Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 390, 2011 г.

П. Б. Затицкий, Ф. В. Петров

ОБ ИСПРАВЛЕНИИ МЕТРИК

Систематическое изучение метрических троек (X, ρ, μ) – то есть пространств, снабженных структурами метрики ρ и борелевской вероятностной меры μ – было начато М. Л. Громовым в [2]. Именно, там было доказано, что метрические тройки однозначно параметризуются мерами на множестве матриц $(\rho(x_i, x_j))_{i,j}$ расстояний, порождаемых случайным и независимым выбором точек $x_1, x_2, \dots \in X$. А. М. Вершик дал другую формулировку этого факта и предложил новое его доказательство, основанное на эргодической теореме, и инициировал изучение переменных метрик на данном пространстве с мерой. В частности, он высказал в [3, 4] идею об использовании динамики метрик для изучения энтропийных и других инвариантов динамических систем. Для этого необходимо предварительное изучение множества метрик и "почти" метрик на стандартном пространстве с мерой. Настоящая заметка посвящена вопросу исправления почти полуметрик до настоящих метрик на множествах полной меры. Эти теоремы будут использованы в последующих работах в рамках приложений динамики метрик к эргодической теории.

В данной заметке, говоря о пространстве Лебега, мы будем считать, что мера непрерывна.

Определение 1. *Пусть (X, μ) – пространство Лебега с вероятностной мерой, $\rho(x, y)$ – измеримая неотрицательная функция на $(X \times X, \mu \times \mu)$ такая, что $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ и $\rho(x, z) \le \rho(x, y) + \rho(y, z)$ для почти всех x, y, z из X. Будем называть X* почти-метрикой *на X.*

Будем называть метрику ρ существенно сепарабельной*, если для любого $\varepsilon > 0$ пространство X может быть покрыто счетным семейством измеримых множеств, существенный диаметр каждого из которых меньше ε (существенный диаметр множества $A \subset X$ есть существенный супремум функции $\rho(x, y)$, суженной на $A \times A$).*

Ключевые слова: пространство Лебега, полуметрика.

Работа выполнена при финансовой поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0026, и грантов РФФИ 11-01-12092-офи-м и 11-01-00677-а.

Две почти-метрики назовем эквивалентными, *если они совпадают на множестве полной меры как функции двух переменных. Также будем иногда говорить, что одна из двух эквивалентных метрик является* исправлением *другой (обычно исправленная метрика будет обладать какими-то лучшими свойствами по сравнению с исходной).*

Метрику (или полуметрику) на пространстве Лебега будем называть допустимой, если на множестве полной меры соответствующее (полу) метрическое пространство сепарабельно.

Будем говорить, что полуметрика ρ на пространстве с борелевской вероятностной мерой имеет конечную ε-энтропию $\mathbb{H}_\varepsilon(\rho) < \infty$, если найдется конечное число шаров радиуса ε, которыми можно покрыть множество меры хотя бы $1 - \varepsilon$.

Открытый шар с центром x радиуса r будем обозначать $B(x,r)$.

Следующая лемма дает несколько равносильных подходов к определению допустимой полуметрики.

Лемма 1. *Пусть на полуметрическом пространстве (X,ρ) задана борелевская мера μ. Тогда равносильны следующие утверждения:*
1) *Для любого $\varepsilon > 0$ полуметрика ρ имеет конечную ε-энтропию.*
2) *Существует множество полной меры μ, на котором метрика сепарабельна.*
3) *Для μ-почти всех x все шары (в метрике ρ) с центром x имеют положительную меру.*

