Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 390, 2011 г.

А. А. Осиненко

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОЙ УНИТАРНОЙ ГРУППЕ

Введение

Группа $U(\infty)$, элементами которой являются бесконечные унитарные матрицы $U = [U_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots$, для которых $U_{ij} = \delta_{ij}$ для достаточно большого $i + j$, наряду с группой $S(\infty)$ является примером "большой" группы. Согласно идее, развиваемой в работах [4, 5], основной задачей гармонического анализа на такой группе является разложение наиболее "естественных" унитарных представлений этой группы на неприводимые.

Пусть $G = U(\infty) \times U(\infty)$, K – диагональная подгруппа в G, изоморфная $U(\infty)$. Тогда (G, K) является парой Гельфанда. В работе [4] было построено семейство T_{zw} представлений, зависящее от двух комплексных параметров z и w, связанных условием $\mathrm{Re}(z + w) > -\frac{1}{2}$. Для любых таких z и w представление T_{zw} может быть представлено в виде прямого интеграла без кратностей от неприводимых сферических (т.е. обладающих выделенным циклическим K-инвариантным вектором) представлений группы G, которые параметризуются точками множества Ω, определяемого в разделе 1. Таким образом, класс эквивалентности представления T_{zw} полностью определяется классом эквивалентности мер на Ω. Последний называется спектральным типом представления T_{zw}.

Спектральный тип представления T_{zw} существенно зависит от того, являются ли z и w целыми. Случай нецелых z и w был исследован в работе [1]. В настоящей работе разобран случай целых z и w. Представление T_{zw} разлагается в прямую сумму подпредставлений T_{pqrs}, которые мы называем его блоками. В работе показано, что спектральный тип представления T_{zw} определяется набором мер на конечномерных гранях $\Omega(p, q; r, s) \subset \Omega$, определенных в разделе 1. Аналогичный

Ключевые слова: некоммутативный гармонический анализ, бесконечномерная унитарная группа, характеры, граф Гельфанда–Цетлина, спектральные меры, формула Густафсона.

Работа поддержана грантом RFBR-CNRS 10-01-93114.

результат для группы $S(\infty)$ и однопараметрического семейства представлений T_z для целого z был получен в работе [5].

Автор глубоко благодарен Г. И. Ольшанскому за постановку задачи и постоянное внимание к работе и В. Горину за ценные замечания.

§1. Характеры и граф Гельфанда–Цетлина

В этом разделе мы сформулируем некоторые утверждения, касающиеся характеров произвольных топологических групп и бесконечномерной унитарной группы в частности. Доказательства утверждений, приводимых в разделах 1 и 2, можно найти в [4] и ссылках внутри.

Определение 1. Пусть K – топологическая группа. Характером этой группы будем называть непрерывную комплекснозначную функцию χ на K, удовлетворяющую следующим трем условиям:

(1) χ центральна, т.е. постоянна на классах сопряженности группы K;
(2) χ положительно определена, т.е. для любого конечного числа элементов $g_1, \dots, g_n$ группы K матрица $[\chi(g_j^{-1} g_i)]_{1 \le i,j \le n}$ эрмитова и неотрицательна;
(3) $\chi(e) = 1$, где e – единичный элемент группы K.

Множество всех характеров группы K обозначим через $\mathfrak{X}(K)$. Очевидно, что $\mathfrak{X}(K)$ является выпуклым множеством. Экстремальные точки этого множества называются экстремальными характерами.

В данной работе в качестве K будет выступать бесконечномерная унитарная группа $U(\infty) = \cup_{N \ge 1} U(N)$, являющаяся индуктивным пределом унитарных групп $U(N)$, состоящих из унитарных матриц размера $N \times N$. При этом вложение $U(N)$ в $U(N+1)$ устроено следующим образом: мы отождествляем $U(N)$ с подгруппой в $U(N+1)$ тех матриц, которые оставляют неподвижным $(N+1)$-й базисный вектор. Таким образом, $U(\infty)$ есть группа бесконечных унитарных матриц $U = [U_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \dots$, у которых лишь конечное число элементов U_{ij} отлично от δ_{ij}. Снабдим $U(\infty)$ топологией индуктивного предела. В этой топологии $U(\infty)$ не является локально компактной группой.

Классы сопряженных элементов группы $U(N)$ параметризуются спектром унитарных матриц, т.е. неупорядоченным набором комплексных чисел $u_1, \dots, u_N$ по модулю равных 1. Очевидно тогда, что

классы сопряженных элементов группы $U(\infty)$ параметризуются счетными наборами комплексных чисел $(u_1, \ldots, u_n, \ldots)$, из которых лишь конечное число отлично от 1; упорядочивание u_i несущественно.

Обозначим через $\mathbb{R}^\infty$ произведение счетного числа копий $\mathbb{R}$ и положим

$$\mathbb{R}^{4\infty+2} = \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R}^\infty \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$$

Обозначим через $\Omega \subset \mathbb{R}^{4\infty+2}$ подмножество таких шестерок

$$\omega = (\alpha^+, \beta^+; \alpha^-, \beta^-; \delta^+, \delta^-),$$

что

$$\alpha^\pm = (\alpha_1^\pm \geq \alpha_2^\pm \ldots \geq 0) \in \mathbb{R}^\infty, \;\; \beta^\pm = (\beta_1^\pm \geq \beta_2^\pm \ldots \geq 0) \in \mathbb{R}^\infty,$$
$$\sum_{i=1}^\infty (\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm) < \infty, \;\; \beta_1^+ + \beta_1^- \leq 1.$$

Положим

$$\gamma^\pm = \delta^\pm - \sum_{i=1}^\infty (\alpha_i^\pm + \beta_i^\pm) \geq 0.$$

Для любого $\omega \in \Omega$ определим функцию $\chi^{(\omega)}$ на $U(\infty)$:

$$\chi^{(\omega)}(U) = \prod_{u \in \operatorname{Spec} U} \left\{ e^{\gamma^+(u-1)+\gamma^-(u^{-1}-1)} \right.$$
$$\left. \prod_{i=1}^\infty \frac{1+\beta_i^+(u-1)}{1-\alpha_i^+(u-1)} \frac{1+\beta_i^-(u^{-1}-1)}{1-\alpha_i^-(u^{-1}-1)} \right\},$$

где U – матрица из $U(\infty)$, а произведение берется по всем ее собственным значениям. Все кроме конечного числа собственных значений равны 1, поэтому произведение по u в действительности конечно. Произведение по i сходится, так как сумма параметров конечна. Числа $\alpha_i^\pm$, $\beta_i^\pm$ и $\gamma^\pm$ (или $\delta^\pm$) называются параметрами Войкулеску (см. [6]).

Теорема 1.1. *Функции $\chi^{(\omega)}$, где ω пробегает множество Ω, есть в точности экстремальные характеры группы $U(\infty)$.*

Теорема 1.2. *Для любого характера χ группы $U(\infty)$ существует и единственна такая вероятностная мера P на топологическом пространстве Ω, что*

$$\chi(U) = \int_\Omega \chi^{(\omega)}(U) P(d\omega), \quad U \in U(\infty).$$

Мера P называется спектральной мерой характера χ.

Пусть p, q, r, s – целые числа. Если все они неотрицательны, то обозначим через $\Omega(p, q; r, s) \subset \Omega$ подмножество тех $\omega \in \Omega$, для которых

$$\alpha^+_{p+1} = \alpha^+_{p+2} = \ldots = 0, \quad \beta^+_{q+1} = \beta^+_{q+2} = \ldots = 0,$$
$$\alpha^-_{r+1} = \alpha^-_{r+2} = \ldots = 0, \quad \beta^-_{s+1} = \beta^-_{s+2} = \ldots = 0,$$
$$\delta^+ = \sum(\alpha^+_i + \beta^+_i), \quad \delta^- = \sum(\alpha^-_i + \beta^-_i).$$

Если же $p, r, s \geq 0$, $q < 0$ и $s \geq -q$, то через $\Omega(p, q; r, s) \subset \Omega$ обозначим подмножество тех $\omega \in \Omega$, для которых

$$\alpha^+_{p+1} = \alpha^+_{p+2} = \ldots = 0, \quad \beta^+_1 = \beta^+_2 = \ldots = 0,$$
$$\alpha^-_{r+1} = \alpha^-_{r+2} = \ldots = 0, \quad \beta^-_1 = \ldots = \beta^-_{-q} = 1, \quad \beta^-_{s+1} = \beta^-_{s+2} = \ldots = 0,$$
$$\delta^+ = \sum(\alpha^+_i + \beta^+_i), \quad \delta^- = \sum(\alpha^-_i + \beta^-_i).$$

В случае $p, r, q \geq 0$, $s < 0$ и $q \geq -s$ определение множествам $\Omega(p, q; r, s)$ дается аналогично. В любом случае его размерность равна $p+q+r+s$.

Неприводимые представления группы $U(N)$ параметризуются упорядоченными наборами из N целых чисел $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N$, которые называются сигнатурами. При этом N называется длиной сигнатуры λ. Множество всех сигнатур длины N обозначим через $\mathbb{GT}_N$. Графом Гельфанда–Цетлина называется градуированный граф $\mathbb{GT} = \sqcup_{N=0}^\infty \mathbb{GT}_N$. Две вершины $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ соединены ребром, если $\lambda \prec \nu$, т.е. выполнено соотношение перемежаемости:

$$\nu_1 \geq \lambda_1 \geq \nu_2 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N \geq \nu_{N+1}.$$

При этом мы считаем, что $\mathbb{GT}_0$ состоит из одного элемента, обозначаемого через $\varnothing$, и что этот элемент соединен ребром со всеми $\lambda \in \mathbb{GT}_1$.

Соотношение перемежаемости $\lambda \prec \nu$ возникает в правиле ветвления Гельфанда–Цетлина для неприводимых характеров унитарных групп:

$$\chi^\nu|_{U(N)} = \sum_{\lambda:\ \lambda \prec \nu} \chi^\lambda,$$

где χ^λ – характер того неприводимого представления группы $U(N)$, которое отвечает сигнатуре λ. Размерность этого представления вычисляется по формуле Вейля:

$$\mathrm{Dim}_N \lambda = \prod_{1\le i<j\le N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j-i}.$$

Для любых двух сигнатур $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ положим

$$q(\lambda,\nu) = \begin{cases} \frac{\mathrm{Dim}_N \lambda}{\mathrm{Dim}_{N+1} \lambda}, & \lambda \prec \nu, \\ 0, & \lambda \not\prec \nu. \end{cases}$$

При этом мы считаем, что $q(\varnothing,\lambda) = 1$ для любой сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_1$. Числа $q(\nu,\lambda)$ называются коперeходными вероятностями графа Гельфанда–Цетлина и удовлетворяют соотношению

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N} q(\lambda,\nu) = 1 \text{ для любой } \nu \in \mathbb{GT}_{N+1}.$$

Предположим, что для каждого $N = 0,1,\ldots$ задана вероятностная мера P_N на дискретном множестве $\mathbb{GT}_N$. Семейство $\{P_N\}$ называется когерентной системой мер, если

$$P_N(\lambda) = \sum_{\nu\in\mathbb{GT}_{N+1}} q(\lambda,\nu) P_{N+1}(\nu), \quad N = 0,1,\ldots,\lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

Теорема 1.3. *Существует взаимно однозначное соответствие $\chi \leftrightarrow \{P_N\}$ между характерами группы $U(\infty)$ и когерентными системами мер на графе Гельфанда–Цетлина. Это соответствие задается соотношением*

$$\chi_N = \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N} P_N(\lambda)\tilde\chi^\lambda, \quad \chi_N = \chi|_{U(N)}, \quad N = 1,2,\ldots,$$

где $\tilde\chi^\lambda(u) = \frac{\chi^\lambda(u)}{\chi^\lambda(e)}$ – нормированный характер.

Замечание 1.4. Пусть χ – произвольный характер. Тогда для любого целого k функция $\chi \otimes \det^k(\cdot)$, определенная как поточечное произведение $\chi(U)\det^k(U)$, также является характером. При этом если χ экстремален, то и $\chi\otimes\det^k(\cdot)$ также экстремален. В терминах параметров Войкулеску умножение на $\det(\cdot)$ сводится к следующему преобразованию:

$$\beta^+ \to (1-\beta_1^-, \beta_1^+, \beta_2^+, \ldots), \quad \beta^- \to (\beta_2^-, \beta_3^-, \ldots).$$

В терминах когерентных систем умножение на $\det(\cdot)$ эквивалентно преобразованию $P_N(\lambda) \to P_N(\lambda + (1, \ldots, 1))$.

Для заданной сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ обозначим через λ^+ и λ^- ее положительную и отрицательную части. Они являются диаграммами Юнга, связанными условием $l(\lambda^+) + l(\lambda^-) \leq N$, где $l(\cdot)$ – количество ненулевых строк в диаграмме Юнга. Для диаграммы Юнга μ обозначим через $d(\mu)$ количество клеток в ее диагонали и введем модифицированные координаты Фробениуса:

$$\bar{p}_i(\mu) = \mu_i - i + \frac{1}{2}, \quad \bar{q}_i(\mu) = \mu'_i - i + \frac{1}{2}, \quad i = 1, \ldots, d(\mu),$$

где μ' – сопряженная к μ диаграмма Юнга. Положим

$$\bar{p}_i(\mu) = \bar{q}_i(\mu) = 0, \quad i = d(\mu) + 1, d(\mu) + 2, \ldots.$$

Для любого $N = 1, 2, \ldots$ вложим множество $\mathbb{GT}_N$ в Ω следующим образом:

$$\mathbb{GT}_N \ni \lambda \mapsto \omega = (\bar{\alpha}^+, \bar{\alpha}^-, \bar{\beta}^+, \bar{\beta}^-, \bar{\delta}^+, \bar{\delta}^-) \in \Omega,$$

$$\bar{\alpha}^\pm = \frac{\bar{p}_i(\lambda^\pm)}{N}, \quad \bar{\beta}^\pm = \frac{\bar{q}_i(\lambda^\pm)}{N} \ (i = 1, 2, \ldots), \quad \bar{\delta}^\pm = \frac{|\lambda^\pm|}{N},$$

где $|\mu|$ обозначает количество клеток в диаграмме Юнга μ. Данное вложение обозначим через $\bar{\imath}_N$.

Теорема 1.5. *Пусть χ – произвольный характер группы $U(\infty)$, P – его спектральная мера и $\{P_N\}$ – когерентная система, соответствующая χ. Тогда образы мер P_N при вложении $\bar{\imath}_N$ слабо сходятся к мере P.*

Пусть $G = U(\infty) \times U(\infty)$, K – диагональная подгруппа в G, канонически изоморфная $U(\infty)$, и T — унитарное представление группы G в некотором гильбертовом пространстве H. Вектор $\xi \in H$ называется циклическим, если линейная оболочка всех векторов $T(g)\xi$, $g \in G$, плотна в H. Если вектор ξ является циклическим, инвариантным относительно действия подгруппы K и $\|\xi\| = 1$, то пара (T, ξ) называется сферическим представлением. При этом вектор ξ называется сферическим вектором.

Обозначим через Φ множество всех непрерывных функций на G, являющихся положительно определенными, K-биинвариантными и нормированными в единице e группы G. Такие функции называются

сферическими функциями. Если (T, ξ) – сферическое представление пары (G, K), то матричный коэффициент

$$\varphi(g) = (T(g)\xi, \xi), \quad g \in G,$$

соответствующий сферическому вектору, является сферической функцией. Отображение $(T, \xi) \mapsto \varphi$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между классами эквивалентности сферических представлений и сферическими функциями. При этом экстремальным сферическим функциям соответствуют неприводимые сферические представления.

Между множеством характеров $\mathfrak{X}(K) = \mathfrak{X}(U(\infty))$ и множеством сферических функций Φ также существует взаимно однозначное соответствие, заданное следующим образом:

$$\chi(U) = \varphi(U, 1), \quad \varphi(U_1, U_2) = \chi(U_1 U_2^{-1}), \quad U, U_1, U_2 \in U(\infty).$$

При этом биекция $\chi \leftrightarrow \varphi$ является также изоморфизмом выпуклых множеств. Таким образом, экстремальным характерам соответствуют экстремальные сферические функции.

Так как (G, K) является парой Гельфанда, для любого неприводимого унитарного представления T группы G пространство K-инвариантных векторов имеет размерность 0 или 1. Значит, если T обладает ненулевым K-инвариантным вектором ξ, то ξ единственен с точностью до умножения на число. При этом этот вектор ξ автоматически является циклическим, так как представление T неприводимо и $\xi \neq 0$. Таким образом, выбирая $\|\xi\| = 1$, получаем сферическое представление (T, ξ). Неединственность выбора вектора ξ заключается только в возможности его умножения на число по модулю равное 1, что не влияет на сферическую функцию $\varphi(g) = (T(g)\xi, \xi)$. Из всего вышесказанного следует, что неприводимые сферические представления пары (G, K) параметризуются точками $\omega \in \Omega$.

