Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 391, 2011 г.

А. В. Банкевич, Д. В. Карпов

ОЦЕНКИ КОЛИЧЕСТВА ВИСЯЧИХ ВЕРШИН В ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЯХ

1. Введение. Основные обозначения

В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер – через $E(G)$, для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Везде в работе графы не содержат петель и кратных рёбер.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G, минимальную степень вершины графа G, как обычно, обозначим через $\delta(G)$. Окрестность множества вершин $W \subset V(G)$ (то есть, множество всех вершин графа G, смежных хотя бы с одной вершиной из W) обозначим через $\mathrm{N}_G(W)$. Через $g(G)$ обозначим *обхват* графа G (то есть, длину его наименьшего цикла).

Определение 1. *Для связного графа G обозначим через $u(G)$ максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа G.*

Замечание 1. Очевидно, что если F – дерево, то $u(F)$ – количество его висячих вершин.

Опубликовано несколько работ, в которых доказываются оценки снизу на $u(G)$. Так, в 1981 году Сторер [1] предположил, что $u(G) > \frac{1}{4}v(G)$ при $\delta(G) \ge 3$. В 1981 году Линиал высказал более сильную гипотезу: $u(G) \ge \frac{\delta(G)-2}{\delta(G)+1}v(G) + c$ при $\delta(G) \ge 3$, где константа $c > 0$ зависит только от $\delta(G)$. Эта гипотеза появилась не на пустом месте: для любого $d \ge 3$ легко придумать бесконечную серию примеров графов с минимальной степенью d, для которых $\frac{u(G)}{v(G)}$ стремится к $\frac{d-2}{d+1}$. Таким

Ключевые слова: остовное дерево, висячие вершины, количество висячих вершин.

Исследования выполнены при поддержке программы фундаментальных исследований ОМН РАН, гранта Президента РФ НШ-5282.2010.1 и гранта РФФИ № 11-01-00760-а.

образом, оценка из гипотезы Линиала асимптотически точна в тех случаях, когда она верна.

Для $d = 3$ и $d = 4$ утверждение гипотезы доказали Клейтман и Вест ([3], 1991), для $d = 5$ – Григгс и Ву ([4], 1996). В обеих работах применялся метод *мёртвых вершин.* С развитием этого метода для $d \geq 6$ есть значительные проблемы, дальнейших результатов на настоящий момент нет. Из работ [5–7] следует, что для достаточно больших d гипотеза Линиала неверна. Однако, для малых значений $d > 5$ вопрос остается открытым.

В ряде работ рассматриваются остовные деревья в классе графов с дополнительными ограничениями вида запрета на какой-то подграф. Больше всего работ посвящено изучению остовных деревьев в графах без K_4^- (полного подграфа на 4 вершинах без одного ребра). Сначала ([2], 1989) было доказано, что $u(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}$ в связном кубическом графе без K_4^-. Позже Бонсма ([8], 2008) доказал две интересные оценки для связного графа с $\delta(G) \geq 3$: $u(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}$ для графа без треугольников (то есть, с $g(G) \geq 4$) и $u(G) \geq \frac{2v(G)+12}{7}$ для графа без K_4^-.

Эти результаты не дают ответа на вопрос, как оценить количество висячих вершин в остовном дереве связного графа с вершинами степеней 1 и 2. Недавно появились работы, в которых наличие вершин степени 1 и 2 в графе не мешает построению остовного дерева с достаточно большим количеством висячих вершин. В работе [9] для связного графа G с $g(G) \geq 4$ и v_3 вершинами степени хотя бы 3 доказана оценка $u(G) \geq \frac{v_3+4}{3}$ (на самом деле, в теореме 1 из [9] эта оценка сформулирована и доказана для более широкого класса графов). В работе [10] для связного графа G с v_3 вершинами степени 3 и v_4 вершинами степени хотя бы 4 доказана оценка $u(G) \geq \frac{2v_4}{5} + \frac{2v_3}{15}$.

Естественным продолжением этих работ будет первая теорема из нашей работы, где свой вклад в оценку количества висячих вершин остовного дерева вносят и висячие вершины исходного графа.

Теорема 1. *Пусть G – связный граф, в котором $v(G) \geq 2$ и s вершин имеют степень, отличную от 2. Тогда у графа G существует остовное дерево, в котором не менее $\frac{1}{4}(s-2)+2$ висячих вершин.*

В качестве очевидного следствия мы получаем оценку на количество висячих вершин в остовном дереве графа без вершин степени 2.

Следствие 1. *Пусть G – связный граф без вершин степени 2, причем $v(G) \ge 2$. Тогда у графа G существует остовное дерево, в котором не менее, чем $\frac{1}{4}(v(G)-2)+2$ висячих вершин.*

Определение 2. *Обозначим через $\ell(G)$ количество вершин в максимальной цепочке последовательно соединённых вершин степени 2 в графе G.*

В работе [11] для связного графа G с $\ell(G) \le k$ (где $k \ge 1$) доказана оценка $u(G) > \frac{1}{2k+4}v(G)$. Однако доказательство, приведённое в [11], существенно использовало, что $k \ge 1$. Следствие 1 показывает, что и для $k = 0$ оценка получается такой же. Мы усилим результат работы [11], получив новую серию оценок, которая связывает количество висячих вершин в остовном дереве с обхватом графа.

