Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 391, 2011 г.

А. В. Банкевич

ОЦЕНКИ КОЛИЧЕСТВА ВИСЯЧИХ ВЕРШИН В ОСТОВНЫХ ДЕРЕВЬЯХ В ГРАФАХ БЕЗ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Введение

В работе будут использоваться стандартные обозначения. Множество вершин графа G мы будем обозначать через $V(G)$, множество рёбер – через $E(G)$, для количества вершин и рёбер будем использовать обозначения $v(G)$ и $e(G)$ соответственно. Везде в работе графы не содержат петель и кратных рёбер.

Через $d_G(x)$ обозначим степень вершины x в графе G, минимальную степень вершины графа G, как обычно, обозначим через $\delta(G)$. Через $g(G)$ обозначим *обхват* графа G (то есть, длину его наименьшего цикла). Через $S(G)$ обозначим множество всех вершин графа G степени, не равной 2, а через $s(G)$ – их количество.

Определение 1. *Для связного графа G обозначим через $u(G)$ максимально возможное количество висячих вершин в остовном дереве графа G.*

Опубликовано несколько работ, в которых доказываются оценки снизу на $u(G)$. В 1981 году Линиал высказал гипотезу:

$$u(G) \geq \frac{\delta(G)-2}{\delta(G)+1}v(G)+c \quad \text{при} \quad \delta(G) \geq 3,$$

где константа $c > 0$ зависит только от $\delta(G)$. Для $\delta(G) = 3$ и $\delta(G) = 4$ утверждение гипотезы доказали Клейтман и Вест [4], для $\delta(G) = 5$ – Григгс и Ву [5]. Из работ [6–8] следует, что для достаточно больших $\delta(G)$ гипотеза Линиала неверна. Однако, для малых значений $\delta(G) > 5$ вопрос остается открытым.

В ряде работ рассматриваются остовные деревья в классе графов с дополнительными ограничениями вида запрета на какой-то подграф. Больше всего работ посвящено изучению остовных деревьев в графах

Ключевые слова: остовное дерево, висячие вершины, количество висячих вершин.

без K_4^- (полного подграфа на 4 вершинах без одного ребра). Сначала [3] было доказано, что $u(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}$ в связном кубическом графе без K_4^-. Позже Бонсма [9] доказал две интересные оценки для связного графа с $\delta(G) \geq 3$: $u(G) \geq \frac{v(G)+4}{3}$ для графа без треугольников (то есть, с $g(G) \geq 4$) и $u(G) \geq \frac{2v(G)+12}{7}$ для графа без K_4^-.

Эти результаты не дают ответа на вопрос, как оценить количество висячих вершин в связном графе с вершинами степеней 1 и 2. Недавно появились работы, в которых наличие вершин степени 1 и 2 в графе не мешает построению остовного дерева с достаточно большим количеством висячих вершин. В работе [10] для связного графа G с $g(G) \geq 4$ и v_3 вершинами степени хотя бы 3 доказана оценка $u(G) \geq \frac{v_3+4}{3}$. В работе [11] для связного графа G с $\delta(G) \geq 3$, v_3 вершинами степени 3 и v_4 вершинами степени хотя бы 4 доказана оценка $u(G) \geq \frac{2v_4}{5} + \frac{2v_3}{15}$.

В совместной статье автора и Д. В. Карпова [1] были рассмотрены графы с ограничениями на обхват и на длину цепочек вершин степени 2. Для таких ограничений была доказана оценка на $u(G)$ и приведена серия примеров, показывающая точность этой оценки. Единственный случай, который не был полностью разобран – это случай графа без вершин степени 2 (то есть когда максимальная длина цепочки вершин степени 2 равна нулю). В случае запрета на вершины степени 2 был разобран только случай без ограничения на обхват. Однако, формулы и серии экстремальных примеров для доказанных случаев легко обобщаются на случай графа без вершин степени 2. В результате возникает следующая гипотеза: для графа G без вершин степени 2 с обхватом по крайней мере g выполнено $u(G) \geq \frac{g-2}{2g-2}(v(G)-2)+2$. На самом деле, вместо запрета на вершины степени 2 можно просто их не считать. В результате гипотезу можно переформулировать следующим образом.

