Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

**Ф. А. Шамоян**

# ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ ТЁПЛИЦЕВЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕСОВЫХ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ В КРУГЕ ФУНКЦИЙ

## Введение

Пусть $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ – единичный круг на $\mathbb{C}$, $\mathbf{T} = \partial\mathbf{U} = \{z \in \mathbb{C}: |z| = 1\}$ – его граница. Обозначим через $H(\mathbf{U})$ – множество всех голоморфных в $\mathbf{U}$ функций, $H^p \equiv H^p(\mathbf{U})$ $(0 < p \le +\infty)$ – класс Харди в единичном круге $\mathbf{U}$.

В работах [1, 2] изучается ограниченность операторов Тёплица $T_h$ : $f \mapsto P(h{\cdot}f)$, где $P$ – проектор Рисса, в весовом пространстве С. Л. Соболева аналитических в круге функций, т.е. в пространстве

$$A^p_\alpha(n) = \Biggl\{ f \in H(\mathbf{U}) : \|f\|_{A^p_\alpha(n)} = \Biggl( \int\limits_{\mathbf{U}} \bigl|D^n f(\zeta)\bigr|^p (1-|\zeta|)^\alpha \, dm_2(\zeta) \Biggr)^{\frac{1}{p}} < +\infty \Biggr\}, \quad 1 \le p < +\infty,$$

где $D^n$ – производная $n$-го порядка типа Римана–Лиувилля функции $f$ (см. [1]).

Если $n > \alpha + 1$, то оператор $T_h$ является ограниченным оператором в $A_\alpha(n) = A^1_\alpha(n)$ тогда и только тогда, когда $h$ на единичной окружности допускает представление

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \bar{h}_2(\zeta), \quad \zeta \in \mathbf{T}, \tag{1}$$

где $h_1 \in A_\alpha(n)$, $h_2 \in H^\infty$ (см. [3]), в частности, если $h \in H^1(\mathbf{U})$, то $T_{\bar h}$ будет ограниченным оператором в $A_\alpha(n)$ тогда и только тогда, когда $h \in H^\infty$. Однако при $n = \alpha + 1$ условие $h \in H^\infty$ не обеспечивает ограниченность оператора $T_{\bar h}$ в $A_\alpha(n)$, возникает дополнительное

---

*Ключевые слова*: единичный круг, голоморфная функция, пространство Соболева, оператор Тёплица, пространство Зигмунда.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-97517р центр-а).

требование относительно функции $h$: необходимым и достаточным условием ограниченности оператора $T_{\bar h}$ в $A_{n-1}(n)$ является условие

$$\sup_{z\in\mathbf{U}}\left\{|\,h'(z)|(1-|z|)\ln\frac{1}{1-|z|}\right\}<+\infty. \tag{2}$$

Условие (2) в дальнейшем возникло в работах [4, 5] при исследовании аналогичных вопросов, если учесть, что класс голоморфных в круге функций с граничными значениями из класса О. Бесова совпадает с классом $A_0(2)$. Доказательство ограниченности оператора $T_{\bar h}$ в пространстве $A_\alpha(n)$ при $n=\alpha+1$ в работе [1] сводится к установлению ограниченности оператора типа Вольтерра:

$$B_h(g)(z)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^z(z-t)^{n-1}h(t)g^{(n)}(t)\,dt,\quad z\in\mathbf{U},$$

в пространстве А. Зигмунда $\Lambda_*^a$, где

$$\Lambda_*^a=\left\{f\in C_A(\mathbf{U}):\left|f(\zeta e^{it})-2f(\zeta)+f(\zeta e^{-it})\right|=O(|t|)\,(t\to 0),\,\zeta\in\mathbf{T}\right\}$$

(см. [1, лемма 7], [2, лемма 2]), т.е. для ограниченности оператора $B_h$ в пространстве $\Lambda_*^a$ необходимо и достаточно, чтобы функция $h$ удовлетворяла условию (2). Указанное утверждение в качестве основного результата было переоткрыто в работе [6]. Таким образом, дополнительное условие (2) на функцию $h$ для ограниченности оператора $T_{\bar h}$ в пространстве $A_\alpha(n)$, то есть при степенном весе $x\mapsto(1-x)^\alpha$, $x\in[0,1]$, возникает только при целых $\alpha=n-1$, при нецелых $\alpha$ условие типа (2) отсутствует. Естественно возникает вопрос, появится ли условие типа (2), когда весовая функция не степенная, и какой вид примет условие (2) в общем случае?