Теорема 2. *Пусть G – связный граф, $v(G) \ge 2$, $g(G) \ge g$, $\ell(G) \le k$, $k \ge 1$. Тогда у графа G существует остовное дерево, в котором не менее, чем $\alpha_{g,k}(v(G)-k-2)+2$ висячих вершин, где*

$$\alpha_{g,k} = \begin{cases} \frac{n}{n(k+3)+1} \ (\text{где } n = [\frac{g+1}{2}]) & \text{при } k < g-2, \\ \frac{g-2}{(g-1)(k+2)} & \text{при } k \ge g-2. \end{cases}$$

Отметим, что вопрос о таких оценках для случая $k = 0$ (то есть, графа без вершин степени 2) остаётся открытым.

2. Основной инструмент

В этом разделе мы сформулируем и докажем лемму, являющуюся основным инструментом всех доказательств нашей работы. Эта лемма поможет редуцировать доказательство оценок в теоремах 1 и 2 в случаях, когда в графе есть точки сочленения. Она же позволит собирать экстремальные примеры для наших оценок, как из деталей конструктора.

Наш метод использует теорию блоков и точек сочленения. Для удобства мы приведем определения основных понятий. Подробнее классические результаты о блоках и точках сочленения изложены в [12] и других книгах.

Определение 3. *Точкой сочленения связного графа G называется любая его вершина, при удалении которой теряется связность. Двусвязным графом называется непустой связный граф без точек сочленения. Блок графа G – это его максимальный по включению двусвязный подграф.*

Мост графа G – это ребро, не входящее ни в один цикл.

Определение 4. 1) *Пусть даны два графа G_1 и G_2, в которых выделены вершины $x_1 \in V(G_1)$ и $x_2 \in V(G_2)$ соответственно, $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$. Склеить графы G_1 и G_2 по вершинам x_1 и x_2 значит склеить две вершины x_1 и x_2 в одну вершину x, которой будут переданы все выходящие из x_1 и x_2 рёбра обоих графов. Остальные вершины и рёбра графов G_1 и G_2 войдут в полученный при склейке граф без изменений (см. рисунок 1).*

2) *Для любого ребра $e \in E(G)$ определим граф $G \cdot e$, в котором концы ребра $e = xy$ склеены в одну вершину, которой переданы все инцидентные x и y рёбра. Будем говорить, что граф $G \cdot e$ получен из G в результате стягивания ребра e.*

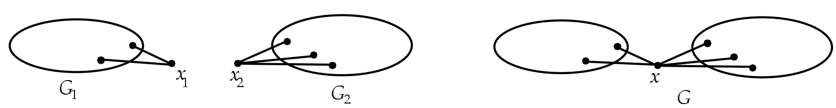

Рис. 1. Склеивание графов.

Замечание 2. 1) При стягивании мостов не образуется петель и кратных рёбер.

2) Пусть граф H получен из графа H' стягиванием нескольких мостов, не инцидентных висячим вершинам. Тогда, очевидно, $u(H) = u(H')$.

Лемма 1. *Пусть G_1 и G_2 – связные графы с $V(G_1) \cap V(G_2) = \varnothing$, $v(G_1) \geq 2$, $v(G_2) \geq 2$ и висячими вершинами x_1 и x_2. Пусть G – граф, полученный из G_1 и G_2 склеиванием по вершинам x_1 и x_2 и последующим стягиванием $m' - 1$ мостов, не инцидентных висячим вершинам. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $u(G) = u(G'_1) + u(G'_2) - 2$.

2) *Пусть*

$$u(G_1) \geq \alpha(v(G_1) - m) + 2, \quad u(G_2) \geq \alpha(v(G_2) - m) + 2, \quad m' \geq m. \quad (1)$$

Тогда $u(G) \geq \alpha(v(G) - m) + 2$. Если все три неравенства из (1) обращаются в равенство, то $u(G) = \alpha(v(G) - m) + 2$.

Доказательство. 1) Пусть G' – граф, полученный из G'_1 и G'_2 склеиванием по x_1 и x_2. По замечанию 2 мы имеем $u(G') = u(G)$. Остаётся доказать, что $u(G') = u(G'_1) + u(G'_2) - 2$. Пусть x – вершина графа G', полученная из x_1 и x_2 в результате склеивания.

$\geq$. Рассмотрим остовные деревья T_1 и T_2 графов G'_1 и G'_2 с $u(T_1) = u(G'_1)$ и $u(T_2) = u(G'_2)$. Склеив в них висячие вершины x_1 и x_2 в одну вершину x, мы получим остовное дерево T графа G' с $u(T) = u(T_1) + u(T_2) - 2$ (все висячие вершины деревьев T_1 и T_2, кроме x_1 и x_2, остались висячими в дереве T). Следовательно, $u(G') \geq u(G'_1) + u(G'_2) - 2$.