Гипотеза. *Для графа G с обхватом по крайней мере g выполнено $u(G) \geq \frac{g-2}{2g-2}(s(G)-2)+2$.*

Замечание. Если гипотеза верна для конкретного значения g, то оценка в гипотезе является точной.

Доказательство. Построим пример графа, для которого неравенство из гипотезы превращается в равенство. За основу возьмём граф G, состоящий из цикла длины g, к каждой вершине которого присоединена висячая вершина. Возьмём n таких графов и выстроим в цепочку. У каждой пары соседних графов выберем по висячей вершине и склеим. В результате получится граф на $(2g-1)n+1$ вершинах. Из них $(2g-2)n+2$ вершины имеют степень, не равную 2. Максимальное количество висячих вершин, которые можно получить в остовном дереве построенного графа – это $(g-2)n+2$. Но $(g-2)n+2 = \frac{g-2}{2g-2}((2g-2)n+2-2)+2$, что и следовало доказать. □

Для $g=3$, то есть при снятии ограничения на обхват, получается оценка $u(G) \geq \frac{1}{4}(s(G)-2)+2$, что совпадает с результатом, доказанным в [1]. В этой статье будет доказано, что гипотеза верна также и для $g=4$. Но, несмотря на хорошее начало, оказалось, что эта гипотеза неверна уже при $g=10$, что будет доказано во второй части статьи. Вопрос для $5 \leq g \leq 9$ остаётся открытым. Также остаётся неясным, какова же точная оценка на $u(G)$ при $g \geq 10$.

Доказательство гипотезы для $g=4$

Теорема 1. *В графе G не менее, чем с 2 вершинами и без треугольников выполнено*

$$u(G) \geq \frac{1}{3}(s-2)+2,$$

где s – количество вершин степени не равной двум.

Доказательство. Пусть U – множество всех висячих вершин графа G, K – множество всех вершин графа G, смежных с висячими, L – множество всех невисячих вершин графа G, не вошедших в K. M – множество вершин степени по крайней мере 4. Пусть $H = G - U$. Очевидно, граф H связен.

Доказательство будет проводиться методом спуска: утверждение теоремы для данного графа G будет сводиться к случаю меньших графов, при этом граф G_1 будет считаться меньше графа G_2, если $e(G_1) < e(G_2)$. Доказательство будет разбито на случаи, в каждом из которых будет предполагаться, что граф не отвечает условиям ни одного из уже разобранных случаев. Первые 3 случая полностью аналогичны пунктам 1, 2 и 4 теоремы 1 из статьи [1] и их разбор мы опустим.

1. *В графе G есть вершина a степени 2.*

2. *Граф H не двусвязен.*

3. *Существуют две смежные вершины из M.*

Следующий пункт будут уточнением пункта 3 из [1].

4. *Существует невисячая вершина, одновременно смежная с вершиной из M и вершиной из K.*

Заметим, что множества M и K могут пересекаться. В таком случае подойдёт любая невисячая вершина, смежная с вершиной из пересечения. В этом пункте мы используем следующую лемму из [1].

Лемма 1. *Пусть $a, b \in V(G)$ – смежные вершины, а подграф G' – компонента связности графа $G-a$, содержащая вершину b. Тогда, если b – точка сочленения графа G', то $u(G) \geq u(G')+1$.*

Перейдём к разбору пункта 4. Пусть (возможно, совпадающие) вершины $x \in K$ и $y \in M$ смежны с невисячей вершиной v. Применим лемму 1 для $a = v, b = x$. Поскольку v – невисячая, x всё ещё будет точкой сочленения после удаления v. Получаем $u(G) \geq u(G')+1$, где G' – компонента связности $G - v$, содержащая x. Причём G' содержит также и y, так как удаление v может отделить от графа только висячие вершины, смежные с v, а x и y – очевидно, невисячие.

Покажем, что $s(G) \leq s(G')+3$. Поскольку граф не удовлетворяет условию пункта 3 и, следовательно, вершины M не смежны друг с другом, $v \notin M$ и $d_G(v) \leq 3$. После удаления v степень изменилась только у соседей v, значит $S(G) \setminus S(G')$ состоит из v и тех соседей v, чья степень в G' равна 2. Но всего соседей у v не больше трёх и среди них есть y, чья степень в G' не меньше 3. То есть $s(G) - s(G') \leq 3$.