В этой статье рассмотрим весовые функции вида $\omega(1-x)(1-x)^{\alpha-1}$, где $x\in\Delta=[0,1)$, $\omega(x)$ – функция типа модуля непрерывности, $\alpha\geq 0$, т.е. в работе мы исследуем поведение операторов $T_h$ в следующем пространстве типа С. А. Соболева:

$$\begin{aligned}A_\omega(\alpha,n)=\Bigg\{f\in H(\mathbf{U}):\ &\|f\|_{A_\omega(\alpha,n)}\\&=\int\limits_{\mathbf{U}}|D^nf(\zeta)|\,\omega(1-|\zeta|)(1-|\zeta|)^{\alpha-1}\,dm_2(\zeta)<+\infty\Bigg\}.\end{aligned}$$

Мы устанавливаем, что если $n \geq \alpha + 2$, то для ограниченности оператора $T_h$ в $A_\omega(\alpha, n)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнилось некое условие типа (1), а если $n = \alpha + 1$ и $h \in H^1(\mathbf{U})$, то необходимым и достаточным условием будет $h \in H^\infty(\mathbf{U})$ и при этом

$$\sup_{z \in \mathbf{U}} \left\{ |h'(z)| \frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)} \int\limits_{1-|z|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^2} du \right\} < +\infty.$$

Кроме того, исследуется ограниченность оператора $T_h$ в $A_\omega(\alpha, n)$, если $h \in L^1(\mathbf{T})$, $n < \alpha + 1$. В этом случае пространство $A_\omega(\alpha, n)$ не вложено в класс Харди $H^1(\mathbf{U})$, поэтому оператор $T_h$ определяется сначала на $C_A^\infty(\mathbf{U})$ и описываются те функции $h \in L^1(\mathbf{T})$, для которых $T_h$ имеет ограниченное продолжение на всё пространство $A_\omega(\alpha, n)$. Результаты этой статьи, в частном случае при $n \geq \alpha + 1$, были анонсированы в работе [3].

Для изложения дальнейших результатов введём ещё следующие обозначения: $\Delta = \{t: \ 0 \leq t < 1\}$, $\mathbb{R}_+ = \{t: 0 \leq t < +\infty\}$, $m_2$ – плоская мера Лебега на $\mathbb{C}$. Если $X$, $Y \in \mathbb{R}_+$, то, как обычно, символ $X \asymp Y$ означает, что существуют положительные числа $A$ и $B$, $A < B$, такие, что $AY \leq X \leq BY$, а $X \lesssim Y$, если $X \leq AY$.

## §1. Формулировка основных результатов и доказательство вспомогательных утверждений

Пусть $\omega$ – функция типа модуля непрерывности, т.е. неотрицательная неубывающая функция на $\Delta = [0, 1)$ такая, что функция $t \mapsto \frac{\omega(t)}{t}$ не возрастает на $\Delta$. Пусть ещё $\alpha \geq 0$. Введём в рассмотрение пространство

$$A_\omega(\alpha, n) = \Big\{ f \in H(\mathbf{U}): \ \|f\|_{A_\omega(\alpha,n)} = \int\limits_{\mathbf{U}} |D^n f(z)| \, \omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1} \, dm_2(z) < +\infty \Big\},$$

где $\alpha \geq 0$, причем, если $\alpha = 0$, то предполагается, что $\int\limits_0^1 \frac{\omega(u)}{u} du < +\infty$; в противном случае класс $A_\omega(\alpha, n)$ будет содержать только функцию

$f(z) = 0$, $z \in \mathbf{U}$. В дальнейшем также обозначим через $A_\omega(\alpha)$ пространство $A_\omega(\alpha, 0)$ , т.е. $A_\omega(\alpha) := A_\omega(\alpha, 0)$. Через $D^n f$ здесь обозначена производная функции $f$ порядка $n$ в смысле Римана–Лиувилля (см. [7, гл. 9]). Напомним, что если $\beta \geq 0$, то производная порядка $\beta$ в смысле Римана–Лиувилля вводится следующим образом:

Если $f \in H(\mathbf{U}) : f(z) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} a_k z^k$, $z \in \mathbf{U}$, то

$$D^\beta f(z) := \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\beta + k + 1)}{\Gamma(\beta + 1)\Gamma(k + 1)} a_k z^k, \quad z \in \mathbf{U}.$$