Доказательство. Докажем следствие из 1) в 3). Рассмотрим множества $T_n = \{x \in X : \mu(B(x, \frac{1}{n})) = 0\}$. Нам достаточно показать, что $\mu(T_n) = 0$ для любого n. Пока что мы не знаем, что это множество измеримо, но нам это и не нужно. Выберем любое $\varepsilon \in (0, \frac{1}{10n})$. Условие 1) говорит нам, что существует разбиение множества X на дизъюнктные множества $X_0, X_1, \ldots, X_k$, такие что $\mu(X_0) < \varepsilon$ и для любого $j \in \{1, \ldots, k\}$ выполнено $\mathrm{diam(X_j)} < 2\varepsilon$. Заметим, что мы можем считать, что множества X_j имеют ненулевую меру (множества нулевой меры можно смело добавить к X_0). Но тогда для любой $x \notin X_0$ шар $B(x, 2\varepsilon)$ содержит одно из множеств X_j, то есть имеет строго положительную меру. Таким образом, $T_n \subset X_0$. Значит, для любого сколь угодно малого ε, множество T_n содержится в множестве меры меньше ε. Отсюда следует, что множество T_n измеримо и имеет меру ноль.

Объединив по всем $n \in \mathbb{N}$ множества T_n, мы снова получим множество меры ноль. Утверждение 3) доказано.

Докажем следствие из 3) в 2). Мы проверим, что на множестве полной меры есть счетная ε-сеть. Ясно, что этого достаточно. В качестве множества полной меры мы выберем то самое множество, которое описано в 3) – шары с центром в любой из его точек имеют строго положительную меру. Пусть в нем не существует счетной ε-сети. Тогда из леммы Цорна следует, что существует более чем счетное множество точек, попарные расстояния между которыми не меньше ε. Но тогда шары с центрами в них и радиусом $\varepsilon/3$ не пересекаются, имеют строго положительные меры и сумма их мер не превосходит 1. Но любое суммируемое семейство не более чем счетно. Противоречие.

И, наконец, следствие из 2) в 1). Пусть счетное множество $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ плотно в множестве X' полной меры. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ рассмотрим шары $B_n = B(x_n, \varepsilon)$. Их объединение имеет полную меру. Но тогда для какого-то N объединение $\bigcup\limits_{n=1}^{N} B_n$ имеет меру больше $1 - \varepsilon$, что и требовалось. $\square$

Теорема 1. 1) *Пусть (X, μ) – пространство Лебега, ρ – почти-метрика на X. Тогда можно исправить ρ до всюду конечной полуметрики на X.*

2) *Если при этом почти-метрика ρ была существенно сепарабельной, то исправленную полуметрику можно выбрать так, чтобы полуметрическое пространство (X, ρ) было сепарабельным. Иными словами, исправленная полуметрика может быть выбрана допустимой.*

Доказательство. 1) Заметим, что для почти всех x функция $\rho(x, \cdot)$ является измеримой и неравенство $\rho(x, y) + \rho(x, z) \geq \rho(y, z)$ выполняется для почти всех пар (y, z). Зафиксируем одну из таких точек x_0. Изменим меру μ на эквивалентную так, чтобы функция $f(t) = \rho(x_0, t)$ стала суммируемой. Это несложно сделать, положив

$$A_n = f^{-1}([n-1, n))$$

и

$$\widetilde{\mu}(B) = c \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \mu(B \cap A_n)$$

для всякого измеримого B, где константа c выбрана так, что $\widetilde{\mu}(X)=1$. Заметим, что тогда и функция $\rho(y,z)$ будет суммируема как функция двух переменных в силу неравенства треугольника.

Теперь отождествим пространство Лебега с единичной окружностью $S=\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ с мерой Лебега. Определим новую метрику $\widetilde{\rho}$ (возможно, принимающую бесконечные значения) равенством

$$\widetilde{\rho}(x,y)=\limsup_{T\to+0} T^{-2}\int\limits_0^T\int\limits_0^T \rho(x+t,y+s)dtds \tag{1}$$