§2. Конструкция представлений T_{zw}

Введем следующие обозначения:

$$G(N) = U(N) \times U(N) \subset G, \quad K(N) = \operatorname{diag} U(N) \subset K, \quad N = 1, 2, \ldots.$$

Группа $G(N)$ действует на $U(N)$ по правилу

$$(U, (U_1, U_2)) \mapsto U_2^{-1} U U_1, \quad U \in U(N), \quad (U_1, U_2) \in G(N).$$

Пусть $N \geq 2$. Матрицу $U \in U(N)$ запишем в блочном виде, соответствующем разбиению $N = (N-1)+1$:

$$U = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

т.е. $D = U_{NN}$ – комплексное число, A – матрица размера $(N-1) \times (N-1)$. Положим

$$p_N(U) = \begin{cases} A - B(1+D)^{-1}C, & D \neq -1, \\ A, & D = -1. \end{cases}$$

Лемма 2.1. *Отображение p_N задает проекцию $U(N) \to U(N-1)$, коммутирующую с действием группы $G(N-1)$, т.е. с левыми и правыми сдвигами на элементы группы $U(N-1)$.*

Мы будем называть p_N канонической проекцией. Проекция p_N непрерывна на открытом подмножестве в $U(N)$, состоящем из тех матриц U, для которых $U_{NN} \neq -1$, но не является непрерывной на всей группе $U(N)$. Тем не менее, p_N является борелевским отображением, поэтому для любой борелевской меры на $U(N)$ определен ее образ при отображении p_N, являющийся борелевской мерой на $U(N-1)$.

Пусть μ_N – нормированная мера Хаара на $U(N)$. Тогда из леммы 2.1 следует, что образ меры μ_N при отображении p_N является инвариантной вероятностной мерой на $U(N-1)$, а значит, совпадает с μ_{N-1}.

Пусть $\mathfrak{D} = \{D \in \mathbb{C} \colon |D| \leq 1\}$ – замкнутый единичный круг. Определим отображение

$$\varepsilon_N \colon U(N) \to \mathfrak{D}, \quad U \mapsto D = U_{NN}.$$

Обозначим через ν_N образ меры μ_N при этом отображении. Тогда ν_N – вероятностная мера на $\mathfrak{D}$.

Лемма 2.2.

$$\nu_N(dD) = \mathrm{const}(1-|D|^2)^{N-2} l(dD),$$

где l – мера Лебега на $\mathfrak{D}$.

Объединим p_N и ε_N в одно отбражение:

$$\tilde{p}_N \colon U(N) \to U(N-1) \times \mathfrak{D}.$$

Лемма 2.3. *Образ меры μ_N при отображении $\tilde{p}_N$ совпадает с*

$$\mu_{N-1} \times \nu_N.$$

Положим $H^N = L^2(U(N), \mu_N)$ и обозначим через Reg^N бирегулярное представление группы $G(N)$ в H^N:

$$(\mathrm{Reg}^N(g)f)(U) = f(U_2^{-1}UU_1), \quad f \in H^N,\ U \in U(N),$$
$$g = (U_1, U_2) \in G(N).$$

Пусть $H_0^N \subset H^N$ — подпространство функций, зависящих только от $\tilde{p}_N(\cdot)$.

Лемма 2.4. *Подпространство H_0^N является $G(N-1)$-инвариантным. Существует естественная изометрия*

$$H_0^N \simeq H^{N-1} \otimes W^N, \quad W^N = L^2(\mathfrak{D}, \nu_N).$$

Из леммы 2.4 следует, что любой единичный вектор $v \in W^N$ определяет вложение $\mathrm{Reg}^{N-1} \to \mathrm{Reg}^N$:

$$H^{N-1} \ni f \mapsto f \otimes v \in H_0^N \subset H^N.$$

Пусть $U(N)' \subset U(N)$ – подмножество тех унитарных матриц, множество собственных значений которых не содержит -1. Для любых комплексных чисел z и w функция

$$f_{z,w;N}(U) = \det((1+U)^z(1+U^{-1})^w)$$

корректно определена на $U(N)'$. При этом если $u_1, \ldots, u_N$ – собственные значения матрицы U, то

$$f_{z,w;N}(U) = \prod_{k=1}^{N}(1+u_k)^z(1+\bar{u}_k)^w.$$

На дополнении к $U(N)'$, являющимся множеством меры нуль относительно меры Хаара, доопределим эту функцию нулем.

Лемма 2.5. *Образ множества $U(N)'$ при отображении p_N совпадает с $U(N-1)'$.*

Лемма 2.6. *Для любой матрицы $U \in U(N)'$ имеет место следующая формула:*

$$f_{z,w;N}(U) = f_{z,w;N-1}(p_N(U))(1+D)^z(1+\bar{D})^w,$$

где $D = U_{NN} = \varepsilon_N(U) \in \mathfrak{D} \setminus \{-1\}$.

Лемма 2.7. *Функция* $v_{z,w;N}(D) = (1+D)^z(1+\bar{D})^w$ *принадлежит пространству* $L^2(\mathfrak{D},\nu_N)$, *если* $2\operatorname{Re} z + 2\operatorname{Re} w + N > 0$. *При этом*

$$\|v_{z,w;N}\|^2 = \int_{\mathfrak{D}} |(1+D)^z(1+\bar{D})^w|^2 \nu_N(dD) = \frac{\Gamma(N)\Gamma(N+z+\bar{z}+w+\bar{w})}{\Gamma(N+z+\bar{w})\Gamma(N+\bar{z}+w)}.$$

Лемма 2.8. *Пусть* $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$. *Тогда функция* $f_{z,w;N}$ *принадлежит пространству* $H^N = L^2(U(N),\mu_N)$, *и*

$$\|f_{z,w;N}\|^2 = \prod_{k=1}^{N} \frac{\Gamma(k)\Gamma(k+z+\bar{z}+w+\bar{w})}{\Gamma(k+z+\bar{w})\Gamma(k+\bar{z}+w)}.$$

Зафиксируем произвольные z, $w \in \mathbb{C}$. При достаточно большом N ($N > -2\operatorname{Re} z - 2\operatorname{Re} w$) вектор $v_{z,w;N} \in W^N$ корректно определен. Положим

$$v'_{z,w;N} = \frac{v_{z,w;N}}{\|v_{z,w;N}\|}.$$

Тогда $\|v'_{z,w;N}\| = 1$, и, пользуясь леммой 2.4, можно определить изометрическое вложение $L^N_{z,w}\colon H^{N-1} \to H^N$,

$$H^{N-1} \ni f \mapsto f \otimes v'_{z,w;N} \in H^N,$$

коммутирующее с действием группы $G(N-1)$. Значит, существует гильбертово пространство H, являющееся индуктивным пределом $H = \varinjlim H^N$, и унитарное представление $\varinjlim \operatorname{Reg}^N$ в пространстве H. Обозначим это представление через $T_{z,w}$.

Если $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$, то все функции $f_{z,w;N}$ лежат в H^N и мы можем нормировать их:

$$f'_{z,w;N} = \frac{f_{z,w;N}}{\|f_{z,w;N}\|}.$$

Тогда существует выделенный вектор

$$\xi_0 = \varinjlim f'_{z,w;N} \in H.$$

Он является K-инвариантным, так как все функции $f_{z,w;N}$ постоянны на классах сопряженности. Отметим, что определение выделенного вектора имеет смысл только при $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$.

Лемма 2.9. *Пусть* $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$. *Тогда*

$$f'_{z,w;N} = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} a_{z,w;N}(\lambda)\chi^\lambda,$$

где

$$a_{z,w;N}(\lambda) = C_{z,w;N}\,\mathrm{Dim}_N\,\lambda \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\Gamma(z-\lambda_i+i)\Gamma(w+N+1+\lambda_i-i)}, \quad (1)$$

а

$$C_{z,w;N} = \prod_{i=1}^{N} \sqrt{\frac{\Gamma^2(z+w+i)\Gamma^2(i)\Gamma(i+\bar z+w)\Gamma(i+z+\bar w)}{\Gamma(i)\Gamma(i+z+\bar z+w+\bar w)}}.$$

Лемма 2.10.

$$\chi_{z,w}|_{U(N)} = \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N} P_N(\lambda\,|\,z,w)\tilde\chi^\lambda,$$

где $P_N(\lambda\,|\,z,w) = |a_{z,w;N}(\lambda)|^2$.

Доказательство.

$$\begin{aligned}\chi_{z,w}(U) = (T_{z,w}(U,1)\xi_0,\xi_0) &= \int_{U(N)} f'_{z,w;N}(VU)\overline{f'_{z,w;N}(V)}\mu_N(dV)\\ &= \sum_{\lambda,\mu} a_{z,w;N}(\lambda)\overline{a_{z,w;N}(\mu)}\int_{U(N)}\chi^\lambda(VU)\overline{\chi^\mu(V)}\mu_N(dV)\\ &= \sum_\lambda |a_{z,w;N}(\lambda)|^2\tilde\chi^\lambda(U).\end{aligned}$$

□

Замечание 2.11. Нетрудно видеть, что

$$P_N(\lambda+(1,\dots,1)\,|\,z+1,w-1) = P_N(\lambda\,|\,z,w).$$

Значит, согласно замечанию 1.4, имеем $\chi_{z+1,w-1} = \chi_{z,w}\otimes\det(\cdot)$.

§3. Коммутант и разложение на блоки

Пусть $P_N : H \to H^N$ – ортопроектор на H^N, $H(\lambda)\subset H^N$ – пространство представления $\pi^\lambda\times(\pi^\lambda)^*$ и $P(\lambda) : H\to H(\lambda)$ – ортопроектор на $H(\lambda)$. Проекторы $P(\lambda)$, $\lambda\in\mathbb{GT}_N$, попарно ортогональны, и их сумма равна P_N. Обозначим через $\mathcal{A}$ коммутант представления T_{zw}, т.е. алгебру всех ограниченных операторов в H, коммутирующих с представлением T_{zw}.

Предложение 3.1. *Коммутант $\mathcal{A}$ является коммутативной алгеброй.*

Доказательство. Пусть $A, B \in \mathcal{A}$. Для любого N операторы $P_N A P_N$ и $P_N B P_N$, рассматриваемые как операторы в пространстве H^N, коммутируют с представлением Reg^N. Поскольку кратность вхождения каждого неприводимого представления в Reg^N равна 1, то коммутант представления Reg^N коммутативен. Следовательно,

$$P_N A P_N B P_N = P_N B P_N A P_N \quad \text{для всех } N = 1, 2, \dots. \tag{2}$$

Проекторы P_N сильно сходятся к 1 при $N \to \infty$. Так как операция умножения непрерывна в сильной операторной топологии на каждом операторном шаре, а нормы операторов в равенстве (2) не превосходят максимума из чисел 1, $\|A\|$, $\|B\|$, переходя в (2) к пределу при $N \to \infty$, получаем, что $AB = BA$. $\square$

Отождествим изометрическое вложение $L^N_{zw} : H^N \to H^{N+1}$ с частично изометрическим оператором $L^N_{zw} P_N$ в H. Для любых $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$, таких, что $\lambda \prec \nu$, зафиксируем изометрическое вложение $E(\lambda, \nu) : H(\lambda) \to H(\nu)$, коммутирующее с действием группы $G(N)$. Выбор $E(\lambda, \nu)$ единственен с точностью до множителя по модулю равного 1. Отождествим $E(\lambda, \nu)$ с частично изометрическим оператором $E(\lambda, \nu) P(\lambda)$, действующим во всем пространстве H.

Для любой пары сигнатур $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ рассмотрим оператор $P(\nu) L^N_{zw} P(\lambda)$. Этот оператор сплетает представления $\pi^\lambda \times (\pi^\lambda)^*$ и $(\pi^\nu \times (\pi^\nu))^*|_{G(N)}$. Значит, он равен 0, если $\lambda \not\prec \nu$. Если $\lambda \prec \nu$, то этот оператор пропорционален $E(\lambda, \nu)$:

$$P(\nu) L^N_{zw} P(\lambda) = \alpha_{zw}(\lambda, \nu) E(\lambda, \nu), \quad \lambda \prec \nu.$$

Положим

$$p_{zw}(\lambda, \nu) = |\alpha_{zw}(\lambda, \nu)|^2, \quad \lambda \prec \nu.$$

Очевидно, что эта функция не зависит от выбора $E(\lambda, \nu)$. Для любого $\xi \in H(\lambda)$ имеем

$$\|P(\nu)\xi\|^2 = \begin{cases} p_{zw}(\lambda, \nu)\|\xi\|^2, & \text{если } \lambda \prec \nu, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как проекторы $P(\nu)$, $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$, попарно ортогональны и в сумме дают P_{N+1}, имеем

$$\sum_{\nu \succ \lambda} p_{zw}(\lambda, \nu) = 1 \quad \text{для любой } \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

Мы будем называть $p_{zw}(\lambda,\nu)$ переходной функцией представления T_{zw}.

Теорема 3.2. *Имеет место следующая формула для переходной функции представления T_{zw}:*

$$p_{zw}(\lambda,\nu)=\frac{|a_{zw}(\nu)|^2}{|a_{zw}(\lambda)|^2}\frac{\dim\lambda}{\dim\nu}.$$

Доказательство. Обозначим через ξ_λ, $\lambda\in\mathbb{GT}_N$, вектор в $H(\lambda)\subset H^N\subset H$, соответствующий χ^λ при отождествлении

$$H^N\cong L^2(U(N),\mu_1^N).$$

Он имеет единичную длину и $K(N)$-инвариантен. Покажем, что для любой сигнатуры $\nu\in\mathbb{GT}_{N+1}$ вектор ξ_ν допускает разложение

$$\xi_\nu=\sum_{\lambda\prec\nu}\xi_{\lambda\nu},$$

где векторы $\xi_{\lambda\nu}$ попарно ортогональны, $K(N)$-инвариантны,

$$(\xi_{\lambda\nu},\xi_{\lambda\nu})=\frac{\dim\lambda}{\dim\nu}$$

и $\xi_{\lambda\nu}$ под действием $G(N)$ порождает представление $\pi^\lambda\times(\pi^\lambda)^*$.

Действительно, пусть $H(\pi^\nu)$ – пространство представления π^ν группы $U(N+1)$, а $\operatorname{End}H(\pi^\nu)$ – алгебра операторов в этом пространстве со скалярным произведением

$$(A,B)=\frac{\operatorname{tr}AB^*}{\dim\nu}.$$

Определим действие группы $G(N+1)$ на $\operatorname{End}H(\pi^\nu)$ формулой

$$g\cdot A=\pi^\nu(g_1)A\pi^\nu(g_2^{-1}),\ A\in\operatorname{End}H(\pi^\nu),\ g=(g_1,g_2)\in G(N+1).$$

Отображение $\widehat{\ }:\operatorname{End}H(\pi^\nu)\to H(\nu)$, ставящее в соответствие оператору $A\in\operatorname{End}H(\pi^\nu)$ функцию $\widehat{A}(u)=\operatorname{tr}(A\pi^\nu(u))$, сохраняет скалярное произведение и коммутирует с действием группы $G(N+1)$.

Пусть 1_ν – тождественный оператор в пространстве $H(\pi^\nu)$. Его образ при отображении $A\mapsto\widehat{A}$ совпадает с вектором ξ_ν. Для любой сигнатуры $\lambda\prec\nu$ обозначим через $1_{\lambda\nu}\in\operatorname{End}H(\pi^\nu)$ ортопроектор на подпространство тех векторов, которые под действием группы $U(N)\subset U(N+1)$ преобразуются согласно представлению π^λ. Определим $\xi_{\lambda\nu}$ как образ оператора $1_{\lambda\nu}$ при отображении $A\mapsto\widehat{A}$. Очевидно, что векторы $\xi_{\lambda\nu}$ удовлетворяют всем требуемым свойствам.

Пусть $z \notin \mathbb{Z}$, $w \notin \mathbb{Z}$. Тогда $a_{z,w;N}(\lambda) \neq 0$ для любой $\lambda \in \mathbb{GT}_N$. Рассмотрим разложения вектора ξ_0 по ξ_λ, $\lambda \in \mathbb{GT}_N$, и по ξ_ν, $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$:

$$\xi_0 = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} a_{zw}(\lambda)\xi_\lambda = \sum_{\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}} a_{zw}(\nu)\xi_\nu.$$

Заменяя ξ_ν на $\sum_{\lambda \prec \nu} \xi_{\lambda\nu}$, получаем, что

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} a_{zw}(\lambda)\xi_\lambda = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} \sum_{\nu \succ \lambda} a_{zw}(\nu)\xi_{\lambda\nu}.$$

Сравнивая компоненты в обеих частях равенства, которые преобразуются согласно заданному неприводимому представлению группы

$$G(N) \subset G(N+1),$$

мы видим, что

$$a_{zw}(\lambda)\xi_\lambda = \sum_{\nu \succ \lambda} a_{zw}(\nu)\xi_{\lambda\nu} \quad \text{для любой} \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

Значит,

$$P_\nu \xi_\lambda = \frac{a_{zw}(\nu)}{a_{zw}(\lambda)}\xi_{\lambda\nu}, \quad \nu \succ \lambda,$$

и, следовательно,

$$p_{zw}(\lambda,\nu) = \frac{|a_{zw}(\nu)|^2}{|a_{zw}(\lambda)|^2}\|\xi_{\lambda\nu}\| = \frac{|a_{zw}(\nu)|^2}{|a_{zw}(\lambda)|^2}\frac{\dim\lambda}{\dim\nu}. \qquad \square$$

Обозначим через $\widetilde{\mathcal{A}}$ пространство всех ограниченных комплекснозначных функций $A(\lambda)$ на множестве вершин графа $\mathbb{GT}\backslash\{\varnothing\}$, удовлетворяющих условию

$$A(\lambda) = \sum_{\nu \succ \lambda} p_{zw}(\lambda,\nu)A(\nu) \quad \text{для всех } \varnothing \neq \lambda \in \mathbb{GT}. \tag{3}$$

Это банахово пространство с нормой $\|A\| = \sup_\lambda |A(\lambda)|$.