В дальнейшем нам потребуется также класс $\Lambda_\omega^\alpha$ – класс голоморфных в $\mathbf{U}$ функций $f$, для которых

$$\left|D^{\alpha+2} f(z)\right| \lesssim \frac{\omega(1 - |z|)}{(1 - |z|)^2}, \quad z \in \mathbf{U},$$

с естественной нормой

$$\|f\|_{\Lambda_\omega^\alpha} = \sup_{z \in \mathbf{U}} \left\{ \left|D^{\alpha+2} f(z)\right| \frac{(1 - |z|)^2}{\omega(1 - |z|)} \right\}.$$

Обозначим также через $L(X)$, где $X$ – некоторое нормированное пространство, множество всех линейных ограниченных операторов в пространстве $X$. Если $X$ – некоторое нормированное пространство аналитических в $\mathbf{U}$ функций, в котором всюду плотно множество всех многочленов $\mathscr{P}$ от $z$, мы часто будем определять оператор $T_h$ сначала на $\mathscr{P}$ или на $C_A^\infty$, а затем ставить задачи об условиях на $h$, при которых указанный оператор имеет ограниченное продолжение на всё пространство $X$.

Теперь сформулируем основные результаты статьи.

**Теорема 1.** *Пусть $\alpha \geq 0$, $\omega$ – функция типа модуля непрерывности на $\Delta$, $h$ – суммируемая функция на $\mathbf{T}$,*

$$T_h(f)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbf{T}} \frac{f(\zeta)h(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta, \quad z \in \mathbf{U}, \quad f \in C_A(\mathbf{U}).$$

(1) *Предположим, что $n \geq \alpha + 2$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) *$T_h \in L\left(A_\omega(\alpha, n)\right)$;*

(b) *$h$ допускает представление*

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbf{T}, \tag{3}$$

*где $h_1 \in A_\omega(\alpha, n)$, $h_2 \in H^\infty(\mathbf{U})$.*

(2) *Пусть $n = \alpha + 1$, $h \in H^1(\mathbf{U})$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $T_{\bar{h}} \in L\left(A_\omega(\alpha, n)\right)$;

(b) $h \in H^\infty(\mathbf{U})$,

$$\sup_{z\in\mathbf{U}} \left\{ |h'(z)| \frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)} \int\limits_{1-|z|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^2}\, du \right\} < +\infty. \tag{4}$$

(3) *Предположим теперь, что $n < \alpha$, $h \in L^1(\mathbf{T})$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $T_h \in L\left(A_\omega(\alpha, n)\right)$;

(b) *функция $h$ допускает представление*

$$h(\zeta) = h_1(\zeta) + \overline{h_2(\zeta)}, \quad \zeta \in \mathbf{T},$$

*где $h_1$, $h_2$ являются граничными значениями функций, голоморфных в $\mathbf{U}$, при этом $h_1$ – мультипликатор пространства $A_\omega(\alpha, n)$, $D^{-n}h_2 \in \Lambda^\alpha_\omega$, где $D^{-n}$ – оператор, обратный к оператору $D^n$.*

**Замечание.** Все утверждения теоремы 1 можно сформулировать в терминах функций $h \in H^1(\mathbf{U})$ для операторов с ядром $K(z, \zeta) = \frac{1}{\left(1-\bar{\zeta}z\right)^2}$, $\zeta$, $z \in \mathbf{U}$, по площади $\mathbf{U}$, т.е. для операторов вида

$$\widetilde{T}_h(f)(z) = \int\limits_{\mathbf{U}} \frac{f(\zeta)\,\overline{h}(\zeta)}{\left(1-\bar{\zeta}z\right)^2}\, dm_2(\zeta), \quad z \in \mathbf{U}.$$

Исследование операторов $\widetilde{T}_h$ сводится к изучению операторов $T_h$, если учесть равенство:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{T}} \frac{f(\zeta)\,\overline{h}(\zeta)}{(\zeta - z)^2}\, d\zeta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbf{U}} \frac{Df(\zeta)\,\overline{h(\zeta)\zeta}}{\left(1-\bar{\zeta}z\right)^2}\, dm_2(\zeta), \quad z \in \mathbf{U}.$$

Последнее равенство непосредственно выводится из леммы 4.