$\leq$. Теперь рассмотрим остовное дерево T' графа G' с $u(T') = u(G')$. Вершина x является точкой сочленения графа G' и потому не является висячей вершиной дерева T', значит, $d_{T'}(x) = d_{G'}(x) = 2$. Очевидно, дерево T' склеено по вершинам x_1 и x_2 из остовного дерева T'_1 графа G'_1 (в котором вершина x_1 – висячая) и остовного дерева T'_2 графа G'_2 (в котором вершина x_2 – висячая). Все остальные висячие вершины деревьев T'_1 и T'_2 являются висячими вершинами дерева T', поэтому

$$u(G') = u(T') = u(T'_1) + u(T'_2) - 2 \leq u(G'_1) + u(G'_2) - 2.$$

2) Отметим, что $v(G) = v(G'_1) + v(G'_2) - m'$. Действительно, две вершины x_1 и x_2 мы склеили в одну вершину x, после чего еще $m' - 1$ вершина исчезла при стягивании мостов. После доказательства пункта 1 остаётся лишь написать цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} u(G) &= u(G'_1) + u(G'_2) - 2 \\ &\geq \alpha(v(G'_1) - m) + 2 + \alpha(v(G'_2) - m) + 2 - 2 \\ &= \alpha((v(G'_1) + v(G'_2) - m') - m + (m' - m)) + 2 \\ &\geq \alpha(v(G) - m) + 2. \end{aligned} \tag{2}$$

Нетрудно заметить, что в случае, когда все неравенства из (1) обращаются в равенства, все неравенства в (2) также обращаются в равенства. □

3. Теорема 1 и серия экстремальных примеров

Доказательство теоремы 1. Мы будем считать, что в графе G есть висячие вершины, иначе можно воспользоваться результатом Клейтмана и Веста.

Лемма 2. [3] *Пусть G – связный граф, $\delta(G) \geq 3$. Тогда $u(G) \geq \frac{v(G)}{4} + 2$.*

Пусть U – множество всех висячих вершин графа G, W – множество всех вершин графа G, смежных с висячими, X – множество всех не вошедших в $U \cup W$ вершин графа G, смежных с вершинами из W и, наконец, Y – множество всех остальных вершин. Для произвольного графа F обозначим через $S(F)$ множество вершин графа, степень которых не равна 2, а через $s(F)$ – их количество. Пусть $H = G - U$. Очевидно, граф H связен.

Доказательство теоремы 1 будем вести индукцией по размеру графа: приступая к доказательству для графа G будем считать утверждение доказанным для графов с меньшим числом вершин и графов с таким же числом вершин, но меньшим числом рёбер.

Базу индукции составит очевидный случай, когда в графе H не более двух вершин. Все возможные в этом случае варианты нетрудно перебрать.

В *индукционном переходе* мы разберём несколько случаев.

1. *В графе G есть вершина a степени* 2.
Если a – точка сочленения, то, стянув инцидентное ей ребро, мы получим меньший граф G' с $s(G') = s(G)$ и $u(G') = u(G)$. Если же a – не точка сочленения, то рассмотрим инцидентное ей ребро ab. Это ребро – не мост, а значит, граф $G' = G - ab$ связен. Очевидно, $a \in S(G') \setminus S(G)$. Отметим, что $S(G) \setminus S(G') \subseteq \{b\}$, так как степени отличных от a и b вершин в графах G и G' совпадают. Следовательно, $s(G') \geq s(G)$. Так как любое остовное дерево графа G' является остовным деревом графа G, мы имеем $u(G') \leq u(G)$. В обоих случаях утверждение теоремы для графа G следует из утверждения теоремы для меньшего графа G'.

Далее мы будем считать, что $s(G) = v(G)$ (то есть, все вершины графа G имеют степень не 2*).*

2. *Граф H не двусвязен.*

Пусть a – точка сочленения графа H. Тогда a – точка сочленения графа G, разбивающая H хотя бы на две части. Это означает, что существуют такие связные графы G_1 и G_2, для которых

$$V(G_1) \cup V(G_2) = V(G), \quad V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\} \quad \text{и} \quad v(G_1), v(G_2) > 2.$$

Для $i \in \{1, 2\}$ рассмотрим граф G'_i, полученный из G_i присоединением новой висячей вершины x_i к вершине a (см. рисунок 2). Две копии вершины a в графах G'_1 и G'_2 мы будем считать различными вершинами. Тогда граф G получается из G'_1 и G'_2 склейкой вершин x_1

и x_2 в одну вершину x и последующим стягиванием двух инцидентных x мостов (при этом две копии вершины a в графах G'_1 и G'_2 склеятся в вершину a графа G). Таким образом, выполняются условия пункта 1 леммы 1 и мы имеем $u(G) = u(G'_1) + u(G'_2) - 2$. Нетрудно понять, что $v(G'_1) < v(G)$ и $v(G'_2) < v(G)$. Тогда по индукционному предположению $u(G'_1) \geq \frac{s(G'_1)-2}{4} + 2$ и $u(G'_2) \geq \frac{s(G'_2)-2}{4} + 2$.

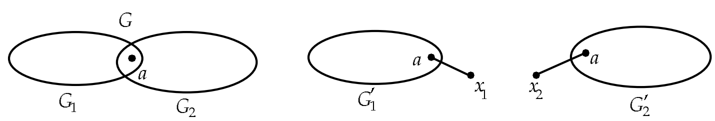

Рис. 2. Разрез графа по точке сочленения a.