Таким образом:

$$u(G) \geq u(G')+1 \geq \frac{s(G')-2}{3}+2+1 \geq \frac{s(G)-3-2}{3}+2+1 = \frac{s(G)-2}{3}+2.$$

5. *Существует вершина v, смежная хотя бы с двумя висячими вершинами.*

Обозначим висячие вершины, смежные с v, через x и y (если их больше двух, выберем любые две из них). Применим лемму 1 для $a = x, b = v$. Вершина v останется точкой сочленения после удаления x. При этом от удаления x количество вершин степени, отличной от 2, уменьшится максимум на 2: сама вершина x и, возможно, v. Таким образом $s(G) - s(G-x) \leq 2$, а значит можно провести цепочку неравенств, аналогичную приведённой в предыдущем пункте.

6. *Вершины L попарно несмежны.*

Из пунктов 1 и 4 мы знаем, что все вершины K имеют степень 3, причём не более двух рёбер из вершины множества K ведёт в вершины из L, так как одно ребро занято висячей вершиной. При этом все рёбра, инцидентные вершинам L, ведут в вершины K. То есть каждая вершина из L смежна по крайней мере с тремя вершинами из K. Таким образом, оценив с двух сторон количество рёбер, соединяющих вершины из K с вершинами из L, получим неравенство $3|L| \le 2|K|$. Поскольку каждая вершина из K не может быть соединена более, чем с одной висячей вершиной (так как иначе граф удовлетворял бы условиям предыдущего пункта), получаем, что каждая вершина множества K соединена ровно с одной висячей вершиной и, значит, $|U| = |K|$. Таким образом,

$$v(G) = |U| + |K| + |L| \le |U| + |U| + \frac{2}{3}|K| = \frac{8}{3}|U|.$$

Очевидно, $u(G) \ge |U|$. Разберём несколько подслучаев соотношения величин $u(G)$ и $|U|$.

6.1. $u(G) = |U|$.

Предположим, что L непусто. Пусть вершина $x \in L$, тогда удалив из графа все рёбра, инцидентные x, кроме одного, мы сделаем x висячей. Связность графа не нарушится, так как вершины L не могут быть точками сочленения. В результате мы получили уже по крайней мере $|U| + 1$ висячую вершину в графе, а значит и в остовном дереве, что противоречит предположению пункта. Но если L пусто, то каждая вершина множества K смежна ровно с двумя вершинами из K, а значит, поскольку граф связен, вершины K образуют цикл. Обозначим длину этого цикла через k. Поскольку обхват графа не меньше 4, то $k \ge 4$. Таким образом, в графе всего $2k \ge 8$ вершин: k вершин, составляющих цикл, и k висячих вершин – по одной на каждую вершину цикла. Итого:

$$\begin{aligned} u(G) = k = \frac{v(G)}{2} &= \frac{v(G)-2}{3} + 2 + \left(\frac{v(G)}{6} - \frac{4}{3}\right) \\ &\ge \frac{v(G)-2}{3} + 2 = \frac{s(G)-2}{3} + 2. \end{aligned}$$

6.2. $u(G) \ge |U| + 1$.

В этом случае получаем

$$u(G) \ge |U| + 1 \ge \frac{3}{8}v(G) + 1 = \frac{v(G)-2}{3} + 2 + \left(\frac{v(G)}{24} - \frac{1}{3}\right).$$

То есть для $v(G) \geq 8$ получаем

$$u(G) \geq \frac{v(G)-2}{3} + 2 + \left(\frac{v(G)}{24} - \frac{1}{3}\right) \geq \frac{v(G)-2}{3} + 2.$$

Заметим, что все графы, не содержащие треугольников и вершин степени 2, и имеющие не более семи вершин, являются деревьями. Единственное дерево, которое нельзя редуцировать по описанным ранее правилам – это граф, состоящий из двух смежных вершин, для которого наша оценка верна.

7. *Существуют смежные вершины p, $q \in L$, такие что граф $G - p - q$ связен.*

Последовательность вершин $X = x_1, x_2, \ldots, x_n$ назовём *маршрутом*, если для любого $1 \leq i < n$ существует ребро, соединяющее x_i и x_{i+1} и все эти рёбра различны. При этом одна вершина может встречаться в маршруте несколько раз. Через $G - X$ обозначим граф $G - x_1x_2 - x_2x_3 - \cdots - x_{n-1}x_n$, через $V(X)$ обозначим множество вершин, вошедших в маршрут X. Количество рёбер в маршруте назовём его длиной. Вершины x_1 и x_n назовём *граничными*, а все остальные – *внутренними*. Маршрут X назовём *хорошим*, если для него выполнены следующие свойства:

1° Граф $G - V(X)$ связен.