Доказательство второго пункта теоремы 1 сводится к доказательству следующего утверждения, на наш взгляд имеющего самостоятельный интерес.

**Теорема 2.** *Пусть* $h \in H(\mathbf{U})$, $n \in \mathbb{N}$, $f \in \Lambda_\omega^\alpha$, $r \in \Delta$, $z \in \mathbf{U}$,

$$B_{h,r}(f)(z) := \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^z (z-t)^{n-1} h(t) f^{(n)}(rt)\, dt.$$

(1) *Если* $n = \alpha + 1$, $h \in H^\infty(\mathbf{U})$, *то следующие утверждения равносильны:*

(a)
$$\sup_{0 \le r < 1} \|B_{h,r}\| < +\infty, \tag{5}$$

*где берется норма оператора* $B_{h,r}$ *в пространстве* $L(\Lambda_\omega^\alpha)$;

(b) $h$ *удовлетворяет условию* (4).

(2) *Пусть* $n \ge \alpha + 2$. *Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $B_{h,r}$ *удовлетворяет условию* (5);

(b) $h \in H^\infty(\mathbf{U})$.

Доказательство теорем 1 и 2 опирается на несколько вспомогательных утверждений. Напомним, что оператор $D^{-\beta}$, обратный к оператору $D^\beta$, имеет вид:

$$\begin{aligned} D^{-\beta} f(z) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\Gamma(\beta+1)\Gamma(k+1)}{\Gamma(\beta+k+1)} a_k z^k \\ &= (\beta+1) \int\limits_0^1 (1-t)^{\beta-1} f(tz)\, dt, \quad z \in \mathbf{U}, \quad \beta \ge 0. \end{aligned} \tag{6}$$

**Лемма 1.** *Пусть* $\alpha \ge 0$, $\omega$ – *функция типа модуля непрерывности. Тогда можно построить функцию* $f_{\omega,\alpha} \in H(\mathbf{U})$ *со следующими свойствами.*

(1)
$$\left| D^{\alpha+2} f_{\omega,\alpha}(z) \right| \lesssim \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^2}, \quad z \in \mathbf{U}. \tag{7}$$

(2)
$$f_{\omega,\alpha}^{(n)}(r) \ge \frac{C_n \omega(1-r)}{(1-r)^{n-\alpha}}, \quad n \ge \alpha+1, \quad r \in \Delta, \tag{8}$$

*где $C_n$ – положительное число, зависящее только от $n$.*

**Доказательство.** Пусть

$$\varphi_\omega(z) = \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-t)}{(1-tz)^3}\,dt, \quad z \in \mathbf{U}.$$

Очевидно, что $\varphi_\omega \in H(\mathbf{U})$. Положим $f_{\omega,\alpha}(z) = D^{-(\alpha+2)}\varphi_\omega(z)$, $z \in \mathbf{U}$. Напомним, что $D^{-(\alpha+2)}f(z) = (\alpha+3)\int\limits_0^1 (1-t)^{\alpha+1} f(rte^{i\varphi})\,dt$, $z = re^{i\varphi}$.

Так как $D^{\alpha+2}\left(D^{-(\alpha+2)}\right) = I$, где $I$ – тождественный оператор, то имеем:

$$D^{\alpha+2} f_{\omega,\alpha}(z) = \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-t)}{(1-tz)^3}\,dt.$$

Докажем оценку (7). Имеем:

$$\left|D^{\alpha+2} f_{\omega,\alpha}(z)\right| \le \int\limits_r^1 \frac{\omega(1-t)}{(1-rt)^3}\,dt + \int\limits_0^r \frac{\omega(1-t)}{(1-rt)^3}\,dt = I_1 + I_2, \text{ где } z = re^{i\varphi}.$$

Оценка интеграла $I_1$:

$$I_1 = \int\limits_r^1 \frac{\omega(1-t)}{(1-rt)^3}\,dt \le \int\limits_r^1 \frac{\omega(1-rt)}{(1-rt)^3}\,dt \le \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}. \tag{9}$$

Оценка интеграла $I_2$:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int\limits_0^r \frac{\omega(1-t)}{(1-rt)^3}\,dt \le \int\limits_0^r \frac{\omega(1-t)}{(1-t)^3}\,dt \\ &\le \frac{\omega(1-r)}{1-r}\int\limits_0^r \frac{dt}{(1-t)^2} \le \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}. \end{aligned} \tag{10}$$

В оценках (9) и (10) мы воспользовались тем, что функция $\frac{\omega(u)}{u}$ не возрастает на $\Delta$.