Отметим, что $s(G) = v(G)$ и все вершины графов G'_1 и G'_2, кроме a, имеют степень не 2. Поскольку $3 \leq d_G(a) = d_{G'_1}(a) + d_{G'_2}(a) - 2$, то вершина a имеет степень не 2 хотя бы в одном из графов G'_1 и G'_2. Поэтому

$$s(G) = v(G) = v(G'_1) + v(G'_2) - 3 \leq s(G'_1) + s(G'_2) - 2.$$

Таким образом,

$$u(G) = u(G'_1) + u(G'_2) - 2 \geq \frac{s(G'_1) - 2}{4} + \frac{s(G'_2) - 2}{4} + 2 \geq \frac{s(G) - 2}{4} + 2,$$

что и требовалось доказать.

В дальнейшем мы будем считать, что в графе H нет точек сочленения. Это означает, что все точки сочленения графа G – это вершины множества W (вершина $w \in W$ отделяет смежные с ней висячие вершины от остальных вершин графа).

Для дальнейших продвижений нам потребуется лемма.

Лемма 3. *Пусть $a, b \in V(G)$ – смежные вершины, а подграф G' – компонента связности графа $G - a$, содержащая вершину b. Тогда, если b – точка сочленения графа G', то $u(G) \geq u(G') + 1$.*

Доказательство. Рассмотрим остовное дерево T' графа G' с $u(T') = u(G')$. Построим остовное дерево T графа G, присоединив вершину a к b и далее присоединив к вершине a все отличные от G' компоненты связности графа $G - a$. Вершина b – точка сочленения графа G', поэтому она не является висячей вершиной в дереве T'. Следовательно, $u(G) \geq u(T) \geq u(T') + 1 = u(G') + 1$. $\square$

Продолжим разбор случаев в доказательстве теоремы 1.

3. *Существуют такие смежные вершины $a, b \in V(G)$, что $d_G(a) \le 3$, а b – точка сочленения графа $G - a$.*
Пусть G' – компонента связности графа $G - a$, содержащая b. Из двусвязности H понятно, что в G' не попала только вершина a и смежные с ней висячие вершины. Таким образом,

$$S(G) \setminus S(G') \subseteq \{a\} \cup \mathrm{N}_G(a), \quad \text{поэтому} \quad s(G') \ge s(G) - d_G(a) - 1 \ge s(G) - 4.$$

По индукционному предположению, лемме 3 и доказанному выше мы имеем

$$u(G) \ge u(G') + 1 \ge \frac{s(G') - 2}{4} + 3 \ge \frac{s(G) - 2}{4} + 2,$$

что и требовалось доказать.

4. *Существуют такие смежные вершины $x, y \in V(H)$, что $d_G(x) \ge 4$, $d_G(y) \ge 4$.*
Тогда рассмотрим граф $G' = G - xy$. Поскольку граф H двусвязен, то граф G' – связен и для него утверждение теоремы уже доказано. Понятно, что $s(G') = s(G)$, а остовное дерево графа G' является остовным деревом G, поэтому утверждение доказано и для G.

5. Подытожим разобранные случаи и выясним свойства, которыми теперь обладает граф G.

Лемма 4. *Если граф G не удовлетворяет условию ни одного из разобранных случаев, то он удовлетворяет следующим условиям.*

1° *Никакие две вершины множества W не смежны.*

2° *Все вершины множества W имеют степень* 3.

3° *Множество X непусто и состоит из вершин степени более* 3.

4° *Каждая вершина множества W смежна с одной висячей вершиной графа G и двумя вершинами множества X.*

Доказательство. Рассмотрим вершину $w \in W$ и смежную с ней висячую вершину $u \in U$. Вершина w – точка сочленения, отделяющая u от остальных вершин графа. Если вершина w смежна с отличной от u вершиной степени не более трёх, то граф был бы рассмотрен в пункте 3. Поэтому все смежные с w вершины, кроме ровно одной висячей, имеют степень более трёх. Таким образом, степени всех вершин множества X больше 3.

Докажем, что W – независимое множество графа G. Пусть вершины $w, w' \in W$ смежны. Тогда хотя бы одна из них имеет степень не более 3, пусть $d_G(w') \le 3$. Но в этом случае вершина $w \in W$ смежна с невисячей вершиной степени не более 3.

Итак, W – независимое множество. Тогда каждая вершина $w \in W$ смежна хотя бы с $d_G(w) - 1 \ge 2$ вершинами из X, следовательно, множество X непусто. Так как степени вершин множества X более 3, то $d_G(w) = 3$. Таким образом, все утверждения леммы доказаны. □

Рассмотрим вершину $w \in W$ и смежные с ней вершины $x, x' \in X$. Пусть $a \ne w$ – смежная с x вершина. Легко понять, что либо $a \in W$, либо $a \in Y$ и в обоих случаях $d_G(a) = 3$ (см. рисунок 3).

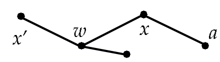

Рис. 3. Вершины w, x, x' и a.

Пусть $G^* = G - x'w$, а G' – компонента связности графа $G^* - a$, содержащая вершину w. Очевидно, вершина x – точка сочленения графа G' (отделяющая w и смежную с ней висячую вершину от остальных вершин графа), поэтому, применив лемму 3 к графам G^* и G', мы получим $u(G^*) \ge u(G') + 1$.