2° Все внутренние вершины X являются висячими в графе $G_1 = G - X$.

Рассмотрим маршрут $X_{\max}$ максимальной длины среди всех хороших маршрутов.

Лемма 2. *$X_{\max}$ существует и его длина по крайней мере* 1.

Доказательство. Рассмотрим маршрут, состоящий из одного ребра pq. Этот маршрут удовлетворяет свойствам 1° и 2°. Длина этого маршрута 1. Значит, множество хороших маршрутов непусто (то есть $X_{\max}$ существует) и длина $X_{\max}$ по крайней мере 1. □

Посмотрим, как могут выглядеть граничные вершины $X_{\max}$. Пусть x_1 смежна в графе G_1 с некоторой вершиной w. Поскольку $X_{\max}$ – маршрут максимальной длины, удовлетворяющий свойствам, значит либо $d_{G_1}(x_1) - 1 = d_{G_1 - wx_1}(x_1) \neq 1$, либо граф $G - V(X_{\max}) - w$ несвязен.

На рис. 1а приведён пример максимального по длине хорошего маршрута (рёбра маршрута проведены пунктирными линиями). Слева

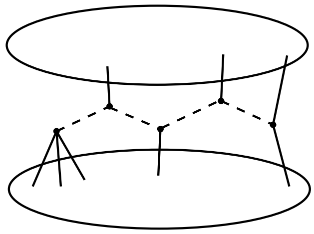

рис 1a

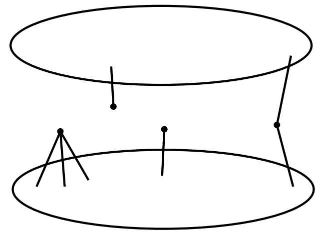

рис 1b

этот маршрут заканчивается вершиной степени 4, а справа – точкой сочленения графа $G - X$.

Теперь, в зависимости от того, какой из двух случаев реализован, подправим граф G_1 следующим образом: если для x_1 имеет место первый случай, то граф менять не будем (рис. 1b, левая граничная вершина). Если же $d_{G_1}(x_1) = 2$ и $G_1 - wx_1$ несвязен, то удалим x_1 из графа (рис. 1b, правая граничная вершина). По аналогии поступим с x_n (если она не совпадала с x_1). Построенный таким образом граф назовём G_2. Пусть в результате удалено было t вершин (t может быть равно 0, 1 или 2). Тогда $s(G_2) \geq s(G) - 3t$. Действительно, t вершин было удалено и ещё максимум у $2t$ вершин (их соседей в G_1) поменялась степень. Каждая из удалённых вершин была смежна с точкой сочленения, значит $u(G) \geq u(G_2) + t$, так как можно достроить оптимальное остовное дерево для графа G_2 до остовного дерева G, подвесив удалённые ранее t вершин на соответствующие точки сочленения графа G_2 (а значит, невисячие вершины остовного дерева графа G_2). В результате получаем следующие неравенства:

$$u(G) \geq u(G_2) + t \geq \frac{s(G_2) - 2}{3} + 2 + t \geq \frac{s(G) - 3t - 2}{3} + 2 + t = \frac{s(G) - 2}{3} + 2.$$

8. *Для любых двух смежных вершин $p, q \in L$ граф $G - p - q$ несвязен.*

Рассмотрим произвольную пару смежных вершин $p, q \in L$. Они не могут одновременно иметь степень по крайней мере 4, поскольку граф не был рассмотрен в пункте 3. Будем считать, что $d_G(p) = 3$.

Тогда $d_{G-q}(p) = 2$ и p – точка сочленения $G - q$. Следовательно, граф $G - p - q$ состоит из двух компонент связности и p соединена с одной вершиной из каждой компоненты.

Докажем лемму, дающую более точное описание ситуации.