Объединяя неравенства (9), (10), получаем:

$$\left|D^{\alpha+2} f_{\omega,\alpha}(z)\right| \le \frac{2\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^2}.$$

Оценка (7) установлена.

Теперь докажем оценку (8). Имеем:

$$f_{\omega,\alpha}(re^{i\theta}) = (\alpha+3)\int\limits_0^1 (1-t)^{\alpha+1}\varphi_\omega(rte^{i\theta})\,dt$$
$$= (\alpha+3)\int\limits_0^1 (1-t)^{\alpha+1}\int\limits_0^1 \frac{\omega(1-u)}{(1-rute^{i\theta})^3}\;du\;dt.$$

Поэтому

$$f^{(n)}_{\omega,\alpha}(r) = \frac{(\alpha+3)(n+2)!}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^{\alpha+1}t^n \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-u)u^n}{(1-rut)^{n+3}}\;du\;dt.$$

Отсюда имеем

$$f^{(n)}_{\omega,\alpha}(r) \ge \frac{(\alpha+3)(n+2)!}{2}\int\limits_0^1 (1-t)^{\alpha+1}t^n\omega(1-t)\int\limits_0^t \frac{u^n}{(1-rut)^{n+3}}\;du\;dt$$
$$\ge \frac{1}{2^{n+1}}(n+2)!\int\limits_{1/2}^1 (1-t)^{\alpha+1}t^n\omega(1-t)\int\limits_{1/2}^t \frac{du}{(1-rut)^{n+3}}\;dt$$
$$\ge \frac{(n+2)!}{2^{n+3}}\int\limits_{1/2}^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1}t^n\omega(1-t)}{(1-rt)^{n+2}}\;dt - C_0,$$

где $C_0$ – положительное число, не зависящее от $r$ и $\omega$. Продолжая оценку величины $f^{(n)}_{\omega,\alpha}(r)$ снизу, получаем:

$$f^{(n)}_{\omega,\alpha}(r) \ge \frac{1}{2^{n+3}}\omega(1-r)\int\limits_{1/2}^r \frac{(1-t)^{\alpha+1}t^n}{(1-rt)^{n+2}}\;dt - C_0$$
$$\ge \frac{\omega(1-r)}{4^{n+3}}\int\limits_{\frac12}^r \frac{dt}{(1-t)^{n-\alpha+1}} - C_0$$
$$\ge \frac{\omega(1-r)}{4^{n+3}(1-r)^{n-\alpha}} - C_1, \quad r \ge \frac{1}{2},$$

где $C_1$ – положительное число, не зависящее от $r$. Отсюда окончательно при $r_0 < r < 1$ получаем:

$$f^{(n)}_{\omega,\alpha}(r) \geq \frac{C_n \omega(1-r)}{(1-r)^{n-\alpha}}, \quad C_n > 0.$$

□

**Лемма 2.** *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $m \geq \alpha + 2$. Тогда следующие утверждения равносильны.*

(1) $f \in \Lambda^\alpha_\omega$.

(2)
$$\left| f^{(m)}(z) \right| \lesssim \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{m-\alpha}}, \ z \in \mathbf{U}. \tag{11}$$

**Доказательство.** 1) $\Rightarrow$ 2). Учитывая равенство (6), имеем:

$$f(z) = (\alpha+3) \int\limits_0^1 (1-t)^{\alpha+1} D^{\,\alpha+2} f(tz)\, dt.$$

Следовательно,

$$f^{(m)}(z) = (\alpha+3) \int\limits_0^1 (1-t)^{\alpha+1} \left( D^{\,\alpha+2} f(tz) \right)^{(m)} \, dt. \tag{12}$$

Но из определения класса $\Lambda^\alpha_\omega$ легко вывести оценку

$$\left| \left( D^{\,\alpha+2} f(tz) \right)^{(m)} \right| \lesssim \frac{\omega(1-t|z|)}{(1-t|z|)^{m+2}}, \ z \in \mathbf{U}.$$

Поэтому из (12) получаем:

$$\left| f^{(m)}(z) \right| \lesssim \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha+1} \omega(1-t|z|)}{(1-t|z|)^{2+m}}\, dt \lesssim \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-t|z|)}{(1-t|z|)^{m-\alpha+1}}\, dt, \quad z \in \mathbf{U}.$$

Теперь учитывая, что функция $x \mapsto \frac{\omega(1-x)}{1-x}$ не убывает на $\Delta$, при этом $m - \alpha > 1$, легко доказать, что

$$\int\limits_0^1 \frac{\omega(1-t|z|)}{(1-t|z|)^{m-\alpha+1}}\, dt \lesssim \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{m-\alpha}}, \quad z \in \mathbf{U}.$$

Импликация 1) $\Rightarrow$ 2) установлена.