Смежная с a вершина x не является точкой сочленения графа $G - a$ (иначе наш граф уже был бы рассмотрен в пункте 3), поэтому ребро xw – не мост графа $G - a$. Так как w смежна с висячей вершиной и двумя вершинами $x, x' \in X$, это означает, что $x'w$ – также не мост графа $G - a$. Следовательно, в графе $G - a - x'w = G^* - a$ все вершины, кроме a и – в случае, когда $a \in W$ – смежной с ней висячей вершины, входят в компоненту связности G'.

Все вершины из $V(G)$, кроме a, x', w и вершин из $\mathrm{N}_G(a)$ входят в граф G' и имеют там такую же степень, как в графе G. Для вершины $x \in \mathrm{N}_G(a)$ мы имеем $d_{G'}(x) = d_G(x) - 1 \ge 3$. Если $x' \notin \mathrm{N}_G(a)$, то $d_{G'}(x') = d_G(x') - 1 \ge 3$. Следовательно, множество $S(G) \setminus S(G')$ состоит не более, чем из $d_G(a) + 1 \le 4$ вершин: это могут быть w, a и отличные от x вершины из $\mathrm{N}_G(a)$. Таким образом, $s(G') \ge s(G) - 4$. По индукционному предположению, $u(G') \ge \frac{s(G')-2}{4} + 2$. Учитывая, что G^* – подграф G и доказанные выше неравенства, мы имеем

$$u(G) \ge u(G^*) \ge u(G') + 1 \ge \frac{s(G') - 2}{4} + 3 \ge \frac{s(G) - 2}{4} + 2,$$

что и требовалось доказать. □

3.1. Экстремальные примеры. Рассмотрим дерево T, в котором есть только вершины степеней 1 и 3, причём вершин степени 3 ровно n. Легко видеть, что количество вершин степени 1 тогда равно $n+2$, а $e(T)=2n+1$. Заменим каждую вершину x степени 3 дерева T на треугольник, передав каждой из трёх вершин треугольника по одному из рёбер, инцидентных в дереве T вершине x. Пример такого графа для $n=5$ на рисунке 4. В полученном графе G будет $n+2$ вершины степени 1 и n треугольников, итого $v(G)=n+2+3n=4n+2$. Все невисячие вершины графа G являются точками сочленения и потому не могут быть висячими вершинами остовного дерева. Следовательно, $u(G)=n+2=\frac{v(G)-2}{4}+2$.

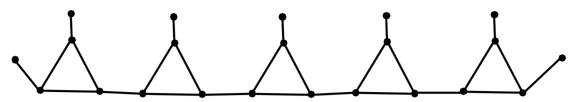

Рис. 4. Экстремальный пример к оценке из теоремы 1.

4. Теорема 2 и серии экстремальных примеров

Сначала приведем необходимые определения и формулировку леммы о расщеплении больших блоков из работы [11].

Определение 5. *Граница блока B – это множество всех входящих в него точек сочленения графа G (обозначение:* $\mathrm{Bound}(B)$*). Внутренность блока B – это множество вершин* $\mathrm{Int}(B)=V(B)\setminus\mathrm{Bound}(B)$. *Вершины из* $\mathrm{Int}(B)$ *мы будем называть внутренними вершинами блока B.*

Блок называется пустым, если у него нет внутренних вершин (то есть, $\mathrm{Int}(B)=\varnothing$*.) Иначе блок называется непустым.*

Блок B называется большим, если количество его внутренних вершин больше количества его граничных вершин (то есть, $|\mathrm{Int}(B)|>|\mathrm{Bound}(B)|$*).*

Лемма 5. *Пусть G – граф с более чем двумя вершинами. Тогда существует набор рёбер $F\subset E(G)$, удовлетворяющий следующим условиям:*

1° *граф $G-F$ связен;*

2° *у графа $G-F$ нет больших блоков;*

3° *если вершины* x *и* y *смежны в* $G - F$ *и* $d_{G-F}(x) = d_{G-F}(y) = 2$, *то* $d_G(x) = d_G(y) = 2$.

Доказательство теоремы 2. И на этот раз доказательство будет индукцией по количеству вершин графа, только мы поменяем местами базу и переход.

1. *Спуск.*
Мы будем говорить, что граф G' *меньше* графа G если либо $u(G') < u(G)$, либо $u(G') = u(G)$ и $e(G') < e(G)$. В этой части мы разберём случаи, когда из утверждения теоремы 2 для всех меньших графов мы можем вывести утверждение для графа G.

Пусть *шип* – это неразветвлённое дерево (все невисячие вершины которого имеют степень 2), присоединённое ребром за одну из своих висячих вершин к точке сочленения a (которую мы назовём *основанием шипа*).

Назовём точку сочленения a графа G *несущественной*, если у графа $G - a$ ровно две компоненты связности, одна из которых является *шипом* с основанием a. В противном случае назовём точку сочленения *существенной*.

1.1. *В графе* G *есть существенная точка сочленения* a.
Если $d_G(a) = 2$, то вершина a принадлежит некоторой цепочке из последовательно соединённых вершин степени 2, пусть крайние вершины этой цепочки смежны с вершинами b и b' (степени которых не равны 2). Так как a – существенная точка сочленения, то $d_G(b) > 2$ и $d_G(b') > 2$, причем b и b' – также существенные точки сочленения.