Предложение 3.3. *Коммутант $\mathcal{A}$ представления T_{zw} как банахово пространство с обычной операторной нормой изометричен пространству $\widetilde{\mathcal{A}}$.*

Доказательство. Для любого оператора $A \in \mathcal{A}$ и любого $N = 1, 2, \ldots$ имеем

$$A_N := P_N A P_N = \sum_{\lambda,\mu \in \mathbb{GT}_N} P(\lambda)AP(\mu).$$

Оператор $P(\lambda)AP(\mu)$ сплетает представления $\pi^\mu \times (\pi^\mu)^*$ и $\pi^\lambda \times (\pi^\lambda)^*$. Следовательно, он может быть ненулевым только при $\lambda = \mu$. В этом случае оператор $P(\lambda)AP(\lambda)$ пропорционален $P(\lambda)$. Обозначая коэффициент пропорциональности через $A(\lambda)$, получаем, что

$$P_N A P_N = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} A(\lambda) P(\lambda).$$

Отсюда очевидно следует, что

$$\|P_N A P_N\| = \sup_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} |A(\lambda)|,$$

откуда

$$\|A\| = \sup_N \|P_N A P_N\| = \sup_{\lambda \in \mathbb{GT}} |A(\lambda)| = \|A(\cdot)\|.$$

Пусть $\lambda \in \mathbb{GT}_N$, $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$. Оператор $P(\nu)$ коммутирует с действием группы $G(N) \subset G(N+1)$. Следовательно, оператор $P(\lambda)P(\nu)P(\lambda)$, коммутирующий с неприводимым представлением $\pi^\lambda \times (\pi^\lambda)^*$ группы $G(N)$, пропорционален $P(\lambda)$. Для того чтобы найти коэффициент пропорциональности, заметим, что для любого вектора $\xi \in H(\lambda)$ имеем $P(\lambda)\xi = \xi$, а значит,

$$\begin{aligned}(P(\lambda)P(\nu)P(\lambda)\xi, \xi) &= (P(\nu)\xi, \xi) = (P(\nu)\xi, P(\nu)\xi) \\ &= \begin{cases} p_{zw}(\lambda, \nu)(\xi, \xi), & \lambda \prec \nu, \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}\end{aligned}$$

по определению переходной функции. Так как $(P(\lambda)\xi, \xi) = (\xi, \xi)$, искомый коэффициент пропорциональности равен $p_{zw}(\lambda, \nu)$, если $\lambda \prec \nu$, и 0 в противном случае, т.е.

$$P(\lambda)P(\nu)P(\lambda) = \begin{cases} p_{zw}(\lambda, \nu)P(\lambda), & \text{если } \lambda \prec \nu, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как $P(\lambda)P(\nu)P(\mu) = 0$, если λ, $\mu \in \mathbb{GT}_N$ и $\mu \neq \lambda$, то

$$P_N P(\nu) P_N = \sum_{\lambda \prec \nu} p_{zw}(\lambda, \nu) P(\lambda) \quad \text{для любой} \quad \nu \in \mathbb{GT}_{N+1}.$$

Значит, выполнена следующая цепочка равенств:

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N} A(\lambda)P(\lambda) = A_N = P_N A_{N+1} P_N = P_N \left(\sum_{\nu\in\mathbb{GT}_{N+1}} A(\nu)P(\nu) \right) P_N$$
$$= \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N} P(\lambda) \sum_{\nu\succ\lambda} A(\nu) p_{zw}(\lambda,\nu),$$

откуда

$$A(\lambda) = \sum_{\nu\succ\lambda} A(\nu) p_{zw}(\lambda,\nu).$$

Таким образом, построено изометрическое вложение коммутанта $\mathcal{A}$ в пространство $\widetilde{\mathcal{A}}$. Обратно, для любой функции $A(\cdot)\in\widetilde{\mathcal{A}}$ положим

$$A_N = \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N} A(\lambda)P(\lambda).$$

Тогда из условия (3) получаем, что

$$A_N = P_N A_{N+1} P_N,$$

а из ограниченности функции $A(\cdot)$ следует, что

$$\sup_N \|A_N\| = \|A(\cdot)\| < \infty.$$

Значит, существует ограниченный оператор

$$A = \mathrm{w}-\lim_{N\to\infty} A_N,$$

где w-lim обозначает предел в слабой операторной топологии. Так как A_N коммутирует с действием группы $G(N)$, оператор A содержится в коммутанте $\mathcal{A}$. □

Для четверки целых чисел $(p,q;r,s)$ определим подмножество

$$\mathbb{GT}(p,q;r,s) = \{\lambda\in\mathbb{GT}\,|\lambda_p \ge q,\ \lambda_{p+1} < q+1,$$
$$\lambda_{N-r+1} \le -s,\ \lambda_{N-r} > -s-1\} \subset \mathbb{GT}.$$

Оно является связным подграфом в графе Гельфанда–Цетлина. Далее, пусть A_{pqrs} – характеристическая функция множества $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$.

Теорема 3.4. *Пусть $q-p=k$, $s-r=l$, $p,r\ge 0$, $k+l\ge 0$. Тогда*

(1) *Функция $A_{pqrs}(\cdot)$ удовлетворяет соотношению* (3) *для $z=k$, $w=l$. Следовательно, она определяет оператор A_{pqrs} в коммутанте представления T_{kl}.*

(2) *Оператор A_{pqrs} является ортогональным проектором на некоторое подпространство $H_{pqrs} \subset H$. Подпространства H_{pqrs} попарно ортогональны, и их прямая сумма есть все пространство H. Таким образом, они определяют разложение представления T_{kl} в прямую сумму подпредставлений:*

$$T_{kl} = \bigoplus_{q-p=k,\, s-r=l,\, p\geq 0,\, r\geq 0} T_{pqrs}.$$

(3) *Обозначим через Reg^N_{pqrs}, где N достаточно велико, подпредставление регулярного представления Reg^N, которое является объединением тех компонент $\pi^\lambda \times (\pi^\lambda)^*$, для которых $\lambda \in \mathbb{GT}(p,q;r,s)$. Пусть H^N_{pqrs} – соответствующее подпространство в H^N. Тогда изометрическое вложение $L^N_{kl} : H^N \to H^{N+1}$ отображает H^N_{pqrs} в H^{N+1}_{pqrs}, и представление $T_{pqrs} \subset T_{kl}$ совпадает с индуктивным пределом представлений Reg^N_{pqrs}.*

Доказательство. (1) Для любой сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$ имеем

$$A_{pqrs}(\lambda) = 1 = \sum_{\nu \succ \lambda} p_{kl}(\lambda,\nu) = \sum_{\nu \succ \lambda} p_{kl}(\lambda,\nu) A_{pqrs}(\nu),$$

так как $p_{kl}(\lambda,\nu) = 0$, если $\nu \notin \mathbb{GT}_{N+1}(p,q;r,s)$.

Таким образом, функция $A_{pqrs}(\cdot)$ удовлетворяет условию (3) и ограничена. Из предложения 3.3 следует, что она определяет оператор A_{pqrs}, лежащий в коммутанте представления T_{kl}.

(2) Из предложения 3.3 и определения функции A_{pqrs} следует, что для всех $N = 1, 2, \ldots$

$$P_N A_{pqrs} P_N = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N(p,q;r,s)} P(\lambda). \tag{4}$$

Поскольку $P_N A_{pqrs} P_N$ является ортопроектором для любого N, оператор A_{pqrs} также является ортопроектором. Аналогично доказывается, что проекторы A_{pqrs} попарно ортогональны и их сумма равна единичному оператору.

(3) Так как все три оператора P_N, A_{pqrs} и $P_N A_{pqrs} P_N$ являются ортопроекторами, P_N и A_{pqrs} коммутируют. Отсюда и из (4) следует, что оператор $P_N A_{pqrs} = A_{pqrs} P_N$ проецирует H^N на инвариантное подпространство H^N_{pqrs}. Так как $P_{N+1} \geq P_N$, отсюда следует, что H^N_{pqrs} является подпространством в H^{N+1}_{pqrs}. $\square$

§4. Построение вектора v_{pqrs}

В этом разделе мы покажем, что для произвольных z и w пространство V_{zw} K-инвариантных векторов изоморфно пространству $\mathcal{F}_{zw}$ функций на $\mathbb{GT}$, удовлетворяющих условию псевдогармоничности и условию типа Харди, причем в случае целых z и w этот изоморфизм хорошо согласован с разложением представления T_{zw} на блоки, полученным в разделе 3. В этом случае с помощью этого изоморфизма мы построим K-инвариантный вектор v_{pqrs} в каждом из блоков T_{pqrs}. В разделе 5 будет доказана цикличность этих векторов.

Предложение 4.1. *Для любых $N \geq 1$, $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$ имеем*

$$(\xi_\lambda, \xi_\nu) = \begin{cases} \frac{a_{zw}(\nu)}{a_{zw}(\lambda)} \cdot \frac{\mathrm{Dim}_N \lambda}{\mathrm{Dim}_{N+1} \nu}, & \lambda \prec \nu, \\ 0 & \textit{иначе.} \end{cases}$$

Доказательство. Пусть Q_λ – проектор, действующий в гильбертовом пространстве H, на изотипическую компоненту $\pi^\lambda \times (\pi^\lambda)^*$ представления $T_{zw}|_{G(n)}$. Заметим, что $P_\lambda \leq Q_\lambda$ и $Q_\lambda \xi_\lambda = \xi_\lambda$. Из доказательства теоремы 3.2 следует, что

$$(Q_\lambda \xi_\nu, Q_\lambda \xi_\nu) = \begin{cases} \dim \lambda / \dim \nu, & \text{если } \lambda \prec \nu, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

В частности, если условие $\lambda \prec \nu$ не выполняется, то $Q_\lambda \xi_\nu = 0$ и $(\xi_\lambda, \xi_\nu) = 0$. Применяя оператор Q_λ к разложению

$$\xi_0 = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} (\xi_0, \xi_\lambda) \xi_\lambda = \sum_{\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}} (\xi_0, \xi_\nu) \xi_\nu,$$

получаем, что

$$Q_\lambda \xi_0 = (\xi_0, \xi_\lambda) \xi_\lambda = \sum_{\nu \succ \lambda} (\xi_0, \xi_\nu) Q_\lambda \xi_\nu.$$

Зафиксируем $\nu \succ \lambda$. Умножая последнее равенство скалярно на ξ_ν, получим

$$(\xi_0, \xi_\lambda)(\xi_\lambda, \xi_\nu) = (\xi_0, \xi_\nu)(Q_\lambda \xi_\nu, \xi_\nu),$$

где мы воспользовались тем, что $(Q_\lambda \xi_{\nu'}, \xi_\nu) = 0$ для любой $\nu' \neq \nu$, что в свою очередь следует из того, что $Q_\lambda H(\nu) \subset H(\nu)$ для любой $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$. Так как

$$(Q_\lambda \xi_\nu, \xi_\nu) = (Q_\lambda \xi_\nu, Q_\lambda \xi_\nu) = \frac{\dim \lambda}{\dim \nu},$$

$(\xi_0, \xi_\lambda) = a_{zw}(\lambda)$ и $(\xi_0, \xi_\nu) = a_{zw}(\nu)$, имеем

$$(\xi_\lambda, \xi_\nu) = \frac{a_{zw}(\nu)}{a_{zw}(\lambda)} \cdot \frac{\mathrm{Dim}_N \lambda}{\mathrm{Dim}_{N+1} \nu}. \qquad \square$$

Следствие 4.2. *Для любых $N \geq 1$, целых z и w, $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ и $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}$*

$$(\xi_\nu, \xi_\lambda) = C_{z,w;N,N+1} \frac{\prod_{i=1}^{N} \Gamma(z - \lambda_i + i)\Gamma(w + N + 1 + \lambda_i - i)}{\prod_{i=1}^{N+1} \Gamma(z - \nu_i + i)\Gamma(w + N + 2 + \nu_i - i)},$$

где

$$C^2_{z,w;N,N+1} = \frac{C^2_{z,w;N+1}}{C^2_{z,w;N}} = \frac{(N + z + w)!^4 N!}{(N + 2z + 2w)!}.$$

Замечание 4.3. Целые числа $z - \lambda_i + i$ и $z - \nu_i + i$ могут быть неположительными, и тогда соответствующие гамма-функции обращаются в бесконечность. Так как $\lambda \prec \nu$, имеем $z - \lambda_i + i \geq z - \nu_i + i$ при любом $1 \leq i \leq N$. Поэтому отношение $\frac{\Gamma(z-\lambda_i+i)}{\Gamma(z-\nu_i+i)}$ может быть корректно определено. Также мы полагаем $\frac{1}{\Gamma(z-\nu_{N+1}+N+1)}$ равным 0, если $z - \nu_{N+1} + N + 1 \leq 0$. Аналогично определяется $\frac{\prod_{i=1}^{N} \Gamma(w+N+1+\lambda_i-i)}{\prod_{i=1}^{N+1} \Gamma(w+N+2+\nu_i-i)}$.

Определение 2. Обозначим через $\mathcal{F}_{zw}$ пространство комплекснозначных функций $f(\lambda)$ на вершинах $\lambda \neq \varnothing$ графа Гельфанда–Цетлина, удовлетворяющих следующим двум свойствам.

(1) Псевдогармоничность: для всех $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ выполнено соотношение

$$f(\lambda) = \sum_{\nu \succ \lambda} f(\nu)(\xi_\nu, \xi_\lambda). \tag{5}$$

(2) Условие типа Харди:

$$\|f\|^2 := \sup_N \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} |f(\lambda)|^2 < \infty.$$

На самом деле, как видно из доказательства следующего утверждения, для псевдогармоничной функции сумма $\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} |f(\lambda)|^2$ не убывает при $N \to \infty$, поэтому

$$\|f\|^2 := \lim_{N \to \infty} \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} |f(\lambda)|^2.$$

Предложение 4.4. *Отображение*

$$v \mapsto f_v, \quad f_v(\lambda) = (v, \xi_\lambda),$$

является линейным сохраняющим норму изоморфизмом пространства V_{zw} K-инвариантных векторов представления T_{zw} и пространства $\mathcal{F}_{zw}$.

Доказательство. Пусть V^N – подпространство $K(N)$-инвариантных векторов в H^N. Отметим, что V^N не содержится в V_{zw}, но $P_N V_{zw} \subseteq V^N$ и $P_N V^{N+1} \subseteq V^N$, где P_N – ортопроектор из H на H^N. Векторы ξ_λ, $\lambda \in \mathbb{GT}_N$, образуют ортонормированный базис в V^N. Для двух векторов

$$v_N = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} a(\lambda)\xi_\lambda \in V^N \quad \text{и} \quad v_{N+1} = \sum_{\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}} b(\nu)\xi_\nu \in V^{N+1}$$

имеем

$$v_N = P_N v_{N+1} \Longleftrightarrow a(\lambda) = \sum_{\nu \succ \lambda} b(\nu)(\xi_\nu, \xi_\lambda) \quad \text{для любой} \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N. \tag{6}$$

Заметим, что из этих соотношений следует, что

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} |a(\lambda)|^2 = \|v_N\|^2 \le \|v_{N+1}\|^2 = \sum_{\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}} |b(\nu)|^2.$$

Предположим теперь, что $v \in V_{zw}$ и $v_N = P_N v$ при $N = 1, 2, \ldots$. Тогда

$$f_v(\lambda) = (v, \xi_\lambda) = (v_N, \xi_\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

Из (6) следует, что функция f_v удовлетворяет условию псевдогармоничности и

$$\|f_v\|^2 := \sup_N \|v_N\|^2 = \lim_{N \to \infty} \|v_N\|^2 = \|v\|^2 < \infty;$$

следовательно, $f_v \in \mathcal{F}_{zw}$. Значит, отображение $v \mapsto f_v$ является изометрическим вложением $V_{zw} \to \mathcal{F}_{zw}$.