Заметим, что в силу теоремы Лебега о дифференцировании интеграла, для почти всех пар (x,y) предел существует и совпадает с $\rho(x,y)$. Очевидно, что полученная функция симметрична. Докажем, что она удовлетворяет неравенству треугольника. Заметим, что для почти всех $(s,t,\tau)\in[0,T]^3$ выполняется неравенство

$$\rho(y+s,z+t)\le\rho(y+s,x+\tau)+\rho(x+\tau,z+t).$$

Проинтегрируем по $[0,T]^3$, поделим на T^3 и перейдем к верхнему пределу по $T\to+0$. Пользуясь неравенством $\limsup(F+G)\le\limsup F+\limsup G$, получаем неравенство треугольника для функции $\widetilde{\rho}$. Если функция $\widetilde{\rho}$ не равна нулю в некоторых точках диагонали, заменим ее значения на 0. Заметим, что функция $\widetilde{\rho}$ почти всюду конечна (поскольку такова эквивалентная функция ρ). Следовательно, можно выбрать точку x_0 так, что $\widetilde{\rho}(x_0,x)<\infty$ для почти всех $x\in S$, то есть для всех x из множества S_1 полной меры. Тогда переопределим полуметрику $\widetilde{\rho}$ вне $S_1\times S_1$ по правилу $\widetilde{\rho}(x,y):=\widetilde{\rho}(x_0,y)$ для $x\notin S_1, y\in S_1$, аналогично $\widetilde{\rho}(x,y):=\widetilde{\rho}(x,x_0)$ для $y\notin S_1, x\in S_1$ и $\widetilde{\rho}(x,y):=0$ для $x,y\notin S_1$. Исправленная полуметрика уже всюду конечна.

2) Пользуясь утверждением пункта 1, будем считать, что ρ – полуметрика, заданная на всем X и всюду удовлетворяющая неравенству треугольника. Докажем, что найдется множество полной меры, сужение на которое дает сепарабельное полуметрическое пространство. Исправление полуметрики вне множества полной меры осуществляется так, как написано в конце пункта 1, сепарабельность при этом сохраняется. Достаточно для каждого натурального n найти множество полной меры, покрываемое счетным семейством шаров радиуса $1/n$. Тогда пересечение этих множеств полной меры и будет сепарабельным пространством. Покроем пространство X счетным семейством измеримых множеств, существенный диаметр каждого из которых не

превосходит $1/n$. Рассмотрим одно из этих множеств A. Для почти всех точек $x \in A$ расстояния до почти всех точек A не превосходят $1/n$. Значит, почти все множество A покрывается некоторым шаром радиуса $1/n$, что и требовалось. $\square$

Обычно, когда говорят о связи метрики и меры, основной структурой считают метрическую структуру, а на меру накладываются некоторые условия (борелевская, регулярная). Мы, следуя подходу Вершика, поступаем наоборот – рассматриваем метрику как измеримую функцию. Заметим, что если (X, ρ) – сепарабельное полуметрическое пространство, а μ – борелевская мера на X, то функция ρ на $X \times X$ будет измеримой по мере $\mu \times \mu$ (так как она непрерывна, и, значит, борелевски измерима).

Как показывает следующая теорема, в сепарабельном случае эти условия (борелевость меры и измеримость метрики) равносильны.

Теорема 2. *Пусть (X, μ) – пространство Лебега, ρ – допустимая полуметрика на X. Тогда мера μ будет борелевской относительно топологии, задаваемой метрикой ρ.*