Докажем, что 2) $\Rightarrow$ 1). Не ограничивая общности, будем предполагать, что $f^{(k)}(0) = 0$, $k = 1, 2, \dots, m-1$, $\alpha > 0$, $\alpha \notin \mathbb{Z}_+$, в противном случае доказательство очевидно. Учитывая формулу

$$D^{\,\alpha+2} f(re^{i\varphi}) = \frac{r^{\alpha+2}}{\Gamma(m-\alpha-2)} \int\limits_0^r (r-t)^{m-\alpha-2} \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} \left(f(te^{i\varphi})\right)\, dt,$$

где $m \in \mathbb{N}$, $m < \alpha + 2 < m + 1$ (см. [7, с. 572]), из условия леммы получаем:

$$\left|D^{\,\alpha+2} f(re^{i\varphi})\right| \lesssim \frac{\omega(1-r)}{1-r} \int\limits_0^1 \frac{(1-t)^{m-\alpha-2}}{(1-rt)^{m-\alpha}}\, dt.$$

Поскольку $m - \alpha > 1$, из последней оценки нетрудно вывести, что

$$\left|D^{\,\alpha+2} f(re^{i\varphi})\right| \lesssim \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^2}, \quad r \in \Delta, \quad \varphi \in (-\pi, \pi].$$

$\square$

Следующее утверждение легко вывести из результатов автора [8].

**Лемма 3.** *Пусть $\alpha \geq 0$, $\omega$ – функция типа модуля непрерывности, $\Phi$ – линейный непрерывный функционал на $A_\omega(\alpha)$, $e_z(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta z}$, $\zeta$, $z \in \mathbf{U}$, $g(z) = \Phi(e_z)$. Тогда функция $g$ принадлежит классу $\Lambda_\omega^\alpha$, при этом*

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\rho e^{i\varphi}) \overline{g(\rho e^{i\varphi})} d\varphi, \quad f \in A_\omega(\alpha), \tag{13}$$

$$\|\Phi\| \lesssim \|\, g\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \lesssim \|\Phi\|\,. \tag{14}$$

*И обратно, каждая функция $g \in \Lambda_\omega^\alpha$ по равенству (13) порождает линейный непрерывный функционал на $A_\omega(\alpha)$, для которого справедливы оценки (14), то есть сопряжённое пространство $A_\omega(\alpha)^*$ изоморфно пространству $\Lambda_\omega^\alpha$ в указанном выше смысле.*

Следующее утверждение установлено в работах [9, 10].

**Лемма 4.** *Пусть $k$, $m \in \mathbb{N}$, $m > \alpha + 1$, $f \in A_\omega(\alpha, k)$, тогда существует многочлен $P$ порядка не выше $m - k + 1$ такой, что*

$$f(z) = \int\limits_{\mathbf{U}} \frac{(1-|\zeta|^2)^m D^{\,k} f(\zeta) P(\bar{\zeta} z)\, dm_2(\zeta)}{(1-\bar{\zeta} z)^{m+2-k}}, \quad z \in \mathbf{U}.$$

**Лемма 5.** *Пусть $n < \alpha + 1$, $h \in H(\mathbf{U})$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(a) $D^{-n}h \in \Lambda^{\alpha}_{\omega}$ ;

(b) $\left|h^{(j)}(z)\right| \lesssim \dfrac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{j+n-\alpha}}$, $z \in \mathbf{U}$, $j + n \geq \alpha + 2$.