Лемма 3. *Пусть G_1, G_2 – компоненты связности графа $G - p - q$, а x_1, x_2 – вершины из G_1 и G_2 соответственно, смежные с p. Тогда выполняются следующие утверждения.*

1) $x_1, x_2 \in K$.
2) $d_G(q) = 3$.

Доказательство. **1.** Предположим, что первый пункт утверждения леммы не выполнен. Не умаляя общности, можно считать, что $x_1 \in L$. Докажем, что в этом случае x_1 – точка сочленения графа G. Действительно, рассмотрим граф $G' = G - p$. Поскольку x_1 и p – смежные вершины, лежащие в L, граф $G' - x_1 = G - x_1 - p$ несвязен. То есть x_1 и q являются точками сочленения графа G'. Пусть G'_1 – компонента связности $G' - x_1$, содержащая q. Поскольку вершины G_2 не удалялись при построении $G' - x_1$, то G_2 целиком лежит внутри некоторой компоненты связности $G' - x_1$, а именно, внутри компоненты G'_1, так как q смежна с некоторой вершиной из G_2. А это значит, что все остальные компоненты связности $G' - x_1$ не пересекаются с G_2, то есть целиком лежат в G_1. Пусть G'_2 – произвольная из оставшихся компонент $G' - x_1$. Вершины из G'_2 могут быть смежны в графе G только друг с другом, с x_1 или с p. Но единственная вершина G_1, смежная с p – это x_1, следовательно, вершины G'_2 смежны только с x_1 и друг с другом, то есть x_1 – точка сочленения G. Вершины из L не могут быть точками сочленения G, так как в таком случае они были бы и точками сочленения H. Таким образом, $x_1 \notin L$ и не является висячей, значит $x_1 \in K$.

2. Если $d_G(q) \geq 4$, то $q \in M$. То есть у p есть сосед $q \in M$ и сосед $x_1 \in K$. Таким образом граф удовлетворяет условиям пункта 4, что противоречит предположению о том, что граф не соответствует требованиям всех предыдущих пунктов. □

Таким образом, и p, и q имеют степень 3, следовательно, если поменять их местами и снова применить эту лемму, то получим, что вершины y_1 и y_2 из G_1 и G_2 соответственно, смежные с q, также принадлежат K.

Теперь разберём 2 случая.

8.1. *x_1 не смежна с y_1 и x_2 не смежна с y_2.*

В этом случае (рис. 2a) построим граф G' следующим образом: стянем ребро pq. В результате получится точка сочленения степени 4.

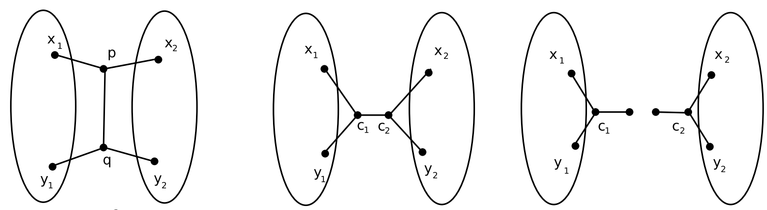

рис 2a рис 2b рис 2c

Затем снова разделим эту вершину на 2 смежные вершины c_1 и c_2 следующим образом: c_1 соединим с x_1 и y_1, c_2 соединим с x_2 и y_2 (рис. 2b).

Заметим, что такая операция была бы невозможна, если бы вершина x_1 была смежна с y_1 или x_2 с y_2, так как тогда в графе появились бы треугольники. Докажем, что $u(G) \geq u(G')$. Действительно, пусть T – остовное дерево графа G'. Вершины c_1 и c_2 являются точками сочленения G', а значит не могут быть висячими вершинами остовного дерева графа G'. Заменим c_1 и c_2 в дереве T обратно на p и q. При этой операции степени всех вершин сохраняются, а удалённые вершины c_1 и c_2 не были висячими, следовательно, количество висячих вершин в T не уменьшится. Нетрудно понять, что к графу G' можно применить пункт 2 (см. рис. 2c). Таким образом,