Теперь докажем, что это отображение является сюръективным. Для произвольной функции $f \in \mathcal{F}_{zw}$ положим

$$v_N = \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}_N} f(\lambda)\xi_\lambda, \quad N = 1, 2, \ldots.$$

Тогда $v_N \in V^N$, $v_N = P_N v_{N+1}$ и

$$\lim_{n \to \infty} \|v_N\|^2 = \sup_N \|v_N\|^2 = \|f\|^2.$$

Поэтому векторы v_N сходятся к некоторому вектору $v \in H$. Для любого натурального M вектор v является $K(M)$-инвариантным, поскольку векторы v_N обладают этим свойством при всех $N \geq M$. Значит, $v \in V_{zw}$ и $f = f_v$. $\square$

Обозначим через $V_{pqrs} = V \cap H_{pqrs}$ пространство всех K-инвариантных векторов в блоке H_{pqrs} и через $\mathcal{F}_{pqrs}$ подпространство $\mathcal{F}_{kl}$ функций, носитель которых содержится в $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$. Разложение

$$\mathcal{F}_{kl} = \bigoplus_{q-p=k,\, s-r=l,\, p\geq 0,\, r\geq 0} \mathcal{F}_{pqrs}$$

согласовано с разложением

$$V_{kl} = \bigoplus_{q-p=k,\, s-r=l,\, p\geq 0,\, r\geq 0} V_{pqrs}.$$

Так как выделенный вектор ξ_0 лежит в пространстве H^N при любом N и является K-инвариантным, функция $a_{zw}(\lambda) = (\xi_0, \xi_\lambda)$ лежит в пространстве $\mathcal{F}_{zw}$. Для любых целых чисел k и l, таких, что $k + l \geq 0$, и сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}(p,q;r,s)$, где $p+r \geq 1$, $q-p = k$ и $s-r = l$, имеем $a_{kl}(\lambda) = 0$. При этом при фиксированной сигнатуре λ

$$a_{zw}(\lambda) = (z-k)^p (w-l)^r \tilde{a}_{zw}(\lambda),$$

где $\tilde{a}_{zw}(\lambda) \neq 0$. Таким образом, $a_{kl} \in \mathcal{F}_{0k0l}$.

Зафиксируем целые z и w, удовлетворяющие условию $z + w \geq 0$. Пусть p и r – неотрицательные числа, $q = z + p$, $s = w + r$ и $N \geq r + p$. Для сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}(p,q;r,s) \cap \mathbb{GT}(N)$ определим $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ следующим образом:

$$\begin{aligned}
\lambda^1 &= (\lambda_1 - q, \ldots, \lambda_p - q, 0, \ldots, 0),\\
\lambda^2 &= (\lambda_{p+1}, \ldots, \lambda_{N-r}),\\
\lambda^3 &= (-\lambda_N - s, \ldots, -\lambda_{N-r+1} - s, 0, \ldots, 0).
\end{aligned}$$

При этом λ^1 и λ^3 мы будем рассматривать как сигнатуры с $N+w+q$ и $N+z+s$ строками соответственно. Заметим, что если $\lambda \prec \nu$, то $\lambda^i \prec \nu^i$, $i = 1,2,3$, и для любых функций g_1, g_2 и g_3 выполнено равенство

$$\sum_{\nu \succ \lambda} g_1(\nu^1) g_2(\nu^2) g_3(\nu^3) = \left(\sum_{\nu^1 \succcurlyeq \lambda^1} g_1(\nu^1) \right) \left(\sum_{\nu^2 \succ \lambda^2} g_2(\nu^2) \right) \left(\sum_{\nu^3 \succcurlyeq \lambda^3} g_3(\nu^3) \right), \tag{7}$$

где $\nu \succcurlyeq \lambda$ означает, что $\nu \succ \lambda$ и ν имеет столько же ненулевых компонент, сколько и λ.

Теорема 4.5. *Пусть $q-p=z$, $s-r=w$, $p,r\geq 0$. Тогда в пространстве H_{pqrs} существует такой K-инвариантный вектор, что соответствующая ему функция $f_{pqrs}(\lambda)=f_{v_{pqrs}}(\lambda)$ в пространстве $\mathcal{F}_{pqrs}$ функций на $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$ равна*

$$f(\lambda)=D_N f_1(\lambda^1)f_2(\lambda^2)f_3(\lambda^3),$$

где

$$f_1(\lambda^1)=B_{-p;N+w+q}(\lambda^1),$$
$$f_3(\lambda^3)=B_{-r;N+z+s}(\lambda^3),$$
$$f_2(\lambda^2)=a_{q,s;N-r-p}(\lambda^2),$$

$$B_{-p;N}(\lambda):=C_{-p,0;N}\frac{(-1)^{|\lambda|}(N-1)^{\downarrow p}(N-2)^{\downarrow p}\dots(N-p)^{\downarrow p}\operatorname{Dim}_p\lambda}{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}}$$

и D_N выбраны так, что

$$\frac{D_N}{D_{N+1}}=\frac{C_{z,w;N,N+1}}{C_{q,s;N-r-p,N-r-p+1}C_{-p,0;N+w+q,N+w+q+1}C_{-r,0;N+z+s,N+z+s+1}}\times\frac{1}{(N+w+q)^{\downarrow p}(N+z+s)^{\downarrow r}}. \tag{8}$$

Пусть $\varphi_{pqrs}(g)$ – сферическая функция на группе G, соответствующая вектору v_{pqrs},

$$\varphi_{pqrs}(g)=\frac{(T_{zw}(g)v_{pqrs},v_{pqrs})}{\|v_{pqrs}\|^2}=\frac{(T_{pqrs}(g)v_{pqrs},v_{pqrs})}{\|v_{pqrs}\|^2},$$

и σ_{pqrs} – спектральная мера на Ω, соответствующая функции φ_{pqrs}.

Тогда носителем меры σ_{pqrs} является множество $\Omega(p,q;r,s)$, и эта мера имеет плотность

$$\frac{V^2(\{\alpha_i^+\})V^2(\{\alpha_k^-\})V^2(\{\beta_j^+\})V^2(\{\beta_l^-\})\prod(1-\beta_j^+-\beta_l^-)^2}{\prod(1+\alpha_i^+)^{2p}\prod(1+\alpha_k^-)^{2r}}$$

относительно меры Лебега на $\Omega(p,q;r,s)$. Здесь и далее, если не оговорено противное, индексы i, j, k и l меняются в следующих пределах:

$$1\leq i\leq p,\quad 1\leq j\leq q,\quad 1\leq k\leq r,\quad 1\leq l\leq s$$

в случае неотрицательных q и s и

$$1\leq i\leq p,\quad 1\leq j\leq q,\quad 1\leq k\leq r,\quad -q+1\leq l\leq s$$

в случае отрицательного q (случай отрицательного s рассматривается аналогично), а $V(x)$ для конечного набора чисел $x = (x_1, \ldots, x_n)$ обозначает определитель Вандермонда:

$$V(x) = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j).$$

Замечание 4.6. Так как для любых z и w, удовлетворяющих условию $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w > -1/2$, имеем $a_{zw}(\lambda) = a_{(z+k)(w-k)}(\lambda + (k, \ldots, k))$,

$$f_{pqrs}(\lambda) = f_{p(q+k)r(s-k)}(\lambda + (k, \ldots, k)).$$

Прежде чем доказывать теорему, докажем сначала несколько лемм. Обозначим через $\mathbb{GT}_N(p) \subset \mathbb{GT}_N$ множество таких сигнатур $\lambda \in \mathbb{GT}_N$, что $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \ldots \ge \lambda_p \ge 0$, $\lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_N = 0$.

Лемма 4.7. *Функция $a_{-p,0;N} = \frac{\prod_\lambda(-p-c(b))}{\prod_\lambda(N+c(b))} \cdot \operatorname{Dim}_N \lambda \cdot C_{-p,0;N}$ удовлетворяет условию*

$$\frac{a_{-p,0;N}(\lambda)}{C_{-p,0;N,N+1}} = \sum_{\nu \succcurlyeq \lambda} a_{-p,0;N}(\nu) \prod_{\nu \setminus \lambda} (-p - c_\nu(b)) \frac{\prod_\lambda (N + c_\lambda(b))}{\prod_\nu (N + 1 + c_\nu(b))}, \quad (9)$$

где $N \ge 2p$, $\lambda \in \mathbb{GT}_N(p)$, $\nu \in \mathbb{GT}_{N+1}(p)$ и

$$C_{-p,0;N} = \left(\frac{(2p-1)!(2p-2)! \ldots p!}{(N-p)^{\downarrow p}(N-p+1)^{\downarrow p} \ldots (N-1)^{\downarrow p}(p-1)!(p-2)! \ldots 0!} \right)^{1/2},$$

а запись $\prod_\lambda$ здесь и далее обозначает произведение по всем клеткам $b \in \lambda$. Содержание $c_\lambda(b)$ клетки $b = (i, j)$ определяется как $j - i$.

Замечание 4.8. Функция $a_{z,w;N}$ была определена в лемме 2.9 только при $\operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w > -\frac{1}{2}$. Однако, переходя к пределу при $z \to -p$ и $w = 0$ в выражении (1), мы получаем функцию $a_{-p,0;N}$, определенную выше, и поэтому сохраняем для нее обозначение $a_{z,w;N}$.

Доказательство. Заметим, что

$$\begin{aligned} a_{-p,0;N}(\lambda) &= \frac{\prod_\lambda(-p-c(b))}{\prod_\lambda(N+c(b))} \cdot \operatorname{Dim}_N \lambda \cdot C_{-p,0;N} \\ &= (-1)^{|\lambda|} \cdot \frac{\prod_\lambda(p+c(b))}{\prod_\lambda(N+c(b))} \cdot \frac{\prod_\lambda(N+c(b))}{\prod_\lambda h(b)} \cdot C_{-p,0;N} \qquad (10) \\ &= (-1)^{|\lambda|} \cdot \frac{\prod_\lambda(p+c(b))}{\prod_\lambda h(b)} \cdot C_{-p,0;N} = (-1)^{|\lambda|} C_{-p,0;N} \operatorname{Dim}_p \lambda, \end{aligned}$$

где $h(b)$ – длина крюка клетки b, т.е. $h(b) = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1$, где $b = (i,j)$, а λ' – транспонированная к λ диаграмма Юнга. Значит, условие (9) переписывается в виде

$$(-1)^{|\lambda|}\mathrm{Dim}_p\lambda$$
$$= \sum_{\nu \succcurlyeq \lambda} (-1)^{|\nu|}\mathrm{Dim}_p\nu \prod_{\nu\setminus\lambda}(-p-c(b))\frac{\prod_\lambda(N+c(b))}{\prod_\nu(N+1+c(b))}C^2_{-p,0;N,N+1}. \quad (11)$$

При этом $C^2_{-p,0;N,N+1} = \frac{(N-p)\ldots(N-2p+1)}{N\ldots(N-p+1)}$. Для доказательства формулы (11) мы воспользуемся теоремой Густафсона (см. [3, Theorem 1.11]).

Теорема 4.9. *Пусть $K = 1, 2, \ldots$, $\varkappa = (\varkappa_j)$ пробегает $\mathbb{Z}^K$, $\alpha = (\alpha_r) \in \mathbb{C}^{K+1}$, $\beta = (\beta_r) \in \mathbb{C}^{K+1}$, $\varepsilon = (\varepsilon_j) \in \mathbb{C}^K$ и выполнены следующие условия:*

(i) $\mathrm{Re}(\sum \beta_r - \sum \alpha_r) > K$,

(ii) *числа ε_j, где $j = 1, \ldots, K$, попарно различны,*

(iii) *числа $\alpha_r + \varepsilon_j$ и $1 - \beta_r - \varepsilon_j$ не являются целыми положительными ни для каких r и j.*

Тогда

$$\sum_{\varkappa\in\mathbb{Z}^K}\prod_{1\le i<j\le K}\left(\frac{(\varkappa_i+\varepsilon_i)-(\varkappa_j+\varepsilon_j)}{\varepsilon_i-\varepsilon_j}\right)\prod_{r=1}^{K+1}\prod_{j=1}^{K}\frac{(\alpha_r+\varepsilon_j)^{\uparrow\varkappa_j}}{(\beta_r+\varepsilon_j)^{\uparrow\varkappa_j}}$$
$$=\frac{\Gamma(-K+\sum_{r=1}^{K+1}(\beta_r-\alpha_r))\prod_{r=1}^{K+1}\prod_{j=1}^{K}\Gamma(1-\alpha_r-\varepsilon_j)\Gamma(\beta_r+\varepsilon_j)}{\prod_{r,s=1}^{K+1}\Gamma(\beta_r-\alpha_s)\prod_{1\le i<j\le K}\Gamma(1-\varepsilon_i+\varepsilon_j)\Gamma(1+\varepsilon_i-\varepsilon_j)}. \quad (12)$$

Выберем следующую специализацию параметров формулы (12):

$$\begin{gathered} K = p, \quad \varkappa_j = \nu_j - \lambda_j, \quad \varepsilon_j = \lambda_j - j\theta, \quad j = 1, \ldots, p, \\ \alpha_r = -\lambda_r + (r+1)\theta, \quad \beta_r = -\lambda_r + r\theta + 1, \quad r = 1, \ldots, p, \\ \alpha_{p+1} = p+1, \quad \beta_{p+1} = N+2. \end{gathered} \quad (13)$$

Проверим условия теоремы Густафсона. Условие (i) записывается в виде $\mathrm{Re}(p(1-\theta)) + N - p + 1 > p$, а это верно при $\mathrm{Re}\,\theta < 1$. Условие (ii) очевидно выполнено. Проверим теперь третье условие. Имеем

$$\alpha_r + \varepsilon_j = -\lambda_r + \lambda_j + (r+1)\theta - j\theta.$$

Это выражение принимает целое значение при всех θ только при $j = r+1$, но тогда

$$\alpha_r + \varepsilon_{r+1} = \lambda_{r+1} - \lambda_r \le 0.$$

Также оно является целым при некоторых r и j при конечном числе значений θ, но нас интересует предел при $\theta \to 1$, так что это не представляет проблем. Далее,

$$1-(\beta_r+\varepsilon_{r+1}) = 1-(1+r\theta-\lambda_r+\lambda_j-j\theta) = \lambda_r-\lambda_j+j\theta-r\theta.$$

Это выражение принимает целое значение при всех θ только при $j=r$, но тогда оно равно 0. Также снова приходится исключить конечное число значений θ. Таким образом, все условия выполнены при $\operatorname{Re}\theta<1$ за исключением конечного числа значений θ.

Так как $\alpha_r+\varepsilon_{r+1}=\lambda_{r+1}-\lambda_r$ является целым неположительным числом, $(\alpha_r+\varepsilon_{r+1})_{\varkappa_{r+1}}=0$ при $\varkappa_{r+1}>\lambda_r-\lambda_{r+1}$, т.е. при $\nu_{r+1}>\lambda_r$. Далее, так как $\beta_r+\varepsilon_r=1$, имеем $\frac{1}{(\beta_r+\varepsilon_r)_{\varkappa_r}}=0$ при $\varkappa_r<0$, т.е. при $\nu_r<\lambda_r$.