**Доказательство** непосредственно следует из леммы 2. Действительно, по лемме 2 $D^{-n}h \in \Lambda^{\alpha}_{\omega}$ тогда и только тогда, когда

$$\left|\left(D^{-n}h(z)\right)^{(m)}\right| \lesssim \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{m-\alpha}}, \quad m \geq \alpha + 2.$$

Нетрудно видеть, что последняя оценка эквивалентна оценке

$$\left|h^{(m-n)}(z)\right| \lesssim \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{m-\alpha}}, \quad z \in \mathbf{U}, \quad m \geq \alpha + 2.$$

Положив $j = m - n$, получим:

$$\left|h^{(j)}(z)\right| \lesssim \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{n+j-\alpha}}, \quad n + j \geq \alpha + 2. \qquad \square$$

**Лемма 6.** *Пусть функция $h$ из $H(\mathbf{U})$ такова, что $D^{-n}h \in \Lambda^{\alpha}_{\omega}$, причём $n < \alpha$. Тогда $h \in H^{\infty}$.*

**Доказательство.** Из леммы 5 следует, что

$$|D^{m}h(z)| \lesssim \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{m+n-\alpha}}, \quad z \in \mathbf{U}, \quad m + n > \alpha.$$

Теперь, учитывая равенство

$$h(z) = (m+1)\int_0^1 (1-t)^{m-1} D^{m}h(tz)\, dt,$$

получим:

$$|h(z)| \lesssim \int_0^1 \frac{(1-t)^{m-1}\omega(1-t|z|)}{(1-t|z|)^{m+n-\alpha}}\, dt \lesssim \int_0^1 \frac{\omega(1-t|z|)}{(1-t|z|)^{n-\alpha+1}}\, dt < \infty,$$

в последней оценке мы воспользовались тем, что $\omega \in C[0,1]$, $n < \alpha$. $\square$

Следующая лемма устанавливается стандартным способом.

**Лемма 7.** *Пусть $h \in H^1(\mathbf{U})$, тогда если оператор $T_{\bar{h}}$ действует в пространстве $A_\omega(\alpha, n)$, то $h \in H^\infty$, причем $\|h\|_\infty \le \|T_{\bar{h}}\|$.*

**Доказательство.** Положим $f_r(z) = \dfrac{1}{(1 - rz)}$, $z \in \mathbf{U}$, $r \in \Delta$. Имеем

$$
\begin{aligned}
T_{\bar{h}}(f_r)(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbf{T}} \frac{f_r(\zeta)\overline{h(\zeta)}}{\zeta - z}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbf{T}} \frac{\overline{h(\zeta)}\, d\zeta}{(1 - r\zeta)(\zeta - z)} \\
&= \overline{-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbf{T}} \frac{h(\zeta)\overline{d\zeta}}{(\overline{\zeta} - \bar{z})(1 - r\bar{\zeta})}} \\
&= \overline{\frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbf{T}} \frac{h(\zeta) d\zeta}{(\zeta - r)(1 - \zeta\bar{z})}} = \frac{\overline{h(r)}}{1 - rz}, \quad z \in \mathbf{U}.
\end{aligned}
$$

Поскольку $T_{\bar{h}}$ действует в пространстве $A_\omega(\alpha, n)$, мы видим, что

$$
\|T_{\bar{h}}(f_r)\|_{A_\omega(\alpha,n)} = |h(r)| \cdot ||f_r||_{A_\omega(\alpha,n)} \le ||T_{\bar{h}}|| \cdot ||f_r||_{A_\omega(\alpha,n)},
$$

т.е. $|h(r)| \le \|T_{\bar{h}}\|$.

Заменив функцию $f_r(z)$ на $f_r(e^{i\theta} z)$, получим:

$$
\left|h(re^{i\theta})\right| \le \|T_{\bar{h}}\|, \quad r \in \Delta, \quad \theta \in (-\pi, \pi].
$$

□

Лемму 8 можно вывести из теорем вложения весовых классов Соболева. Мы докажем её простым способом, используя интегральные представления классов $A_\omega(\alpha, n)$.

**Лемма 8.** *Пусть $n \ge \alpha + 2$, $\omega$ – функция типа модуля непрерывности. Тогда класс $A_\omega(\alpha, n)$ является кольцом относительно операций умножения и сложения.*

**Доказательство.** Достаточно доказать, что для произвольной функции $g$ из $A_\omega(\alpha, n)$ оператор умножения $S_g(f)(z) = g(z) \cdot f(z)$, $z \in \mathbf{U}$, является ограниченным оператором в пространстве $A_\omega(\alpha, n)$. Для этого, используя формулу Лейбница и равенство

$$
D^n(f \cdot g)(z) = \frac{1}{n!}(z^n f(z) g(z))^n, \quad z \in \mathbf{U},
$$

достаточно установить оценку

$$\int\limits_{\mathbf{U}} (1-|\zeta|)^{\alpha-1}\omega(1-|\zeta|)\left|f^{(n-k)}(\zeta)\right|\cdot\left|g^{(n)}(\zeta)\right|\,dm_2(\zeta) \lesssim \|f\|_{A_\omega(\alpha,n)}\cdot\|g\|_{A_\omega(\alpha,n)} \tag{15}$$

при всех $k=0,1,\dots,n$.