$$u(G) \geq u(G') \geq \frac{v(G')-2}{3} + 2 = \frac{v(G)-2}{3} + 2.$$

8.2. *x_1 смежна с y_1 или x_2 смежна с y_2.*

Не умаляя общности можно считать, что x_1 смежна с y_1. Поскольку x_1 и y_1 принадлежат K, их степени равны 3. Значит, G_1 состоит только из x_1, y_1 и смежных с ними висячих вершин. Рассмотрим граф $G' = G - G_1 - p - q$. Тогда для этого графа выполнено $s(G') = s(G) - 2 - v(G_1) - 2 = s(G) - 8$. Пусть T – остовное дерево G'. Соединим T с удалённым ранее подграфом ребром px_2 и удалим ребро pq. Вершина x_2 не является висячей вершиной T, так как она смежна с висячей, значит после склейки добавится 3 висячие вершины: q и висячие вершины, смежные с x_1 и y_1. То есть $u(G) \geq u(G') + 3$ и получаем:

$$u(G) \geq u(G')+3 \geq \frac{s(G')-2}{3}+2+3 \geq \frac{s(G)-8-2}{3}+2+3 > \frac{s(G)-2}{3}+2.$$

□

Пример графа с произвольным обхватом и малой величиной $u(G)$. Опровержение гипотезы для больших значений g

Теорема 2. *Для любого g существует сколь угодно большой граф G с обхватом по крайней мере g, для которого*

$$u(G) \leq \frac{1}{2}s(G) - \frac{1}{16}s(G) + \frac{1}{2}.$$

Замечание. Поскольку коэффициент $\frac{g-2}{2g-2}$ из гипотезы при возрастании g стремится к $\frac{1}{2}$, получаем, что с некоторого момента гипотеза неверна (даже асимптотически). Значение $g = 10$ – первое, при котором $\frac{g-2}{2g-2} > \frac{1}{2} - \frac{1}{16}$, а значит начиная с $g = 10$ гипотеза уже не может быть выполнена.

Доказательство. Рассмотрим достаточно большой граф H, все вершины которого имеют степень 3, с обхватом по крайней мере g. Существование такого графа является простым следствием классического результата о существовании графа со сколь угодно большим обхватом и при этом сколь угодно большой минимальной степенью вершины (см., например, [14], гл.3, теорема 1.1). В этом графе каждое ребро разобьём на два, поставив посередине новую вершину степени 2. Наконец, на каждую вершину степени 2 подвесим висячую вершину. Получившийся граф назовём G. Отметим несколько простых свойств графа G.

- Все вершины G имеют степени 1 или 3.
- Обхват графа G по крайней мере $2g$.
- Каждому остовному дереву T графа G можно сопоставить остовное дерево T_H графа H следующим образом: ребро e графа H является ребром T_H, если оба ребра, которые получились в результате разбиения e, лежат в T.

Висячими вершинами остовного дерева T графа G будут все висячие вершины графа G, а также некоторые висячие вершины T_H. Действительно, вершины графа G, которые не являются висячими и не входят в H – это вершины, с помощью которых разбивались рёбра графа H, но на каждой из этих вершин подвешена висячая вершина, значит сами они не могут быть висячими. Кроме того, висячие вершины T, входившие в H, должны быть висячими и в T_H. Посчитаем, какое максимальное количество висячих вершин могло получиться. Поскольку все вершины H имеют степень 3, получаем $e(H) = \frac{3}{2}v(H)$. При построении G появляется $2e(H)$ новых вершин, из которых $e(H)$ – висячие. Таким образом, $v(G) = 4v(H)$. Если в дереве T_H ровно t висячих вершин и x вершин степени 2, то

$$v(H) - 1 = e(T_H) \leq \frac{1}{2}(t + 2x + 3(v(H) - t - x)),$$

откуда можно оценить t через x:

$$u(T_H) = t \leq \frac{v(H) - x + 2}{2}.$$

Оценим, какое количество из этих t вершин могло остаться висячими также и в дереве T. Для этого удалим из H все рёбра дерева T_H. Поскольку T_H – остовное дерево, в получившемся графе все вершины будут иметь степень не больше 2, а значит граф разобьётся на компоненты связности, являющиеся изолированными вершинами, путями и циклами. При этом конечным вершинам путей будут соответствовать вершины, имеющие степень 2 в дереве T_H, а внутренним вершинам путей и вершинам циклов – висячие вершины T_H.