Таким образом, суммирование в формуле Густафсона с параметрами (13) будет происходить по сигнатурам $\nu \succcurlyeq \lambda$, имеющим не более p ненулевых компонент. Так как $1-\varepsilon_j=1-\lambda_j+j\theta=\beta_j$,

$$\frac{\prod_{r=1}^K\prod_{j=1}^K\Gamma(1-\alpha_r-\varepsilon_j)\Gamma(\beta_r+\varepsilon_j)}{\prod_{r,s=1}^K\Gamma(\beta_r-\alpha_s)\prod_{1\le i<j\le K}\Gamma(1-\varepsilon_i+\varepsilon_j)\Gamma(1+\varepsilon_i-\varepsilon_j)}$$
$$=\frac{\prod_{r=1}^K\prod_{j=1}^K\Gamma(\beta_j-\alpha_r)\Gamma(1+\varepsilon_j-\varepsilon_r)}{\prod_{r,s=1}^K\Gamma(\beta_r-\alpha_s)\prod_{i,j=1,\,i\ne j}^K\Gamma(1-\varepsilon_i+\varepsilon_j)}=\prod_{i=j=1}^K\Gamma(1-\varepsilon_i+\varepsilon_j)=1$$

и

$$\frac{\prod_{j=1}^K\Gamma(1-\alpha_{K+1}-\varepsilon_j)}{\prod_{r=1}^K\Gamma(\beta_r-\alpha_{K+1})}=1.$$

Таким образом, при данной специализации формула (12) переписывается в виде

$$\sum_{\nu\succ\lambda}\prod_{1\le i<j\le p}\frac{\nu_i-\nu_j+(j-i)\theta}{\lambda_i-\lambda_j+(j-i)\theta}\prod_{r=1}^p\prod_{j=1}^p\frac{(\lambda_j-\lambda_r+(r+1-j)\theta)^{\uparrow(\nu_j-\lambda_j)}}{(\lambda_j-\lambda_r+(r-j)\theta+1)^{\uparrow(\nu_j-\lambda_j)}}$$
$$\times\prod_{j=1}^p\frac{(p+1+\lambda_j-j\theta)^{\uparrow(\nu_j-\lambda_j)}}{(N+2+\lambda_j-j\theta)^{\uparrow(\nu_j-\lambda_j)}}$$
$$=\frac{\Gamma(N-2p+1+p(1-\theta))\Gamma(N+2+\lambda_j-j\theta)}{\Gamma(N+2+\lambda_j-j\theta)\Gamma(N-p+1)}.$$

Так как, очевидно, ряд в левой части сходится равномерно по θ на отрезке $[\frac{1}{2};1]$, можно перейти к пределу при $\theta \to 1$. Нетрудно заметить, что мы получаем при этом нужную нам формулу. $\square$

Так как равенство (11) верно для любого N, можно подставить $N+p$ вместо N. Воспользовавшись тем, что

$$\frac{\prod_\lambda (N+p+c(b))}{\prod_\nu (N+p+1+c_(b))} C^2_{-p,0;N+p,N+p+1}$$
$$= \frac{\frac{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}\prod_\lambda(N+c(b))}{(N+p-1)^{\downarrow p}(N+p-2)^{\downarrow p}\dots N^{\downarrow p}}}{\frac{(N+1+\nu_1)^{\uparrow p}(N+\nu_2)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+2)^{\uparrow p}\prod_\nu(N+1+c(b))}{(N+p)^{\downarrow p}(N+p-1)^{\downarrow p}\dots(N+1)^{\downarrow p}}} \cdot C^2_{-p,0;N+p,N+p+1}$$
$$= \frac{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}\prod_\nu(N+1+c(b))}{(N+1+\nu_1)^{\uparrow p}(N+\nu_2)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+2)^{\uparrow p}\prod_\nu(N+1+c(b))},$$

получаем, что

$$\frac{(-1)^{|\lambda|}\mathrm{Dim}_p\lambda}{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}}$$
$$=\sum_{\nu\succcurlyeq\lambda}\frac{(-1)^{|\nu|}\mathrm{Dim}_p\nu\prod_{\nu\setminus\lambda}(-p-c(b))}{(N+1+\nu_1)^{\uparrow p}(N+\nu_2)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+2)^{\uparrow p}}\frac{\prod_\lambda(N+c(b))}{\prod_\nu(N+1+c(b))}.$$

Так как

$$C^2_{-p,0;N,N+1}\frac{N^{\downarrow p}(N-1)^{\downarrow p}\dots(N-p+1)^{\downarrow p}}{(N-1)^{\downarrow p}(N-2)^{\downarrow p}\dots(N-p)^{\downarrow p}}=1,$$

имеем

$$C_{-p,0;N}\frac{(-1)^{|\lambda|}(N-1)^{\downarrow p}(N-2)^{\downarrow p}\dots(N-p)^{\downarrow p}\mathrm{Dim}_p\lambda}{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}}$$
$$=\sum_{\nu\succcurlyeq\lambda}C_{-p,0;N+1}\frac{(-1)^{|\nu|}N^{\downarrow p}(N-1)^{\downarrow p}\dots(N-p+1)^{\downarrow p}\mathrm{Dim}_p\nu}{(N+1+\nu_1)^{\uparrow p}(N+\nu_2)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+2)^{\uparrow p}}$$
$$\times\prod_{\nu\setminus\lambda}(-p-c(b))\frac{\prod_\lambda(N+c(b))}{\prod_\nu(N+1+c(b))}C^2_{-p,0;N,N+1}.$$

Таким образом, доказана следующая лемма.

Лемма 4.10. *Функция*

$$B_{-p;N}(\lambda):=C_{-p,0;N}\frac{(-1)^{|\lambda|}(N-1)^{\downarrow p}(N-2)^{\downarrow p}\dots(N-p)^{\downarrow p}\,\mathrm{Dim}_p\,\lambda}{(N+\lambda_1)^{\uparrow p}(N+\lambda_2-1)^{\uparrow p}\dots(N+\lambda_p-p+1)^{\uparrow p}}$$

удовлетворяет соотношению

$$\frac{B_{-p;N}(\lambda)}{C_{-p,0;N,N+1}} = \sum_{\nu \succcurlyeq \lambda} B_{-p;N+1}(\nu) \prod_{\nu \setminus \lambda} (-p - c_\nu(b)) \frac{\prod_\lambda (N + c_\lambda(b))}{\prod_\nu (N + 1 + c_\nu(b))}. \quad (14)$$

Лемма 4.11.

$$\sup_N \sum_{\lambda \in \mathbb{GT}(p;N)} |B_{-p;N}(\lambda)|^2 < \infty.$$

Доказательство. Оценим $|B_{-p;N}(\lambda)|^2$:

$$|B_{-p;N}(\lambda)|^2$$
$$= \text{const} \frac{\prod\limits_{1 \le i < j \le p} (\lambda_i - \lambda_j + j - i)^2 (N-1)^{\downarrow p} (N-2)^{\downarrow p} \dots (N-p)^{\downarrow p}}{\left((N+\lambda_1)^{\uparrow p} (N + \lambda_2 - 1)^{\uparrow p} \dots (N + \lambda_p - p + 1)^{\uparrow p}\right)^2}$$
$$\le \text{const} \frac{\lambda_1^{2(p-1)} \cdot \lambda_2^{2(p-2)} \cdot \ldots \cdot \lambda_p^0 \cdot N^{p^2}}{(N+\lambda_1)^{2p} (N+\lambda_2)^{2p-2} \dots (N+\lambda_p)^2 (N+\lambda_2)^2 \dots (N+\lambda_p)^{2p-2}},$$

где const зависит только от p. Пользуясь тем, что

$$\sum_{\lambda_i = 0}^{\infty} \frac{\lambda_i^{2p-2i}}{(N+\lambda_i)^{2p-2i+2}} \le \frac{1}{N},$$

получаем, что

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}(p;N)} |B_{-p;N}(\lambda)|^2 \le \text{const} \frac{N^{p^2}}{N^p N^{2+4+\ldots+(2p-2)}} = \text{const}.$$

□

Лемма 4.12. *Последовательность D_N имеет предел при $n \to \infty$.*

Доказательство.

$$\frac{D_{N+1}^2}{D_N^2} = \frac{(N+2z+2w)!(N+w+q-p)^{\downarrow p}(N+z+s-r)^{\downarrow r}}{(N+z+w)!^4 N! (N+w+q)^{\downarrow p}(N+z+s)^{\downarrow r}}$$
$$\times \frac{\left((N+w+q)^{\downarrow p}(N+z+s)^{\downarrow r}\right)^2 (N-r-p)!(N-r-p+q+s)!}{(N-r-p+2q+2s)!}$$
$$= \frac{(N+2z+2w)!(N-r-p)!(N+w+q)^{\downarrow 2p}(N+z+s)^{\downarrow 2r}}{N!(N-r-p+2q+2s)!}$$
$$= \frac{(N+w+q)^{\downarrow 2p}(N+z+s)^{\downarrow 2r}}{N^{\downarrow (p+r)}(N-r-p+2q+2s)^{\downarrow (p+r)}} = \frac{N^M + AN^{M-1} + \ldots}{N^M + BN^{M-1} + \ldots},$$

где

$$A = p(2w+2q-2p+1) + r(2z+2s-2r+1) = (p+r)(2z+2w+1),$$
$$B = \frac{(p+r)(4z+4w+p+r+1)}{2} + \frac{(p+r)(-r-p+1)}{2} = A.$$

Таким образом, $B = A$, а значит,

$$\frac{D_{N+1}}{D_N} = 1 + O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

поэтому сходится бесконечное произведение

$$\frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{D_3}{D_2} \cdot \ldots,$$

откуда и следует сходимость последовательности D_N. □

Лемма 4.13. *Функция f_{pqrs}, определенная ранее, удовлетворяет условию псевдогармоничности* (5) *с параметрами $z = q - p$, $w = s - r$.*

Доказательство. Пусть λ, $\nu \in \mathbb{GT}(p, q; r, s)$. Тогда

$$\prod_{i=1}^{p} \frac{\Gamma(z-\lambda_i+i)\Gamma(w+N+1+\lambda_i-i)}{\Gamma(z-\nu_i+i)\Gamma(w+N+2+\nu_i-i)} = \prod_{i=1}^{p} \frac{(z-\lambda_i+i-1)^{\downarrow(\nu_i-\lambda_i)}}{(w+N+1+\nu_i-i)^{\downarrow(\nu_i-\lambda_i+1)}}$$
$$= \prod_{\nu^1 \setminus \lambda^1} (-p-c(b)) \frac{\prod_{\lambda^1}(N+w+q+c(b))}{\prod_{\nu^1}(N+1+w+q+c(b))(N+w+q)^{\downarrow p}}.$$

Аналогично

$$\frac{\prod\limits_{i=N-r+1}^{N} \Gamma(z-\lambda_i+i)\Gamma(w+N+1+\lambda_i-i)}{\prod\limits_{i=N-r+2}^{N+1} \Gamma(z-\nu_i+i)\Gamma(w+N+2+\nu_i-i)}$$
$$= \prod_{\nu^3 \setminus \lambda^3} (-r-c(b)) \frac{\prod_{\lambda^3}(N+z+s+c(b))}{\prod_{\nu^3}(N+1+z+s+c(b))(N+z+s)^{\downarrow r}}.$$

Далее,

$$\frac{\prod\limits_{i=p+1}^{N-r}\Gamma(z-\lambda_i+i)\Gamma(w+N+1+\lambda_i-i)}{\prod\limits_{i=p+1}^{N-r+1}\Gamma(z-\nu_i+i)\Gamma(w+N+2+\nu_i-i)}$$
$$=\frac{\prod\limits_{i=p+1}^{N-r}\Gamma(z+p-\lambda_i^2+i)\Gamma(w+r+N+1+\lambda_i^2-i)}{\prod\limits_{i=p+1}^{N-r+1}\Gamma(z+p-\nu_i^2+i)\Gamma(w+r+N+2+\nu_i^2-i)}$$
$$=\frac{(\xi_{\nu^2},\xi_{\lambda^2})_{q,s}}{C_{q,s;N-r-p,N-r-p+1}},$$

где $(\xi_{\nu^2},\xi_{\lambda^2})_{q,s}$ означает скалярное произведение векторов ξ_{ν^2} и ξ_{λ^2}, рассматриваемых как векторы представления T_{qs}. Пользуясь этими равенствами и равенством (7), получаем, что

$$\sum_{\nu\succ\lambda} f(\nu)(\xi_\nu,\xi_\lambda)=\frac{D_{N+1}C_{z,w;N,N+1}}{C_{q,s;N-r-p,N-r-p+1}}\sum_{\nu^2\succ\lambda^2} f_2(\nu^2)(\xi_{\nu^2},\xi_{\lambda^2})_{q,s}$$
$$\times\frac{1}{(N+w+q)^{\downarrow p}}\sum_{\nu^1\succcurlyeq\lambda^1} f_1(\nu^1)$$
$$\prod_{\nu^1\setminus\lambda^1}(-p-c_{\nu^1}(b))\frac{\prod_{\lambda^1}(N+w+q+c_{\lambda^1}(b))}{\prod_{\nu^1}(N+1+q+w+c_{\nu^1}(b))}$$
$$\times\frac{1}{(N+z+s)^{\downarrow r}}\sum_{\nu^3\succcurlyeq\lambda^3} f_3(\nu^3)$$
$$\prod_{\nu^3\setminus\lambda^3}(-r-c_{\nu^3}(b))\frac{\prod_{\lambda^3}(N+s+z+c_{\lambda^3}(b))}{\prod\limits_{\nu^3}(N+1+s+z+c_{\nu^3(b)})}=*.$$

Используя лемму 4.10 и псевдогармоничность функции $a_{q,s;N}(\lambda)$, получаем, что

$$*=\frac{D_{N+1}C_{z,w;N,N+1}f_1(\lambda^1)f_2(\lambda^2)f_3(\lambda^3)}{C_{-p,0;N+w+q,N+w+q+1}C_{q,s;N-r-p,N-r-p+1}C_{-r,0;N+z+s,N+z+s+1}}$$
$$\times\frac{1}{(N+w+q)^{\downarrow p}(N+z+s)^{\downarrow r}}=D_N f_1(\lambda^1)f_2(\lambda^2)f_3(\lambda^3)=f_{pqrs}(\lambda).\qquad\square$$

Лемма 4.14. *Функция f_{pqrs}, определенная ранее, удовлетворяет условию типа Харди. Таким образом, $f_{pqrs} \in \mathcal{F}_{pqrs}$.*

Доказательство. Имеем

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}(N)} |f_{pqrs}(\lambda)|^2 = D_N^2 \left(\sum |f_1(\lambda^1)|^2\right) \left(\sum |f_3(\lambda^3)|^2\right) \left(\sum |f_2(\lambda^2)|^2\right),$$

где суммы берутся по $\lambda^1 \in \mathbb{GT}(p; N+w+q)$, $\lambda^3 \in \mathbb{GT}(r; N+z+s)$ и $\lambda^2 \in \mathbb{GT}_{N-r-p}(0,q;0,s)$ соответственно. При этом коэффициент D_N имеет предел, первые две суммы ограничены по лемме 4.11, а третья ограничена, так как функция $a_{q,s;N-r-p}(\lambda)$ лежит в $\mathcal{F}_{0q0s}$, а значит, удовлетворяет условию типа Харди. Таким образом, сумма

$$\sum_{\lambda \in \mathbb{GT}(N)} |f_{pqrs}(\lambda)|^2$$

ограничена, что и требовалось доказать. □

Первая часть теоремы 4.5 доказана. Докажем теперь вторую часть. Для этого сравним два семейства вероятностных мер на $\mathbb{GT}_N$. Первое семейство является когерентной системой мер, соответствующей спектральной функции φ_{pqrs}, определенной в теореме 4.5:

$$M_{pqrs}^{(N)}(\lambda) = \frac{\|Q_\lambda v_{pqrs}\|^2}{\|v_{pqrs}\|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N.$$

По теореме 1.5 спектральная мера σ_{pqrs} является слабым пределом мер $\bar{\imath}_N(M_{pqrs}^{(N)})$.

Второе семейство мер имеет вид

$$\overline{M}_{pqrs}^{(N)}(\lambda) = \frac{\|Q_\lambda v_{pqrs}^{(N)}\|^2}{\|v_{pqrs}^{(N)}\|^2} = \frac{|f_{pqrs}(\lambda)|^2}{\|v_{pqrs}^{(N)}\|^2}, \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N,$$

где $v_{pqrs}^{(N)} = P_N v_{pqrs}$ – проекция вектора v_{pqrs} на H^N. Носителем меры $\overline{M}_{pqrs}^{(N)}$ является множество $\mathbb{GT}_N(p.q;r,s)$.

Лемма 4.15.

$$\|M_{pqrs}^{(N)} - \overline{M}_{pqrs}^{(N)}\| \to 0, \quad n \to \infty,$$

где $\|\mu\|$ – полная вариация меры μ.

Доказательство. Для упрощения обозначений положим

$$\xi_1 = \|v_{pqrs}\|^{-1} v_{pqrs}, \quad \xi_2 = \|v_{pqrs}^{(N)}\|^{-1} v_{pqrs}^{(N)}$$

и для произвольного подмножества $X \subset \mathbb{GT}_N$ положим

$$Q_X = \sum_{\lambda \in X} Q_\lambda.$$

Так как операторы Q_λ при $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ попарно ортогональны и сумма по всем $\lambda \in \mathbb{GT}_N$ равна 1, имеем $\|Q_X\| \le 1$ для любого X. Для любых двух вероятностных мер μ_1, μ_2 на одном борелевском пространстве выполнено неравенство

$$\|\mu_1 - \mu_2\| \le 2 \sup_X |\mu_1(X) - \mu_2(X)|,$$

где супремум берется по произвольным борелевским подмножествам. Применяя это неравенство к мерам $\mu_1 = M^{(N)}_{pqrs}$ и $\mu_2 = \overline{M}^{(N)}_{pqrs}$, получаем, что

$$\|M^{(N)}_{pqrs} - \overline{M}^{(N)}_{pqrs}\| \le 2 \sup_{X \subset \mathbb{GT}_N} |(Q_X \xi_1, \xi_1) - (Q_X \xi_2, \xi_2)| \le 4\|\xi_1 - \xi_2\| \to 0.$$

□

Для любой сигнатуры $\lambda \in \mathbb{GT}(p, q; r, s)$ положим

$$\begin{gathered}
a_1^+ = \lambda_1^1, \dots, a_p^+ = \lambda_p^1; \quad a_1^- = \lambda_1^3, \dots, a_r^- = \lambda_r^3; \\
b_1^+ = (\lambda^{2+})'_1, \dots, b_q^+ = (\lambda^{2+})'_q; \\
b_1^- = (\lambda^{2-})'_1, \dots, b_s^- = (\lambda^{2-})'_s; \\
\alpha_i^\pm = \frac{a_i^\pm}{N}; \quad \beta_i^\pm = \frac{b_i^\pm}{N}; \\
\imath_N(\lambda) = (\alpha_1^+, \dots, \alpha_p^+; \beta_1^+, \dots, \beta_q^+; \alpha_1^-, \dots, \alpha_r^-; \beta_1^-, \dots, \beta_s^-).
\end{gathered}$$

Мы будем отождествлять $\imath_N(\lambda)$ с точкой множества $\Omega(p, q; r, s)$, определенного в разделе 1.

