot 2k\cdot(2k+1) = (k+2)^{\overline{k}}.$$

При $m = 3$ из теоремы 2 получаем $f(3,k) \geq 5k-2$, и из предыдущей оценки теперь следует

$$2^{k-1}k^k f(3,k) \geq 2^{k-1}k^k(5k-2) \geq 2^k k^k f(2,k) \geq 2(k+2)^{\overline{k}} > (k+3)^{\overline{k}}.$$

Итак, неравенство (5) выполнено при $m = 2, 3$, а значит, и при всех $m \geq 2$. □

Литература

1. M. Ajtai, J. Komlós, E. Szemerédi, *A note on Ramsey numbers.* — J. Combin. Theory A **29** (1980), 354–360.
2. P. Erdös, *Graph theory and probability.* — Canad. J. Math. **11** (1959), 34–38.
3. P. Erdös, *Problems and results in graph theory and combinatorial analysis.* — In: Graph Theory and Related Topics, Academic Press, New York (1979), pp. 153–163.
4. H. A. Kierstead, E. Szemerédi, W. T. Trotter, *On coloring graphs with locally small chromatic number.* — Combinatorica **4** (1984), 183–185.
5. J. H. Kim, *The Ramsey Number $R(3,t)$ has order of magnitude $t^2/\log t$.* — Random Structures and Algorithms **7** (1995), 173–207.
6. A. Schrijver, *Vertex-critical subgraphs of Kneser graphs.* — Nieuw Archief voor Wiskunde **26** (1978), 454–461.

Berlov S. L., Bogdanov I. I. On graphs with a large chromatic number containing no small odd cycles.

We present lower bounds for the number of vertices in a graph with a large chromatic number containing no small odd cycles.

Физико-математический лицей No. 239,
ул. Кирочная д. 8а.,
Санкт-Петербург 191028, Россия
E-mail: sberlov@rambler.ru

Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Институтский пер., 9,
г. Долгопрудный,
Московская обл. 141700, Россия
E-mail: ilya.i.bogdanov@gmail.com

Поступило 3 ноября 2011 г.