Доказательство. Для каждого рационального $r > 0$ множество

$$\{(x, y) : \rho(x, y) < r\}$$

измеримо, поэтому почти все его сечения (шары радиуса r; здесь и далее все шары открытые) измеримы. Следовательно, для почти всех точек $x \in X$ все шары рационального радиуса с центром x измеримы, а тогда и вообще все шары с центром x измеримы. Назовем множество таких точек X_1, а множество других точек X_2 (оно имеет меру 0). Выберем в X_1 счетное всюду плотное множество X'. Докажем, что любой шар измерим; в силу сепарабельности этого достаточно для того, чтобы мера была борелевской. Рассмотрим шар $B = B(x_0, r_0)$ с центром x_0 и радиусом r_0. Для каждой точки $x \in X' \cap B$ рассмотрим шар $B(x, r_0 - \rho(x, x_0))$. Он лежит в B и измерим. Докажем, что объединение этих шаров содержит $X_1 \cap B$. Тогда дополнение до B их объединения будет лежать в X_2 и, следовательно, иметь меру 0; отсюда следует, что множество B измеримо. Рассмотрим произвольную точку $x \in X_1 \cap B$. Найдем точку $y \in X'$, такую, что $\rho(x, y) < (r_0 - \rho(x_0, x))/2$. Тогда по неравенству треугольника $\rho(x_0, y) < (r_0 + \rho(x_0, x))/2$, а потому $y \in B$ и, более того, шар $B(y, r_0 - \rho(x_0, y))$ содержит точку x, что и требовалось. $\square$

Если же метрика не является сепарабельной, то заключение этой теоремы может быть не верно. Действительно, если A – некоторое неизмеримое множество в X, $x_0 \in X \setminus A$ – фиксированная точка, то метрика

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = y; \\ 1, & \text{если } x = x_0,\ y \in A \text{ или } y = x_0,\ x \in A; \\ 2 & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

почти всюду равна 2 и потому измерима, но шар с центром x_0 и радиусом $3/2$ неизмерим.

Можно задать и обратный вопрос. Пусть дана некоторая (несепарабельная) полуметрика ρ на пространстве X. Рассмотрим ее борелевскую сигма-алгебру $\mathbb{B}$. Верно ли, что ρ, как функция на $X \times X$, измерима относительно сигма-алгебры $\mathbb{B} \times \mathbb{B}$? Ответ на этот вопрос авторам неизвестен.

Теперь покажем, что две эквивалентные допустимые почти-полуметрики совпадают на множестве полной меры. Отметим сразу, что условие допустимости тут существенно: для метрик с расстояниями 1 и 2 это, конечно, не так.

Теорема 3. *Пусть две допустимые полуметрики ρ_1, ρ_2 совпадают почти всюду как функции на $X \times X$ по мере $\mu \times \mu$. Тогда существует множество $X' \subset X$ полной меры, такое что на множестве $X' \times X'$ полуметрики ρ_1, ρ_2 совпадают.*

Доказательство. Прежде всего отметим, что для почти каждого $x \in X$, для почти всех $y \in X$ выполнено $\rho_1(x,y) = \rho_2(x,y)$. Выкинув из X множество меры ноль, мы можем считать, что это выполнено для каждого $x \in X$. Таким образом, для любого $x \in X$ и любого положительного r шары

$$\{y \in X : \rho_1(x,y) < r\} \quad \text{и} \quad \{y \in X : \rho_2(x,y) < r\}$$

имеют одинаковую меру. Воспользовавшись леммой 1 мы найдем множество X' полной меры, такое что для любого $x \in X'$ любой шар $\{y \in X : \rho_1(x,y) < r\}$ имеет положительную меру. Тогда то же верно и для ρ_2. Докажем, что на множестве X' полуметрики ρ_1 и ρ_2 совпадают. Пусть $x_1, x_2 \in X'$. Выберем любое $r > 0$ и заметим, что для почти всех y, таких что $\rho_1(x_1,y) < r$, выполнено $\rho_1(x_1,y) = \rho_2(x_1,y)$ и $\rho_1(x_2,y) = \rho_2(x_2,y)$. Так как этот шар имеет ненулевую меру, мы можем найти хотя бы одну такую точку y. Тогда мы получим, что

$$\rho_2(x_1,x_2) \le \rho_2(x_1,y)+\rho_2(y,x_2) = \rho_1(x_1,y)+\rho_1(y,x_2) \le 2r+\rho_1(x_1,x_2).$$

Так как это верно для любого $r>0$, мы получаем неравенство

$$\rho_2(x_1,x_2) \le \rho_1(x_1,x_2).$$

Аналогично можно получить и обратное неравенство. Таким образом, на X' полуметрики совпадают. Теорема доказана. □

Естественно поставить вопрос о том, для каких структур на пространстве с мерой, кроме (полу)метрического пространства, верна теорема об исправлении типа теоремы 1. Можно ли исправить почти-группу до группы, почти-векторное пространство до векторного пространства, почти-нормированное пространство до нормированного и т.д.? Нам не известно примеров, когда ответ был бы отрицательным не по очевидным причинам (вроде того, что почти-метрика исправляется вообще говоря лишь до полуметрики, а до метрики – не всегда). Приведем еще один положительный результат.