Лемма 4.16. *Меры $\imath_N(\overline{M}^{(N)}_{pqrs})$ на $\Omega(p, q; r, s)$ слабо сходятся к вероятностной мере, которая абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет плотность, описанную в формулировке теоремы* 4.5.

Доказательство. Заметим, что меры $\imath_N(\overline{M}^{(N)}_{pqrs})$ равномерно плотны, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такой компакт K, что $\imath_N(\overline{M}^{(N)}_{pqrs})(K) < \varepsilon$ для достаточно большого N. Доказательство этого факта мы

опускаем, поскольку оно аналогично доказательству леммы 5.5, приведенному в разделе 6. Далее, нетрудно видеть, что

$$B^2_{-p;N+w+q}(\lambda^1) = \mathrm{const}\,\frac{V^2(\{\alpha_i^+\})}{\prod(1+\alpha_i^+)^{2p}}(1+O(\frac{1}{N}))N^{-p},$$

$$B^2_{-r;N+z+s}(\lambda^3) = \mathrm{const}\,\frac{V^2(\{\alpha_k^-\})}{\prod(1+\alpha_k^-)^{2r}}(1+O(\frac{1}{N}))N^{-r},$$

$$a^2_{q,s;N-r-p}(\lambda^2)$$
$$= \mathrm{const}\,V^2(\beta_j^+)V^2(\beta_l^-)\prod(1-\beta_j^+-\beta_l^-)^2(1+O(\frac{1}{N}))N^{-(q+s)}.$$

Здесь $O(1/N)$ равномерно по λ, где $\imath_N(\lambda) \in K$. Перемножая эти выражения и учитывая, что D_N имеет предел, размерность множества $\Omega(p,q;r,s)$ равна $p+q+r+s$ и меры $\imath_N(\overline{M}^{(N)}_{pqrs})$ равномерно плотны, получаем требуемое утверждение. □

Лемма 4.17. *Меры $\bar\imath_N(\overline{M}^{(N)}_{pqrs})$ сходятся к той же предельной мере.*

Доказательство. Сравним два отображения:

$$\bar\imath_N\colon \mathbb{GT}(p,q;r,s) \to \Omega \quad \text{и} \quad \imath_N\colon \mathbb{GT}(p,q;r,s) \to \Omega(p,q;r,s) \subset \Omega.$$

Из их определений следует, что

$$\alpha_i^\pm = \beta_i^\pm = \bar\alpha_i^\pm = \bar\beta_i^\pm = 0$$

для $i > \max(p,q,r,s)$ и

$$|\alpha_i^\pm - \bar\alpha_i^\pm| \le \frac{\mathrm{const}}{N}, \quad |\beta_i^\pm - \bar\beta_i^\pm| \le \frac{\mathrm{const}}{N},$$

где const не зависит от λ. Из этих оценок и следует утверждение леммы. □

§5. Цикличность вектора v_{pqrs}

Зафиксируем такие p, q, r и s, что $q-p=z$, $s-r=w$. В этом разделе мы докажем следующую теорему.

Теорема 5.1. *Вектор v_{pqrs}, построенный ранее, является циклическим вектором представления T_{pqrs}.*

Так как $z+w \ge 0$, только одно из чисел q или s может быть отрицательным. В дальнейшем мы будем считать, что они оба неотрицательны. Случаи отрицательных q или s рассматриваются аналогично.

Обозначим через $\mathcal{A}^+_{pqrs}$ подмножество неотрицательных эрмитовых операторов в $\mathcal{A}_{pqrs}$, где $\mathcal{A}_{pqrs}$ – коммутант представления T_{pqrs}. Образ этого подмножества при изоморфизме $\mathcal{A}_{pqrs} \to \widetilde{\mathcal{A}}_{pqrs}$ содержится в множестве $\widetilde{\mathcal{A}}^+_{pqrs} \subset \widetilde{\mathcal{A}}_{pqrs}$ функций с неотрицательными значениями, где $\widetilde{\mathcal{A}}_{pqrs} \subset \widetilde{\mathcal{A}}$ – множество функций из $\widetilde{\mathcal{A}}$ (т.е. удовлетворяющих условию (3)), равных нулю вне множества $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$. Обозначим через $\lambda_{\min}$ сигнатуру длины $p+r$, у которой первые p компонент равны q, а последние r компонент равны $-s$.

Лемма 5.2. *Пусть* $A \in \widetilde{\mathcal{A}}^+_{pqrs}$ *и* $A(\lambda_{\min}) = 0$. *Тогда* $A \equiv 0$.

Доказательство. Заметим, что из соотношения

$$A(\lambda) = \sum_{\nu \succ \lambda} A(\nu) p_{zw}(\lambda, \nu)$$

и неотрицательности $A(\cdot)$ и $p_{zw}(\cdot,\cdot)$ следует, что если $A(\lambda) = 0$, то $A(\nu) = 0$ для всех $\nu \succ \lambda$. Значит, $A(\nu) = 0$ для всех ν, для которых существует путь из $\lambda_{\min}$ в ν. Так как все вершины из $\mathbb{GT}_{2(p+r)}(p,q;r,s)$ обладают этим свойством, $A(\nu) = 0$ для всех ν из $\mathbb{GT}_{2(p+r)}(p,q;r,s)$. Пользуясь снова основным соотношением для функции A, получаем требуемое утверждение. $\square$

Определим функцию $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)$ на графе $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$ рекуррентным соотношением

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\nu) = \sum_{\lambda : \lambda \prec \nu} \mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) p_{zw}(p,q;r,s)$$

с начальным условием

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda_{\min}) = 1.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}^{(N)}_{pqrs}$ меру на $\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$ с весом $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)$ в вершине $\lambda \in \mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$. Так как

$$\sum_{\nu \succ \lambda} p_{zw}(\lambda, \nu) = 1,$$

все $\mathfrak{M}^{(N)}_{pqrs}(\lambda)$ являются вероятностными мерами.

Далее вплоть до леммы 5.10 мы предполагаем, что q и s неотрицательны.

Лемма 5.3. *Пусть* $\lambda \in \mathbb{GT}(p,q;r,s)$. *Тогда*

$$\begin{aligned}\operatorname{Dim}_N \lambda = {} & \frac{\prod(a_i^+ + N - r + q + s - i)! \prod(a_k^- + N - p + q + s - k)!}{\prod(a_i^+ + p - i)! \prod(a_k^- + r - k)! \prod(b_j^+ + q - j)! \prod(b_l^- + s - l)!} \\ & \times \frac{V(\{a_i^+ - i\})V(\{a_k^- - k\}) \prod(a_i^+ + a_k^- + N + q + s - k - i + 1)}{\prod(a_i^+ + b_j^+ + p - i + q - j + 1) \prod(a_i^+ - b_l^- + N + q - r + l - i)} \\ & \times \frac{V(\{b_j^+ - j\})V(\{b_l^- - l\}) \prod(N - r - p - 1 - b_j^+ - b_l^- + l + j)}{\prod(a_k^- + b_l^- + r - k + s - l + 1) \prod(a_k^- - b_j^+ + N + s - p + j - k)} \\ & \times \frac{1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot (N - r - p + q + s - 1)!}{\prod(N-r-p-b_l^- + q + l - 1)! \prod(N-r-p-b_j^+ + s + j - 1)! 1! \ldots (N-1)!}.\end{aligned}$$

Доказательство. Обозначим правую часть этой формулы через $\widetilde{\operatorname{Dim}}_N \lambda$. Докажем формулу индукцией по $p + r$. Сначала проверим справедливость индукционного перехода. Пусть $p + r \geq 1$. Без ограничения общности можно считать, что $p \geq 1$. Воспользуемся формулой Вейля для размерности:

$$\operatorname{Dim}_N \lambda = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{\lambda_i - \lambda_j + j - i}{j - i} = \prod_{2 \leq j \leq N} \frac{\lambda_1 - \lambda_j + j - 1}{j - 1} \operatorname{Dim}_{N-1} \widetilde{\lambda},$$

где $\widetilde{\lambda}$ обозначает сигнатуру $\lambda_2 \geq \lambda_3 \geq \ldots \geq \lambda_N$, получаемую из λ отбрасыванием первой строки. Значит,

$$\begin{aligned}\frac{(N-1)! \operatorname{Dim}_N \lambda}{\operatorname{Dim}_{N-1} \widetilde{\lambda}} = \prod_{2 \leq j \leq N} \frac{\lambda_1 - \lambda_j + j - 1}{j - 1} = \prod_{j=2}^{p} (q + a_1^+ - q - a_j + j - 1) \\ \times \prod_{j=1}^{q} (a_1^+ + p + j - 1 + b_{q-j+2}^+)^{\uparrow(b_{q-j+1}^+ - b_{q-j+2}^+)} \times (a_1^+ + b_1^+ + p + q)^{\uparrow F} \\ \times \prod_{j=1}^{s} (q + a_1^+ + N - b_j^- - r + j)^{\uparrow(b_j^- - b_{j+1}^-)} \prod_{j=1}^{r} (q + a_1^+ + s + a_j^- + N - j),\end{aligned}$$

где $F = N - p - b_1^+ - b_1^- - r$ и $b_{q+1}^+ = b_{s+1}^+ = 0$. Далее,

$$\begin{aligned}\frac{\widetilde{\operatorname{Dim}}_N \lambda}{\widetilde{\operatorname{Dim}}_{N-1} \widetilde{\lambda}} = {} & \frac{(a_1^+ + N - r + q + s - 1)! \prod_{j=2}^{r} (a_1^+ - a_j^+ + j - 1)}{(a_1^+ + p - 1)! \prod_{j=1}^{q} (a_1^+ + b_j^+ + p - 1 + q - j + 1)} \\ & \times \frac{\prod_{k=1}^{r} (a_1^+ + a_k^- + N + q + s - k - 1 + 1)}{(N-1)! \prod_{l=1}^{s} (a_1^+ - b_l^- + n + q - r + l - 1)} = \frac{\operatorname{Dim}_N \lambda}{\operatorname{Dim}_{N-1} \widetilde{\lambda}}.\end{aligned}$$

Так как $\widetilde{\lambda} \in \mathbb{GT}(p-1,q;r,s)$, имеем $\widetilde{\mathrm{Dim}}_{N-1}\widetilde{\lambda} = \mathrm{Dim}_{N-1}\widetilde{\lambda}$ по предположению индукции. Значит, $\widetilde{\mathrm{Dim}}_N \lambda = \mathrm{Dim}_N \lambda$. При $p = r = 0$ формула аналогичным образом доказывается индукцией по $q+s$. $\square$

Лемма 5.4. *Для функции $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)$ имеет место следующая явная формула:*

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\\
&= C(p,q;r,s)\frac{(N-r-p)!\cdot\ldots\cdot(N-r-p+q+s-1)!}{(N-r-p+q+s)!\cdot\ldots\cdot(N-2r-2p+2q+2s-1)!}\\
&\quad\times\frac{V^2(\{a_i^+-i\})V^2(\{a_k^--k\})\prod(a_i^++a_k^-+N+q+s-k-i+1)}{\prod(a_i^++b_j^++p-i+q-j+1)\prod(a_i^+-b_l^-+N+q-r+l-i)}\\
&\quad\times\frac{V^2(\{b_j^+-j\})V^2(\{b_l-l\})\prod(N-r-p-1-b_j^+-b_l^-+l+j)^2}{\prod(a_k^-+b_l^-+r-k+s-l+1)\prod(a_k^--b_j^++N+s-p+j-k)}\\
&\times\frac{1}{\prod(a_i^++N-r-p-1+i)^{\uparrow(p+q+s)}\prod(a_k^-+N-r-p-1+k)^{\uparrow(r+q+s)}}\\
&\times\frac{1}{(N-2r-p)!\cdot\ldots\cdot(N-r-p-1)!(N-2p-r)!\cdot\ldots\cdot(N-r-p-1)!},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
&C(p,q;r,s)\\
&= \frac{(q+s)!^2\ldots(q+r+s-1)!^2(q+s)!^2\ldots(q+p+s-1)!^2}{0!^3 1!^3\ldots(p-1)!^3 0!^3 1!^3\ldots(p-1)!^3(q+s+p)^{\uparrow r}\ldots(q+s+1)^{\uparrow r}}\\
&\times\frac{(2q+2s-2r-2p)!\ldots(2q+2s-r-p-1)!}{(q+s-r-p)!^4\ldots(q+s-1)!^4}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Функция $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)$ удовлетворяет соотношению

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\nu) = \sum_{\lambda\prec\nu}\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\left|\frac{a_{zw}(\nu)}{a_{zw}(\lambda)}\right|^2\frac{\mathrm{Dim}_N\lambda}{\mathrm{Dim}_{N+1}\nu}.$$

Положим

$$\mathfrak{M}'_{pqrs}(\lambda) = \frac{\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\,\mathrm{Dim}_N\lambda}{|a_{zw}(\lambda)|^2}.$$

Тогда для этой новой функции выполнено более простое рекуррентное соотношение:

$$\mathfrak{M}'_{pqrs}(\nu) = \sum_{\lambda\prec\nu}\mathfrak{M}'_{pqrs}(\lambda).$$

Его решение имеет вид

$$\mathfrak{M}'_{pqrs}(\lambda) = \mathrm{const}\cdot\mathrm{Dim}(\lambda_{\min},\lambda),$$

где $\operatorname{Dim}(\lambda_{\min},\lambda)$ обозначает количество путей в графе $\mathbb{GT}(p,q;r,s)$ из $\lambda_{\min}$ в λ. Очевидно, что

$$\operatorname{Dim}(\lambda_{\min},\lambda)=\operatorname{Dim}_{N-r-p}\lambda^1\operatorname{Dim}_{N-r-p}\lambda^2\operatorname{Dim}_{N-r-p}\lambda^3.$$

Пользуясь предыдущей леммой, получаем требуемый результат. Константа находится из соотношения $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda_{\min})=1$. □

В дальнейшем нам понадобятся три технические леммы, доказательство которых будет дано ниже.

Лемма 5.5. *Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $E>0$, что*

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N(p,q;r,s);\ \max(a_1^+,a_1^-)>EN}\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\le\varepsilon$$

для всех достаточно больших N.

Лемма 5.6. *Для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta>0$, что*

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N(p,q;r,s):\ \max(a_p^++b_q^+,a_p^++N-b_1^-)\le\delta N}\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\le\varepsilon$$

для всех достаточно больших N.

Лемма 5.7. *Функция*

$$G_{pqrs}=\frac{V^2(\{\alpha_i^+\})V^2(\{\alpha_k^-\})\prod(\alpha_i^++\alpha_k^-+1)}{\prod(\alpha_i^++\beta_j^+)\prod(\alpha_i^+-\beta_l^-+1)\prod(1+\alpha_i^+)^{p+q+s}\prod(1+\alpha_k^-)^{r+q+s}}$$
$$\times\frac{V^2(\{\beta_j^+\})V^2(\{\beta_l^-\})\prod(1-\beta_j^+-\beta_l^-)^2}{\prod(\alpha_k^-+\beta_l^-)\prod(\alpha_k^--\beta_j^++1)}$$

на $\Omega(p,q;r,s)$ интегрируема относительно меры Лебега $d\omega$.

Пусть $\widehat{\mathfrak{M}}_{pqrs}^{(N)}=\imath_N(\mathfrak{M}_{pqrs}^{(N)})$ – образ меры $\mathfrak{M}_{pqrs}^{(N)}$ при отображении $\imath_N$. Из лемм 5.5, 5.6 и 5.7 и равенства

$$\mathfrak{M}_{pqrs}^{(N)}(\lambda)$$
$$=\frac{C(p,q;r,s)N^{-(p+q+r+s)}V^2(\{\alpha_i^++O(1/N)\})V^2(\{\alpha_k^-+O(1/N)\})}{\prod(\alpha_i^++\beta_j^++O(1/N))\prod(\alpha_i^+-\beta_l^-+1+O(1/N))}$$
$$\times\frac{\prod(\alpha_i^++\alpha_k^-+1+O(1/N))}{\prod(1+\alpha_i^++O(1/N))^{p+q+s}\prod(1+\alpha_k^-+O(1/N))^{r+q+s}}$$
$$\times\frac{V^2(\{\beta_j^++O(1/N)\})V^2(\{\beta_l^-+O(1/N)\})\prod(1-\beta_j^+-\beta_l^-+O(1/N))^2}{\prod(\alpha_k^-+\beta_l^-+O(1/N))\prod(\alpha_k^--\beta_j^++1+O(1/N))}$$

следует такой результат.