Итак, рассмотрим случай $d_G(a) \geq 3$. Вершина a является существенной точкой сочленения графа G, поэтому существуют такие связные графы G_1 и G_2, что $V(G_1) \cup V(G_2) = V(G)$ и $V(G_1) \cap V(G_2) = \{a\}$, причём ни один из графов G_1 и G_2 не является шипом с основанием a.

Построим из графа G_1 граф G_1'. Если $d_{G_1}(a) = 1$, то $G_1' = G_1$. Если же $d_{G_1}(a) \geq 2$, то присоединим к вершине a шип из $k+1$ вершины. Таким образом $\ell(G_1') \leq k$, $g(G_1') \geq g(G)$. Аналогично построим граф G_2'.

Поскольку $3 \leq d_G(a) = d_{G_1}(a) + d_{G_2}(a)$, то $d_{G_1}(a) \geq 2$ или $d_{G_2}(a) \geq 2$. Таким образом, при построении хотя бы одного из графов G_1' или G_2' мы добавили шип из $k+1$ вершины. Учитывая, что вершина a входит в оба графа, мы получаем неравенство

$$v(G_1') + v(G_2') \geq v(G) + k + 2.$$

Граф G получается из G_1' и G_2' склейкой двух висячих вершин (концов присоединённых шипов) и последующим стягиванием не менее, чем $k+1$ моста (в результате две копии вершины a в графах G_1' и G_2' склеятся в вершину a графа G). По пункту 1 леммы 1 мы имеем $u(G) = u(G_1')+u(G_2')-2$. Поскольку графы G_1 и G_2 не являются шипами с основанием a, то $u(G_1'), u(G_2') \geq 3$ и следовательно $u(G_1') < u(G)$ и $u(G_2') < u(G)$. Тогда по индукционному предположению мы имеем

$$u(G_1') \geq \alpha_{g,k}(v(G_1') - k - 2) + 2, \quad u(G_2') \geq \alpha_{g,k}(v(G_2') - k - 2) + 2.$$

Теперь по пункту 2 леммы 1 получается, что

$$u(G) \geq \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2,$$

что и требовалось доказать.

1.2. *В графе G есть большие блоки.*
По лемме 5 мы можем выбрать такой набор рёбер $F \subset E(G)$, что граф $G' = G-F$ связен, не имеет больших блоков и для любых двух смежных в G' вершин x и y из $d_{G'}(x) = d_{G'}(y) = 2$ следует $d_G(x) = d_G(y) = 2$. Тогда $\ell(G') = \max(\ell(G), 1) \leq k$. Очевидно, $g(G') \geq g(G) = g$. Поэтому мы можем применить индукционное предположение для графа G'. Так как любое остовное дерево графа G' является остовным деревом графа G, то $u(G) \geq u(G') \geq \alpha_{g,k}(v(G) - k - 2) + 2$, что и требовалось доказать.

2. *База.*
Будем уменьшать граф, выполняя шаги 1.1 и 1.2 до тех пор, пока это возможно. В результате останется проверить утверждение теоремы только для графов G, у которых нет существенных точек сочленения и больших блоков. Тогда каждая точка сочленения a графа G делит его на две компоненты связности, одна из которых – шип с основанием a. Пусть H – граф, полученный из G в результате удаления вершин всех этих шипов. Нетрудно понять, что граф H двусвязен (любая точка сочленения графа H была бы существенной точкой сочленения графа G).

Пусть $h = v(H)$, m – количество точек сочленения графа G. Поскольку H не является большим блоком графа G, то $m \geq \frac{v(H)}{2}$. Каждая точка сочленения отделяет от графа G шип не более, чем из $\ell(G) + 1 \leq k+1$ вершин. Поэтому $v(G) \leq h + (k+1)m$.

Случай, когда G – дерево, можно рассмотреть отдельно. Легко проверить, что в этом случае все оценки из теоремы 2 верны. Итак, пусть граф G – не дерево, тогда двусвязный граф H содержит цикл из не более, чем $v(H)$ вершин. Следовательно, $v(H) = h \ge g(G) = g$. Рассмотрим два случая.

2.1. $m = h$.
Тогда $v(G) \le (k+2)h$, $u(G) \ge h$. Непосредственным вычислением проверяется, что в этом случае

$$u(G) \ge \beta_{h,k}(v(G) - k - 2) + 2 \quad \text{для} \quad \beta_{h,k} = \frac{h-2}{(h-1)(k+2)}.$$

Очевидно, $\beta_{h,k}$ возрастает с ростом h, поэтому минимум достигается при $h = g$ и равен $\beta_{g,k}$. Нам необходимо проверить, что $\beta_{g,k} \ge \alpha_{g,k}$, это будет сделано после разбора случая 2.2.