Рассмотрим одну из компонент связности и посмотрим, чему она соответствует в графе G. Каждое ребро превратится в конструкцию из вершины степени 3 и висячей вершины. Эта конструкция в дереве T должна быть подвешена на одну из вершин H и, если эта вершина была висячей в T_H, то в T она уже перестанет быть висячей. Таким образом каждое ребро пути или цикла делает хотя бы один из своих концов невисячим. В случае цикла длины l перестанут быть висячими по крайней мере $\frac{l}{2}$ вершин, а в случае пути длины l (состоящем из l рёбер) висячими перестанут быть по крайней мере $\frac{l-2}{2}$ вершин. В сумме длины всех путей и циклов дают как раз $e(H) - e(T_H)$, а количество путей – это $\frac{x}{2}$, так как каждому пути соответствуют ровно 2 вершины T_H степени 2. В результате перестанут быть висячими по крайней мере $\frac{1}{2}(e(H) - e(T_H)) - \frac{x}{2}$ вершин. Таким образом,

$$\begin{aligned}
u(T) &\leq e(H) + u(T_H) - \frac{e(H) - e(T_H) - x}{2} \\
&\leq \frac{3}{2}v(H) + \frac{v(H) - x + 2}{2} - \frac{\frac{3}{2}v(H) - v(H) + 1 - x}{2} \\
&= 2v(H) - \frac{v(H)}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}v(G) - \frac{1}{16}v(G) + \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Теперь достаточно вспомнить, что в графе G нет вершин степени 2, а значит $s(G) = v(G)$ и мы получили необходимое неравенство для любого остовного дерева T. $\square$

Литература

1. А. В. Банкевич, Д. В. Карпов, *Оценки количества висячих вершин в остовных деревьях.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **391** (2011), 18–34.
2. J. A. Storer, *Constructing full spanning trees for cubic graphs.* — Inform. Process. Lett. **13** (1981), No. 1, 8–11.
3. J. R. Griggs, D. J. Kleitman, A. Shastri, *Spanning trees with many leaves in cubic graphs.* — J. Graph Theory **13** (1989), No. 6, 669–695.
4. D. J. Kleitman, D. B. West, *Spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **4** (1991), No. 1, 99–106.
5. J. R. Griggs, M. Wu, *Spanning trees in graphs of minimum degree* 4 *or* 5. — Discr. Math. **104** (1992), 167–183.
6. N. Alon, *Transversal numbers of uniform hypergraphs.* — Graphs and Combinatorics **6** (1990), 1–4.
7. G. Ding, T. Johnson, P. Seymour, *Spanning trees with many leaves.* — J. Graph Theory **37** (2001), No. 4, 189–197.
8. Y. Caro, D. B. West, R. Yuster, *Connected domination and spanning trees with many leaves.* — SIAM J. Discrete Math. **13** (2000), No. 2, 202–211.
9. P. S. Bonsma, *Spanning trees with many leaves in graphs with minimum degree three.* — SIAM J. Discrete Math.**22** (2008), No. 3, 920–937.
10. P. S. Bonsma, F. Zickfeld, *Spanning trees with many leaves in graphs without diamonds and blossoms.* — LATIN 2008: Theoretical Informatics, Lect. Notes Comput. Sci., **4957**, Springer-Verlag, Berlin (2008), pp. 531–543.
11. Н. В. Гравин, *Построение остовного дерева графа с большим количеством листьев.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 31–46.
12. Д. В. Карпов, *Остовное дерево с большим количеством висячих вершин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **381** (2010), 78–87.
13. Ф. Харари, *Теория графов.* Мир, Москва, 1973.
14. Béla Bolobás, *Extremal graph Theory.* Academic Press, 1978.

Bankevich A. V. Bounds of a number of leaves of spanning trees in graphs without triangles.

We prove that for every connected graph with girth at least 4 and s vertices of degree not 2 there is a spanning tree with at least $\frac{1}{3}(s-2)+2$ leaves. We describe series of examples showing that this bound is tight. This result, together with the bound for graphs with no limit on the girth (in such graphs one can construct a spanning tree with at least $\frac{1}{4}(s-2)+2$ leaves) leads to the hypothesis that for a graph with girth at least g, there exists a spanning tree with at least $\frac{g-2}{2g-2}(s-2)+2$ leaves. We prove that this conjecture fails for $g \geq 10$ and the bound cannot exceed $\frac{7}{16}s+\frac{1}{2}$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: anton.bankevich@gmail.com

Поступило 28 сентября 2011 г.