Лемма 5.8. *Меры* $\widehat{\mathfrak{M}}^{(N)}_{pqrs}$ *на* $\Omega(p,q;r,s)$ *слабо сходятся к вероятностной мере* $\mathfrak{M}^{(\infty)}_{pqrs}$, *которая абсолютно непрерывна относительно меры Лебега и имеет плотность* $C(p,q;r,s)G_{pqrs}$.

Следствие 5.9.

$$\int_{\Omega(p,q;r,s)} G(p,q;r,s)d\omega = \frac{1}{C(p,q;r,s)}.$$

Лемма 5.10. *Пусть* $A \in \mathcal{A}^{+}_{pqrs}$ *и* $A \neq 0$. *Тогда*

$$\frac{(Av_{pqrs}, v_{pqrs})}{(v_{pqrs}, v_{pqrs})} > 0.$$

Доказательство. Сначала докажем лемму в предположении, что q и s неотрицательны. Положим

$$A^{(N)} = P_N A P_N, \quad v^{(N)}_{pqrs} = P_N v_{pqrs}.$$

При $N \to \infty$ оператор $P_N A P_N$ сильно сходится к A, поэтому

$$(Av_{pqrs}, v_{pqrs}) = \lim_{N\to\infty}(P_N A P_N v_{pqrs}, v_{pqrs}) = \lim_{N\to\infty}(A^{(N)} v^{(N)}_{pqrs}, v^{(N)}_{pqrs}).$$

Из предложения 3.3 следует, что

$$A^{(N)} = \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)} A(\lambda)P(\lambda),$$

где $A(\lambda)$ – это функция из $\widetilde{\mathcal{A}}^{+}_{pqrs}$, соответствующая оператору A. По определению вектора v_{pqrs}

$$v^{(N)}_{pqrs} = \sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)} f_{pqrs}(\lambda)\xi_\lambda.$$

Поэтому

$$(A^{(N)} v^{(N)}_{pqrs}, v^{(N)}_{pqrs}) = \sum |f_{pqrs}(\lambda)|^2 A(\lambda) = \sum A(\lambda)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\frac{|f_{pqrs}(\lambda)|^2}{\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)}, \tag{15}$$

где суммы в обоих случаях берутся по $\lambda \in \mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$. Из явных формул для $f_{pqrs}(\lambda)$ и $\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)$ видно, что $\frac{|f_{pqrs}(\lambda)|^2}{\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)}$ при $N \to \infty$ сходится к некоторой непрерывной положительной почти всюду функции h_{pqrs}, причем равномерно на $\imath_N^{-1}(K)$, где K – произвольный компакт в $\Omega(p,q;r,s)$.

Обозначим через $\mathfrak{N}^{(N)}_{pqrs}$ следующую меру на $\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$:

$$\mathfrak{N}^{(N)}_{pqrs}(\lambda) = A(\lambda)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda), \quad \lambda \in \mathbb{GT}_N(p,q;r,s).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
&\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)} \mathfrak{N}^{(N)}_{pqrs}(\lambda)\\
&= \sum_{\lambda} A(\lambda)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) = \sum_{\lambda}\sum_{\nu\succ\lambda} A(\nu)p_{zw}(\lambda,\nu)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\\
&= \sum_{\nu} A(\nu)\sum_{\lambda\prec\nu} p_{zw}(\lambda,\nu)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) = \sum_{\nu\in\mathbb{GT}_{N+1}(p,q;r,s)} \mathfrak{N}^{(N+1)}_{pqrs}(\nu).
\end{aligned}$$

Таким образом, мера $\mathfrak{N}^{(N)}_{pqrs}$ множества $\mathbb{GT}_N(p,q;r,s)$ не зависит от N. Так как по лемме 5.2 имеем $A(\lambda_{\min}) \neq 0$, все меры $\mathfrak{N}^{(N)}_{pqrs}$ ненулевые. Из леммы 5.5 и ограниченности функции $A(\cdot)$ следует, что семейство мер $\widetilde{\mathfrak{N}}^{(N)}_{pqrs} := \bar{\imath}_N(\mathfrak{N}^{(N)}_{pqrs})$ равномерно плотно. Значит, можно выбрать такую подпоследовательность индексов $N_1 < N_2 < \ldots$, что меры $\widetilde{\mathfrak{N}}^{(N_i)}_{pqrs}$ слабо сходятся на $\Omega(p,q;r,s)$ к некоторой ненулевой мере $\widetilde{\mathfrak{N}}^{(\infty)}_{pqrs}$.

Из ограниченности функции $A(\cdot)$ получаем, что

$$\widetilde{\mathfrak{N}}^{(N)}_{pqrs} \leq \|A\|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(N)}_{pqrs}.$$

По лемме 5.8 меры $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(N)}_{pqrs}$ слабо сходятся к мере $\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\infty)}_{pqrs}$, которая абсолютно непрерывна относительно меры Лебега на $\Omega(p,q;r,s)$. Так как

$$\widetilde{\mathfrak{N}}^{(\infty)}_{pqrs} \leq \|A\|\widetilde{\mathfrak{M}}^{(\infty)}_{pqrs},$$

мера $\widetilde{\mathfrak{N}}^{(\infty)}_{pqrs}$ также абсолютно непрерывна. Имеем

$$(Av_{pqrs}, v_{pqrs}) = \lim_{N\to\infty}\sum A(\lambda)\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\frac{|f_{pqrs}(\lambda)|^2}{\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)} = \left\langle \widetilde{\mathfrak{N}}^{(\infty)}_{pqrs}, g_{pqrs}\right\rangle > 0,$$

так как ненулевая мера $\widetilde{\mathfrak{N}}^{(\infty)}_{pqrs}$ абсолютно непрерывна, а функция g_{pqrs} непрерывна и положительна почти всюду на $\Omega(p,q;r,s)$.

Теперь пусть одно из чисел q или s отрицательно. Так как $q+s \geq 0$, существует такое целое число k, что $q+k \geq 0$, $s-k \geq 0$. Тогда в силу

равенства (15) и замечания 4.6

$$\begin{aligned}(A^{(N)}v^{(N)}_{pqrs}, v^{(N)}_{pqrs}) &= \sum |f_{pqrs}(\lambda)|^2 A(\lambda)\\ &= \sum |f_{p(q+k)r(s-k)}(\lambda+(k,\dots,k))|^2 A^*(\lambda+(k,\dots,k)), \quad (16)\end{aligned}$$

где $A^*(\lambda) = A(\lambda-(k,\dots,k))$. Из цепочки равенств

$$\begin{aligned}A^*(\lambda) = A(\lambda-(k,\dots,k)) &= \sum_{\nu\succ\lambda} p_{zw}(\lambda-(k,\dots,k),\nu-(k,\dots,k))\\ &= \sum_{\nu\succ\lambda}\left|\frac{a_{zw}(\nu-(k,\dots,k))}{a_{zw}(\lambda-(k,\dots,k))}\right|^2 \frac{\mathrm{Dim}_N(\lambda-(k,\dots,k))}{\mathrm{Dim}_{N+1}(\nu-(k,\dots,k))}\\ &= \sum_{\nu\succ\lambda} p_{z+k,w-k}(\lambda,\nu)A^*(\nu)\end{aligned}$$

следует, что $A^*(\cdot)\in\widetilde{A}^+_{p(q+k)r(s-k)}$. Значит, можно применить уже доказанное для неотрицательных $q+k$ и $s-k$ к равенству (16) и получить требуемое утверждение. □

Из этой леммы следует теорема 5.1. Действительно, пусть v_{pqrs} не является циклическим вектором. Тогда линейная оболочка векторов $T_{pqrs}(g)$, $g\in G$, не является всем пространством H_{pqrs}. Тогда проектор P_{pqrs} на ортогональное дополнение к этой линейной оболочке лежит в $\mathcal{A}^+_{pqrs}$ и не равен 0, но $(P_{pqrs}v_{pqrs}, v_{pqrs}) = 0$, что противоречит лемме 5.10. Теорема доказана.

§6. Доказательство лемм 5.5, 5.6 и 5.7

Доказательство леммы 5.5. Разобьем сумму в условии леммы на две: в одной будут слагаемые, для которых $a_1^+ \geq a_1^-$, а во второй – слагаемые, для которых $a_1^+ < a_1^-$. Ограничимся рассмотрением первой из этих сумм. Обозначим через $\widetilde{\lambda}$ сигнатуру, получаемую из λ

отбрасыванием первой строки. Легко видеть, что

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)=\mathfrak{M}_{(p-1)qrs}(\widetilde{\lambda})\cdot\frac{C(p,q;r,s)}{C(p-1,q;r,s)\prod\limits_{i=2}^{p}(a_i^+ +N+q+s-r-3+i)}$$
$$\times\frac{(N-2r-2p+2q+2s)!\prod_{i=2}^{p}(a_i^+ +N-r-p-2+i)}{(a_1^+ +N-r-p-1+i)^{\uparrow(p+q+s)}\prod_{i=2}^{p}(a_i^+ +N+q+s-r-2+i)}$$
$$\times\frac{\prod_{i=2}^{p}(a_1^+ -a_i^+ +i-1)\prod(a_1^+ +a_k^- +N+q+s-k)}{(N-2p-r)!\prod(a_1^+ +b_j^+ +p+q-j)\prod(a_1^+ -b_l^- +N+q-r+l-1)}$$
$$=L\cdot\mathfrak{M}_{(p-1)qrs}(\widetilde{\lambda}).$$

При этом

$$L\le\frac{(a_1^+)^{2(p-1)}(2a_1^+ +N+q+s)^r(N+2z+2w)^{2q+2s-r}}{N^{p-1}(a_1^+ +N-r-p)^{p+q+s}(a_1^+)^q(a_1^+)^s}$$
$$\le\frac{2^r(N+2z+2w)^{2q+2s-r-p}N}{(a_1^+)^2(a_1^+)^{2q+2s-r-p}}\le\frac{E^{-p}N}{(a_1^+)^2}.$$

Таким образом,

$$\sum_{\lambda\in\mathbb{GT}_N(p,q;r,s);\ a_1^+>EN,a_1^+\ge a_1^-}\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)$$
$$\le\sum_{a_1^+>EN}\frac{E^{-p}N}{(a_1^+)^2}\sum_{\widetilde{\lambda}\in\mathbb{GT}_{N-1}(p-1,q;r,s);\widetilde{a_1}^+\le a_1^+}\mathfrak{M}_{(p-1)qrs}(\widetilde{\lambda})$$
$$\le\frac{E^{-p}N}{EN}\sum_{\widetilde{\lambda}\in\mathbb{GT}_{N-1}(p,q;r,s)}\mathfrak{M}_{(p-1)qrs}(\lambda)\le E^{-(p+1)},$$

где мы воспользовались тем, что

$$\sum_{\widetilde{\lambda}\in\mathbb{GT}_{N-1}(p-1,q;r,s)}\mathfrak{M}_{(p-1)qrs}(\widetilde{\lambda})=1,$$

так как $q-(p-1)+(s-r)=z+w+1\ge 0$. □

Для доказательства леммы 5.6 нам понадобится обобщение тождества Коши

$$\det\left[\frac{1}{x_i+y_j}\right]_{i,j=1}^{m}=\frac{V(x)V(y)}{\prod_{i,j}(x_i+y_j)}$$

на случай, когда количество переменных x_i и y_j может быть различным.

Пусть $x = (x_1, \dots, x_p)$, $y = (y_1, \dots, y_q)$ и $q \geq p$. Обозначим символом $y = y' \sqcup y''$ произвольное разбиение множества переменных $y = (y_1, \dots, y_q)$ на два непересекающихся подмножества, содержащие $q - p$ и p переменных соответственно:

$$y' = (y'_1, \dots, y'_{q-p}) = (y_{i_1}, \dots, y_{i_{q-p}}),$$
$$y'' = (y''_1, \dots, y''_p) = (y_{j_1}, \dots, y_{j_p}),$$

где

$$i_1 < \dots < i_{q-p},\ j_1 < \dots < j_p,$$
$$\{i_1, \dots, i_{q-p}\} \cup \{j_1 < \dots < j_p\} = \{1, \dots q\}.$$

Лемма 6.1 ([5, Lemma 7.6.1])**.**

$$\frac{V(x_1, \dots, x_p)V(y_1, \dots, y_q)}{\prod(x_i + y_j)} = \sum_{y = y' \sqcup y''} \operatorname{sgn}(y', y'')V(y'_1, \dots, y'_{q-p}) \det \left[\frac{1}{x_i + y''_j}\right]_{i,j=1}^{p}, \quad (17)$$

где знак $\operatorname{sgn}(y', y'')$ *полагается равным* ± 1 *в зависимости от четности перестановки* $(i_1, \dots, i_{q-p}, j_1, \dots, j_p)$ *чисел* $1, \dots, q$.

Доказательство леммы 5.6. Разобьем сумму в условии леммы на две: в одной будут слагаемые, для которых $a_p^+ + b_q^+ \leq a_p^+ + N - b_1^-$, а во второй – слагаемые, для которых $a_p^+ + N - b_1^- < a_p^+ + b_q^+$. Ограничимся рассмотрением первой из этих сумм. Выберем такое E, что сумма в формулировке леммы 5.5 не превосходит $\varepsilon/2$. Покажем, что существует такое δ, что сумма по тем λ, для которых $a_p^+ + b_q^+ \leq a_p^+ + N - b_1^-$, $a_p^+ + b_q^+ \leq \delta N$ и $\max(a_1^+, a_1^-) < EN$, меньше чем $\varepsilon/2$, откуда и будет следовать утверждение леммы. Обозначим множество таких сигнатур λ через $\Delta(E, \delta)$. Для $\lambda \in \Delta(E, \delta)$ имеем

$$\prod(a_i^+ + a_k^- + N + q + s - k - i + 1) \leq (2E + 2)^{pr} N^{pr} = \mathrm{const}_1 N^{pr}.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{\prod(a_i^+ + N - r - p - 1 + i)^{\uparrow(p+q+s)} \prod(a_k^- + N - r - p - 1 + k)^{\uparrow(r+q+s)}}$$

$$\leq \mathrm{const}_2 N^{-p(p+q+s)-r(r+q+s)}$$

и

$$\frac{(N-r-p)! \cdot \ldots \cdot (N-r-p+q+s-1)!}{(N-r-p+q+s)! \cdot \ldots \cdot (N-2r-2p+2q+2s-1)!}$$
$$\times \frac{1}{(N-2r-p)! \cdot \ldots \cdot (N-r-p-1)!(N-2p-r)! \cdot \ldots \cdot (N-r-p-1)!}$$

$$\leq \mathrm{const}_3 \cdot N^{\frac{(-2r-2p+q+s-1)(q+s)}{2} + \frac{(3r+2p+1)r}{2} + \frac{(3p+2r+1)p}{2} - \frac{(3q+3s-3r-3p-1)(q+s-r-p)}{2}}$$
$$= \mathrm{const}_3 \cdot N^{-q^2-s^2-2qs-pr+2(r+p)(q+s)}.$$

Положим

$$x_i^+ = a_i^+ + p - i, \quad 1 \leq i \leq p; \quad y_j^+ = b_j^+ + q - j, \quad 1 \leq j \leq q;$$
$$x_k^- = a_k^- + r - k, \quad 1 \leq k \leq r; \quad y_l^- = b_l^- + s - l, \quad 1 \leq l \leq s.$$

Тогда, учитывая приведенные выше неравенства, для $\lambda \in \Delta(E, \delta)$ получаем, что

$$\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda) \leq \frac{V^2(x_i^+)V^2(y_j^+)V^2(x_k^-)V^2(y_l^-) \prod(N + z + w - 1 - y_j^+ - y_l^-)^2}{\prod(x_i^+ + y_j^+ + 1) \prod(x_i^+ - y_l^- + N + z + w)}$$
$$\times \frac{\mathrm{const} N^F}{\prod(x_k^- + y_l^- + 1) \prod(x_k^- - y_j^+ + N + z + w)}.$$

Для каждой сигнатуры λ существуют такие натуральные числа $0 \leq X \leq q$ и $0 \leq Y \leq s$, что $y_j^+ \geq N/2$ при $j \leq X$, $y_j^+ < N/2$ при $j > X$, $y_l^- \geq N/2$ при $l \leq Y$, $y_l^- < N/2$ при $l > Y$. При фиксированных X и Y обозначим множество сигнатур $\lambda \in \Delta(E, \delta)$, удовлетворяющих этим условиям, через $\Delta(E, \delta, X, Y)$. Тогда для любой сигнатуры $\lambda \in$