Теорема 4. *Пусть на пространстве Лебега X задана почти-полуметрика ρ, удовлетворяющая почти для всех троек $(x,y,z)\in X^3$ ультраметрическому неравенству*

$$\rho(x,z) \le \max(\rho(x,y),\rho(y,z)).$$

Тогда существует полуметрика на X, совпадающая с ρ на почти всех парах и удовлетворяющая ультраметрическому неравенству для всех троек.

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 1, мы заменяем меру на эквивалентную таким образом, чтобы функции ρ^n были суммируемы, после чего отождествляем полученное пространство Лебега с окружностью.

Для каждого n рассмотрим исправление почти-метрики ρ^n, заданное формулой

$$(\rho_n(x,y))^n = \limsup_{T\to+0} T^{-2}\int_0^T\int_0^T \rho^n(x+t,y+s)\,dtds$$

По неравенству о средних степенных последовательность $\rho_n(x,y)$ возрастает по n при фиксированных x,y, так что имеет (конечный или бесконечный) предел $\widetilde{\rho}(x;y)$, который по теореме Лебега о дифференцировании интегралов почти всюду конечен и почти всюду равен $\rho(x,y)$. Функция $\widetilde{\rho}^n$ будет (полу)метрикой при всех n (это так для ρ_m вместо $\widetilde{\rho}$ при $m \geq n$, а неравенство треугольника выдерживает предельный переход). С бесконечными значениями можно бороться ровно так же, как для обычных метрик в теореме 1. $\square$

Сформулируем также следующее общее предположение, включающее теоремы 1, 4 как частные случаи.

Гипотеза 1. *Даны натуральные числа $k \leq n$ и измеримая вещественнозначная функция $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$. Для почти всех $y_1, \dots, y_n$ вектор $\{f(y_{i_1}, \dots, y_{i_k})\}_{1 \leq i_j \leq n}$ размерности n^k принадлежит данному замкнутому множеству в пространстве размерности n^k. Тогда существует эквивалентная f функция $\widetilde{f}$. для которой это условие выполняется уже при всех $y_1, \dots, y_n$.*

Вопросы, обсуждаемые в работе, возникли при решении задач эргодической теории, поставленных А. М. Вершиком. Мы также признательны ему за поддержку и многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. P. R. Halmos, J. von Neumann, *Operator methods in classical mechanics, II.* — Ann. Math. **43**, No. 2, 332–350 (1942).
2. M. Gromov, *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces.* Birkhauser, 1998.
3. А. М. Вершик, *Универсальное пространство Урысона, метрические тройки Громова и случайные метрики на натуральном ряде.* — Успехи мат. наук **53**, вып. 5, 57–64 (1998).
4. A. Vershik, *Scaling entropy and automorphisms with purely point spectrum,* `arXiv:1008.4946v4`.

Zatitskiy P. B., Petrov F. V. Correction of metrics.

We prove that a symmetric nonnegative function of two variables on a Lebesgue space that satisfies the triangle inequality for almost all triples of points is equivalent to some semimetric. Some other properties of metric triples (spaces with structures of a measure space and a metric space) are discussed.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия;
Лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ,
14-я линия В.О., д. 29Б,
Санкт-Петербург 199178, Россия
E-mail: paxa239@yandex.ru

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
наб. р. Фонтанки, д. 27,
Санкт-Петербург 191023, Россия
E-mail: fedyapetrov@gmail.com

Поступило 1 октября 2011 г.