2.2. $m < h$.
В рассматриваемом случае блок H – непустой, выберем вершину $u \in \mathrm{Int}(H)$. Несложно выделить в графе G остовное дерево, в котором висячими вершинами будут концы всех m шипов и вершина u, поэтому $u(G) \ge m + 1$. Непосредственным вычислением проверяется, что

$$u(G) \ge \gamma_{h,m,k}(v(G) - k - 2) + 2 \quad \text{для} \quad \gamma_{h,m,k} = \frac{m-1}{h + (k+1)m - k - 2}.$$

Нам нужно проверить, что при $h \ge g$

$$\beta'_{h,k} = \min_m \gamma_{h,m,k} \ge \alpha_{g,k}.$$

Заметим, что $\gamma_{h,m,k}$ возрастает с ростом m, поэтому подставим минимальное возможное значение $m = \lceil \frac{h}{2} \rceil$ и получим, что

$$\beta'_{h,k} = \frac{\lceil \frac{h}{2} \rceil - 1}{h + (k+1)\lceil \frac{h}{2} \rceil - k - 2}.$$

Легко видеть, что $\beta'_{2n-1,k} > \beta'_{2n,k}$. Непосредственное вычисление показывает, что

$$\beta'_{2n,k} = \frac{n-1}{(n-1)(k+3)+1}$$

возрастает с ростом n. Поэтому минимум $\beta'_{h,k}$ достигается при $h = 2\lceil \frac{g}{2} \rceil$.

Теперь нам нужно сравнить полученные оценки с $\alpha_{g,k}$. *Вместо этого мы сравним полученные в пунктах* 2.1 *и* 2.2 *оценки друг с другом и покажем, что* $\alpha_{g,k}$ *равна минимальной из них.* Отдельно рассмотрим случаи разной четности g.

2a. $g = 2n + 2$.
В этом случае нам нужно сравнить $\beta'_{2n+2,k}$ и $\beta_{2n+2,k}$. Несложное вычисление показывает, что

$$\beta'_{2n+2,k} = \frac{n}{n(k+3)+1} < \frac{2n}{(2n+1)(k+2)} = \beta_{2n+2,k}$$

тогда и только тогда, когда $k < 2n$. Именно при $k < 2n = g - 2$ мы имеем $\alpha_{g,k} = \beta'_{2n+2,k}$, а при $k \geq g - 2$ мы имеем $\alpha_{g,k} = \beta_{g,k}$. Таким образом, теорема в случае четного g доказана.

2b. $g = 2n + 1$.
В этом случае нам нужно сравнить $\beta'_{2n+2,k}$ и $\beta_{2n+1,k}$. Несложное вычисление показывает, что

$$\beta'_{2n+2,k} = \frac{n}{n(k+3)+1} < \frac{2n-1}{2n(k+2)} = \beta_{2n+1,k}$$

тогда и только тогда, когда $k < 2n - 1 - \frac{1}{n}$. Именно при $k < 2n - 1 = g - 2$ мы имеем $\alpha_{g,k} = \beta'_{2n,k}$, а при $k \geq g - 2$ мы имеем $\alpha_{g,k} = \beta_{g,k}$. Таким образом, разбор случая нечётного g завершает доказательство теоремы. □

4.1. Экстремальные примеры. Мы приведем бесконечную серию примеров графов, подтверждающую точность оценки из теоремы 2. Логика построения примера достаточно проста: мы построим такой граф, для которого все доказанные в теореме неравенства станут равенствами. Пусть $\ell(G) = k$, $g(G) = g$. Разберём два случая.

1. $k < g - 2$.
Пусть $n = [\frac{g+1}{2}]$. В рассматриваемом случае $\alpha_{g,k} = \beta'_{2n+2,k} = \frac{n}{n(k+3)+1}$. Пусть $B_{g,k}$ – это цикл длины $2n + 2$, у которого отмечена $n + 1$ вершина через одну. К каждой отмеченной вершине присоединим шип из $k + 1$ вершины. Отмеченные вершины будут точками сочленения в нашем графе, а неотмеченные – вершинами степени 2. Таким образом, никакие две вершины степени 2 графа $B_{g,k}$ не смежны. Тогда $v(B_{g,k}) = 2n + 2 + (n + 1)(k + 1) = (n + 3)(k + 1)$. На рисунке 5a изображен пример такого графа для $n = 2$ (то есть, $g = 5$ или $g = 6$) и $k = 2$.

Найдём $u(B_{g,k})$. В остовном дереве графа $B_{g,k}$ висячими вершинами будут все $n + 1$ висячие вершины этого графа (концы шипов). Так как удаление висячих вершин остовного дерева не должно нарушать связность, к ним можно добавить только одну вершину цикла, к которой не присоединен шип. Таким образом, $u(B_{g,k}) = n + 2$. Несложно проверить, что

$$u(B_{g,k}) = n + 2 = 2 + \frac{n}{n(k+3)+1} \cdot (v(B_{g,k}) - k - 2).$$

Следовательно, для графа $B_{g,k}$ оценка из теоремы 2 точна.

2. $k \geq g - 2$.

В рассматриваемом случае $\alpha_{g,k} = \beta_{g,k} = \frac{g-2}{(g-1)(k+2)}$. Пусть $B_{g,k}$ – это цикл длины g, в котором к каждой вершине присоединен шип из $k+1$ вершины. Тогда $v(B_{g,k}) = g(k+2)$. На рисунке 6а изображен пример такого графа для $g = 5$ и $k = 4$.

Легко видеть, что висячими вершинами в любом остовном дереве этого графа будут концы шипов и только они, поэтому $u(B_{g,k}) = g$. Несложно проверить, что

$$u(B_{g,k}) = g = 2 + \frac{g-2}{(g-1)(k+2)} \cdot (v(B_{g,k}) - k - 2).$$

Следовательно, для графа $B_{g,k}$ оценка из теоремы 2 точна.