$\Delta(E,\delta,X,Y)$ имеем

$$\prod_{i=1\dots p,\, j=1\dots X}(x_i^+ + y_j^+ + 1) \geq (N/2)^{pX},$$
$$\prod_{i=1\dots p,\, l=Y+1\dots s}(x_i^+ - y_l^- + N + z + w) \geq (N/2)^{p(s-Y)},$$
$$\prod_{k=1\dots r,\, l=1\dots Y}(x_k^- + y_l^- + 1) \geq (N/2)^{rY},$$
$$\prod_{k=1\dots r,\, j=X+1\dots q}(x_k^- - y_j^+ + N + z + w) \geq (N/2)^{r(q-X)}.$$

Пользуясь этими неравенствами, а также неравенствами $b_j^\pm \leq N$, $a_i^\pm \leq EN$, получаем, что

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)\\
&\leq \frac{V(x_i^+)V(y_j^+)|_{j=X+1}^{q} V(y_l^-)|_{l=1}^{Y} \prod\limits_{j=X+1}^{q}\prod\limits_{l=1}^{Y}(N+z+w-1-y_j^+-y_l^-)}{\prod\limits_{j=X+1}^{q}(x_i^+ + y_j^+ + 1)\prod\limits_{l=1}^{Y}(x_i^+ - y_l^- + N + z + w)}\\
&\times \text{const}\, N^{F_1}\\
&\times \frac{V(x_k^-)V(y_j^+)|_{j=1}^{X} V(y_l^-)|_{l=Y+1}^{s} \prod\limits_{j=1}^{X}\prod\limits_{l=Y+1}^{s}(N+z+w-1-y_j^+-y_l^-)}{\prod\limits_{l=Y+1}^{s}(x_k^- + y_l^- + 1)\prod\limits_{j=1}^{X}(x_k^- - y_j^+ + N + z + w)}.
\end{aligned}$$

Значит,

$$\sum_{\lambda\in\Delta(E,\delta)} \mathfrak{M}_{pqrs}(\lambda)/\mathrm{const}$$
$$\le \left(\sum \frac{V(x_i^+)V(y_j^+)|_{j=X+1}^{q} V(y_l^-)|_{l=1}^{Y} \prod\limits_{j=X+1}^{q}\prod\limits_{l=1}^{Y}(N+z+w-1-y_j^+-y_l^-)}{N^{F_2}\prod_{j=X+1}^{q}(x_i^+ + y_j^+ + 1)\prod_{l=1}^{Y}(x_i^+ - y_l^- + N + z + w)}\right)$$
$$\times \left(\sum \frac{V(x_k^-)V(y_j^+)|_{j=1}^{X} V(y_l^-)|_{l=Y+1}^{s} \prod\limits_{j=1}^{X}\prod\limits_{l=Y+1}^{s}(N+z+w-1-y_j^+-y_l^-)}{N^{F_3}\prod_{l=Y+1}^{s}(x_k^- + y_l^- + 1)\prod_{j=1}^{X}(x_k^- - y_j^+ + N + z + w)}\right),$$

где первая сумма берется по неотрицательным целым числам, удовлетворяющим условиям

$$\begin{gathered} EN > x_1^+ > x_2^+ > \ldots > x_p^+, \quad N/2 > y_{X+1}^+ > y_{X+2}^+ > \ldots > y_q^+, \\ N > y_1^- > y_2^- > \ldots > y_Y^- > N/2, \quad x_1^+ + y_q^+ \le \delta N, \quad y_q^+ \le N - y_1^-, \end{gathered} \tag{18}$$

а вторая сумма берется по неотрицательным целым числам, удовлетворяющим условиям $EN > x_1^- > x_2^- > \ldots > x_r^-$, $N/2 > y_{Y+1}^- > y_{Y+2}^- > \ldots > y_s^-$, $y_1^+ > y_2^+ > \ldots > y_X^+ > N/2$. При этом

$$F_2 = \frac{Y^2 - Y + p^2 - p + (q-X)^2 - (q-X)}{2} + (q-X)Y - p(q-X) - pY - p - (q-X) - Y,$$
$$F_3 = \frac{X^2 - X + r^2 - r + (s-Y)^2 - (s-Y)}{2} + (s-Y)X - r(s-Y) - rX - r - (s-Y) - X.$$

Покажем, что первая сумма имеет порядок $O(\delta)$. Предположим для определенности, что $p \le q+Y-X$ (случай $p > q+Y-X$ рассматривается аналогично). В этом случае, применяя к наборам переменных $x^+ = (x_1^+, \ldots, x_p^+)$ и $u = (y_{X+1}^+, \ldots y_q^+, N+z+w-1-y_1^-, \ldots, N+z+w-1-y_Y^-)$ лемму 6.1, используя тот факт, что

$$V(u') = O(N^{\frac{1}{2}(Y+q-X-p)(Y+q-X-p-1)}) = O(N^{F_4}),$$

и раскрывая определитель в правой части равенства (17), получаем, что достаточно доказать следующую оценку:

$$N^{F_4-F_2}\sum_{x^+,u}\frac{1}{(x_1^+ + u''_{\sigma_1}+1)\dots(x_p^+ + u''_{\sigma_p}+1)} = O(\delta),$$

где разбиение переменных $u' \sqcup u'' = u$ и перестановка σ множества $\{1,\dots,p\}$ фиксированы, а сумма берется по неотрицательным целым числам, удовлетворяющим условию (18). Есть три случая:

(1) u'' содержит y_q^+, и $u''_{\sigma(p)} = y_q^+$;

(2) u'' содержит y_q^+, но $u''_{\sigma(p)} \neq y_q^+$;

(3) u'' не содержит y_q^+.

Случай (3) сводится к случаю (1), поскольку замена $u''_{\sigma(p)}$ на $y_q^+ < u''_{\sigma(p)}$ только увеличивает сумму.

Случай (2) тоже может быть сведен к случаю (1). Действительно, поскольку u'' содержит y_q^+, существует такое $i < p$, что $u''_{\sigma(i)} = y_p^+$. Так как для любых $A_1 > A_2 > 0$, $B_1 > B_2 > 0$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{(A_1+B_2)(A_2+B_1)} < \frac{1}{(A_1+B_1)(A_2+B_2)},$$

если поменять местами $u''_{\sigma(i)}$ и $u''_{\sigma(p)}$, то сумма только увеличится.

В случае (1) перейдем к сумме по всем неотрицательным целым числам, удовлетворяющим условиям

$$EN > x_i^+, \quad N/2 > y_j^+, \quad N > y_k^- > N/2, \quad x_1^+ + y_q^+ \le \delta N;$$

от этого сумма может только увеличиться. Положим $t_i = x_i^+ + u''_{\sigma(i)}$, тогда $t_p = x_p^+ + y_q^+ \le \delta N$. Так как для каждого t_i есть ровно t_i+1 способ разбить его в сумму целых неотрицательных слагаемых, сумма ограничена количеством векторов $(u'_1,\dots,u'_{q-X+Y-p},t_1,\dots,t_p) \in \mathbb{Z}_+^{q-X+Y}$, таких, что $t_p \le \delta N$. Но количество таких векторов имеет порядок $O(\delta)N^{q-X+Y}$. Учитывая, что $F_4 - F_2 - (q - X + Y) = 0$, получаем требуемую оценку.

Аналогично доказывается, что вторая сумма

$$\sum \frac{V(x_k^-)V(y_j^+)\big|_{j=1}^{X}V(y_l^-)\big|_{l=Y+1}^{s}\prod\limits_{j=1}^{X}\prod\limits_{l=Y+1}^{s}(N+z+w-1-y_j^+-y_l^-)}{N^{F_3}\prod_{l=Y+1}^{s}(x_k^- + y_l^- + 1)\prod_{j=1}^{X}(x_k^- - y_j^+ + N + z + w)}$$

ограничена некоторой константой. □

Доказательство леммы 5.7. Докажем утверждение индукцией по $p+r$. При $p+r=0$ утверждение очевидно. Пусть $p+r\geq 1$. Разобьем интеграл в сумму интегралов по множествам $\max(\alpha_1^+,\alpha_1^-)\geq 1$ и $\max(\alpha_1^+,\alpha_1^-)<1$. Докажем сначала, что первый их этих интегралов сходится. Его в свою очередь разобьем в сумму интегралов по множествам $\alpha_1^+>\alpha_1^-$ и $\alpha_1^+>\alpha_1^-$. Без ограничения общности достаточно рассмотреть только первый из этих интегралов. Заметим, что $G_{pqrs}=H_{pqrs}G_{(p-1)qrs}$, где

$$H_{pqrs}=\frac{\prod\limits_{i=2}^{p}(\alpha_1^+-\alpha_i^+)^2\prod_{k=1}^{r}(1+\alpha_1^++\alpha_k^-)}{\prod\limits_{j=2}^{q}(\alpha_1^+-\beta_j^+)^2\prod\limits_{l=1}^{s}(1+\alpha_1^++\beta_l^-)(1+\alpha_1^+)^{p+q+s}\prod\limits_{i=2}^{p}(1+\alpha_i^+)}$$
$$\leq\frac{{\alpha_1^+}^{2(p-1)}3^r{\alpha_1^+}^r}{{\alpha_1^+}^q{\alpha_1^+}^s{\alpha_1^+}^{p+q+s}}=\frac{3^r}{{\alpha_1^+}^2}\frac{1}{{\alpha_1^+}^{2q+2s-r-p}}\leq\frac{3^r}{{\alpha_1^+}^2}.$$

Значит,

$$\int\limits_{\alpha_1^+>\alpha_1^-,\,\alpha_1^+>1}G_{pqrs}d\omega\leq\int\limits_{\alpha_1^+\geq 1}\frac{3^r}{{\alpha_1^+}^2}d\alpha_1^+\int G_{(p-1)qrs}.$$

Первый из интегралов в правой части очевидно сходится, а второй сходится по предположению индукции.

Докажем теперь, что интеграл

$$\int\limits_{\max(\alpha_1^+,\alpha_1^-)<1}G_{pqrs}d\omega$$

сходится. Для каждого набора $(\alpha^\pm,\beta^\pm)$ существуют такие целые числа $0\leq X<q$ и $0\leq Y<s$, что $\beta_j^+\geq 1/2$ при $j\leq X$, $\beta_j^+<1/2$ при $j>X$, $\beta_k^-\geq 1/2$ при $k\leq Y$, $\beta_k^-<1/2$ при $k>Y$. Докажем сходимость каждого из интегралов при фиксированных X и Y. Проделывая операции, аналогичные проделанным в лемме 5.6, получаем, что достаточно доказать сходимость интеграла

$$\int\frac{d\omega}{(\alpha_1^++\beta_1^+)\dots(\alpha_p^++\beta_p^+)},$$

которая следует из интегрируемости функции $\frac{1}{x+y}$ по квадрату $0\leq x\leq 1$, $0\leq y\leq 1$. $\square$

§7. Дизъюнктность

Два представления T и T' называются дизъюнктными, если они не имеют эквивалентных ненулевых подпредставлений. В этом разделе мы докажем следующую теорему.

Теорема 7.1. *Пусть параметры z и w пробегают верхнюю полуплоскость* ($\operatorname{Im} z \geq 0$, $\operatorname{Im} w \geq 0$), *причем z и w являются либо одновременно целыми, либо одновременно нецелыми и* $\operatorname{Re}(z+w) > -1/2$. *Тогда представления $T_{z,w}$ попарно дизъюнктны.*

В случае нецелых z и w эта теорема была доказана в работе [2]. Дизъюнктность $T_{z,w}$ и $T_{z',w'}$ при различных парах целых параметров (z,w) и (z',w') следует из результатов предыдущих разделов и того факта, что дизъюнктность спектральных мер двух представлений влечет дизъюнктность этих представлений. Остается показать дизъюнктность $T_{z,w}$ и $T_{z',w'}$ при нецелых z и w и целых z' и w'. Для этого достаточно доказать, что каждая из граней $\Omega(p,q;r,s)$ является множеством меры нуль для $\sigma_{z,w}$, где $\sigma_{z,w}$ – спектральная мера представления $T_{z,w}$. В свою очередь этот факт мы докажем, используя взаимно однозначное соответствие между вероятностными мерами на Ω и центральными вероятностными мерами на пространстве путей $\mathcal{T}$ в графе Гельфанда–Цетлина.

Путем в графе $\mathbb{GT}$ называется конечная или бесконечная последовательность вершин $\tau = (\tau(n) \prec \tau(n+1) \prec \ldots)$, $\tau(i) \in \mathbb{GT}_i$. Обозначим через $\mathcal{T}$ множество всех бесконечных путей, начинающихся с вершины $\varnothing$; оно является подмножеством в бесконечном произведении множеств $\prod_{N=0}^{\infty} \mathbb{GT}_N$. Снабдим $\mathcal{T}$ индуцированной топологией.

Обозначим через C_τ, $\tau = (\varnothing \prec \tau(1) \prec \ldots \prec \tau(n))$, цилиндрическое подмножество в $\mathcal{T}$ тех путей, которые начинаются, как τ:

$$C_\tau = \{t \in \mathcal{T} \colon t(1) = \tau(1), \ldots, t(n) = \tau(n)\}.$$

Мера на $\mathcal{T}$ называется центральной, если мера цилиндрического множества C_τ зависит только от $\tau(n)$. Существует взаимно однозначное соответствие $\rho \leftrightarrow M$ между центральными мерами ρ на $\mathcal{T}$ и когерентными системами мер на $\mathbb{GT}$, задаваемое формулой

$$\rho(C_\tau) = \frac{M_n(\tau(n))}{\operatorname{Dim}_n(\tau(n))}.$$

С учетом теорем 1.2 и 1.3 получаем вышеупомянутую биекцию $\rho \leftrightarrow \sigma$ множества вероятностных центральных мер на $\mathcal{T}$ и множества вероятностных мер на Ω.

Лемма 7.2 ([2, Proposition 2]). *Если центральные меры ρ и ρ' дизъюнктны, то и соответствующие им спектральные меры σ и σ' также дизъюнктны.*

Обозначим через $\Gamma(p,q;r,s)$ множество таких сигнатур λ, что $\lambda_{p+1} \le q$ и $\lambda_{N-r-1} \ge -s$, и через $\mathcal{T}(p,q;r,s) \subset \mathcal{T}$ подмножество путей, все вершины которых лежат в множестве $\Gamma(p,q;r,s)$.

Лемма 7.3. *Если носитель меры σ содержится в $\Omega(p,q;r,s) \subset \Omega$, то носитель соответствующей центральной меры ρ содержится в $\mathcal{T}(p,q;r,s)$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству леммы 8.3.1 в работе [5].

Лемма 7.4 ([2, Theorem 10]). *Пусть $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ и ρ_{zw} – центральная мера на $\mathcal{T}$, соответствующая спектральной мере σ_{zw} представления T_{zw}. Тогда $\rho_{zw}(\mathcal{T}(p,q;r,s)) = 0$ для любых чисел p, q, r, s.*

Доказательство оставшейся части теоремы 7.1 следует из лемм 7.2, 7.3 и 7.4.

Замечание 7.5. Фактически было доказано, что если $\mathrm{Re}(z+w) > -1/2$, $\mathrm{Re}(z'+w') > -1/2$, причем z не является целым, а z' и w' являются целыми, то представления T_{zw} и $T_{z'w'}$ дизъюнктны при любом w.

Литература

1. A. Borodin, G. Olshanski, *Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group and determinantal point processes.* — Ann. of Math. **161**, No. 3 (2005), 1319–1422.
2. V. Gorin, *Disjointness of representations arising in harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group.* — Funct. Anal. Appl. **44**, No. 2 (2010), 92–105.
3. R. A. Gustafson, *Multilateral summation theorems for ordinary and basic hypergeometric series in $U(n)$.* — SIAM J. Math. Anal. **18**, No. 6 (1987), 1576–1596.
4. G. Olshanski, *The problem of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group.* — J. Funct. Anal. **205** (2003), 464–524.
5. S. Kerov, G. Olshanski, and A. Vershik, *Harmonic analysis on the infinite symmetric group.* — Invent. Math. **158** (2004), 551–642.

6. D. Voiculescu, *Representations factorielles de type II_1 de $U(\infty)$*. — J. Math. Pures et Appl. **55** (1976), 1–20.

Osinenko A. A. Harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group.

The goal of harmonic analysis on the infinite-dimensional unitary group is to decompose a certain family of unitary representations of this group substituting the nonexisting regular representation and depending on two complex parameters (Olshanski, 2003). In the case of nonintegral parameters, the decomposing measure is described in terms of determinantal point processes (Borodin and Olshanski, 2005). The aim of the present paper is to describe the decomposition for integer parameters; in this case, a spectrum of decomposition leaps. A similar result was earlier obtained for the infinite symmetric group (Kerov, Olshanski, Vershik, 2004), but the case of the unitary group turned out to be much more complicated. In the proof we use Gustafson's multilateral summation formula for hypergeometric series.

МГУ имени М. В. Ломоносова
Ленинские горы,
ГСП-1, Москва 119991,
Россия
E-mail: antoniosi@mail.ru

Поступило 13 сентября 2011 г.