3. *Теперь покажем, как в обоих случаях собирать экстремальные примеры из графов $B_{g,k}$, как из деталей конструктора.*

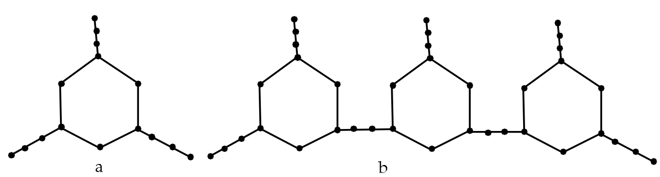

Рис. 5. Экстремальный пример при $k < g - 2$.

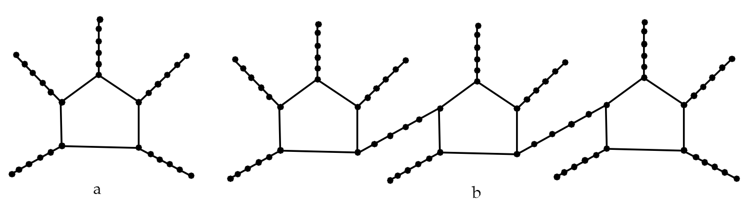

Рис. 6. Экстремальный пример при $k \geq g - 2$.

Пусть G – граф, удовлетворяющей соотношениям

$$u(G) = \alpha_{g,k} \cdot (v(G) - k - 2) + 2, \quad g(G) \geq g, \quad \ell(G) \leq k,$$

имеющий хотя бы одну висячую вершину a. Построим граф G': склеим вершину a графа G с концом одного из шипов графа $B_{g,k}$ и стянем после этого $k+1$ мост (рёбра приклеенного шипа графа $B_{g,k}$). В результате получится граф G', удовлетворяющий соотношениям

$$v(G') = v(G) + v(B_{g,k}) - k - 2, \quad g(G') \geq g, \quad \ell(G') \leq k.$$

По пункту 2 леммы 1 мы имеем $u(G') = \alpha_{g,k} \cdot (v(G') - k - 2) + 2$, то есть, граф G' также является экстремальным примером, подтверждающим точность оценки в теореме 2. В качестве первого графа мы возьмём $G = B_{g,k}$, после чего можем построить сколь угодно большие экстремальные примеры, приклеивая каждый раз по очередному графу $B_{g,k}$. Два получающихся таким образом графа можно видеть на рисунках 5b и 6b.

Литература

1. J. A. Storer, *Constructing full spanning trees for cubic graphs.* — Inform. Process. Lett. **13**, No. 1 (1981), 8–11.
2. J. R. Griggs, D. J. Kleitman, and A. Shastri, *Spanning trees with many leaves in cubic graphs.* — J. Graph Theory **13**, No. 6 (1989), 669–695.
3. D. J. Kleitman and D. B. West, *Spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **4**, No. 1 (1991), 99–106.
4. J. R. Griggs and M. Wu, *Spanning trees in graphs of minimum degree* 4 *or* 5. — Discrete Math. **104** (1992), 167–183.
5. N. Alon, *Transversal numbers of uniform hypergraphs.* — Graphs and Combinatorics **6** (1990), 1–4.
6. G. Ding, T. Johnson, and P. Seymour, *Spanning trees with many leaves.* — J. Graph Theory **37**, No. 4 (2001), 189–197.
7. Y. Caro, D. B. West, and R. Yuster, *Connected domination and spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **13**, No. 2 (2000), 202–211.
8. P. S. Bonsma, *Spanning trees with many leaves in graphs with minimum degree three.* — SIAM J. Discrete Math. **22**, No. 3 (2008), 920–937.
9. P. S. Bonsma and F. Zickfeld, *Spanning trees with many leaves in graphs without diamonds and blossoms.* LATIN 2008: Theoretical informatics, p. 531–543, Lecture Notes in Comput. Sci., 4957, Springer, Berlin (2008).
10. Н. В. Гравин, *Построение остовного дерева графа с большим количеством листьев.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **381** (2010), 31–46. English translation in "Journal of Mathematical Sciences", to appear.
11. Д. В. Карпов, *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 78–87. English translation in "Journal of Mathematical Sciences", to appear.

12. Ф. Харари, *Теория графов.* Мир, М. (1973). (Перевод с английского. F. Harary, *Graph theory,* 1969.)

Bankevich A. V., Karpov D. V. Bounds of a number of leaves of spanning trees.

We prove that every connected graph with s vertices of degree not 2 has a spanning tree with at least $\frac{1}{4}(s-2)+2$ leaves.

Let G be a connected graph of girth g with v vertices. Let maximal chain of successively adjacent vertices of degree 2 in the graph G does not exceed $k \geq 1$. We prove that G has a spanning tree with at least $\alpha_{g,k}(v(G)-k-2)+2$ leaves, where $\alpha_{g,k} = \frac{[\frac{g+1}{2}]}{[\frac{g+1}{2}](k+3)+1}$ for $k < g-2$; $\alpha_{g,k} = \frac{g-2}{(g-1)(k+2)}$ for $k \geq g-2$.

We present infinite series of examples showing that all these bounds are exact.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: anton.bankevich@gmail.com

Поступило 15 сентября 2011 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В.А.Стеклова РАН, Фонтанка 27,
191023 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dvk0@yandex.ru