Используя лемму 4, имеем:

$$f(z)=\int\limits_{\mathbf{U}}\frac{(1-|\zeta|^2)^m\,D^n f(\zeta)P(\bar\zeta z)}{(1-\bar\zeta z)^{m+2-n}}\,dm_2(\zeta),\quad z\in\mathbf{U},$$

$$g(z)=\int\limits_{\mathbf{U}}\frac{(1-|\zeta|^2)^m\,D^n g(\zeta)P(\bar\zeta z)}{(1-\bar\zeta z)^{m+2-n}}\,dm_2(\zeta),\quad z\in\mathbf{U},$$

где $m$ – достаточно большое натуральное число. Поэтому

$$f^{(n-k)}(z)=(m+2-n)\dots(m-k+1)\times\int\limits_{\mathbf{U}}\frac{(1-|\zeta|^2)^m D^n f(\zeta)P(\bar\zeta z)\bar\zeta^{n-k}}{(1-\bar\zeta z)^{m+2-k}}\,dm_2(\zeta),\quad z\in\mathbf{U},$$

$$g^{(k)}(z)=(m+2-n)\dots(m+1+n+k)\times\int\limits_{\mathbf{U}}\frac{(1-|\zeta|^2)^m\bar\zeta^k\,D^n g(\zeta)P(\bar\zeta z)}{(1-\bar\zeta z)^{m+2-n+k}}\,dm_2(\zeta),\quad z\in\mathbf{U}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbf{U}}|f^{(n-k)}(z)|\cdot|g^{(k)}(z)|(1-|z|)^{\alpha-1}\omega(1-|z|)\,dm_2(z) \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}}\int\limits_{\mathbf{U}}(1-|\zeta|)^m(1-|w|)^m\,|D^n f(\zeta)|\,|D^n g(w)| \times I(\zeta,w)\,dm_2(\zeta)\,dm_2(w), \tag{16}$$

где

$$I(\zeta,w)=\int\limits_{\mathbf{U}}\frac{\omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1}}{|1-\bar\zeta z|^{m+2-k}|1-\bar w z|^{m+2-n+k}}\,dm_2(z),\quad w,\zeta\in\mathbf{U}.$$

Учитывая, что $m$ – достаточно большое натуральное число, легко установить оценки:

$$I(\zeta,w)\lesssim\frac{\omega(1-|\zeta|)(1-|\zeta|)^{\alpha-1}}{(1-|\zeta|)^{2(m+1)-n}},\quad \text{если}\quad |\zeta|\ge|w|, \tag{17}$$

$$I(\zeta,w)\lesssim\frac{\omega(1-|w|)}{(1-|w|)^{2(m+1)-n}},\qquad \text{если}\quad |w|\ge|\zeta|. \tag{18}$$

Подставляя оценку (17) в (16), получаем:

$$\left\|f^{(n-k)}g^{(k)}\right\|_{A_\omega(\alpha)}\lesssim\left(\int\limits_{\mathbf{U}}|D^nf(\zeta)|\,\omega(1-|\zeta|)(1-|\zeta|)^{\alpha-1}\,dm_2(\zeta)\right)\times\int\limits_{\mathbf{U}}(1-|w|)^{n-2}|D^ng(w)|\,dm_2(w).$$

Но так как $n\ge\alpha+2$ и $\omega(1-|w|)\ge\mathrm{const}(1-|w|)$, $w\in\mathbf{U}$, то из последнего неравенства получаем:

$$\left\|f^{(n-k)}g^{(k)}\right\|_{A_\omega(\alpha)}\lesssim||f||_{A_\omega(\alpha,n)}||g||_{A_\omega(\alpha,n)}.$$

Аналогичную оценку можно получить, если мы подставим в (16) оценку (18). □

## §2. Доказательство основных результатов статьи

Сначала докажем теорему 2.

Докажем первый пункт теоремы: b)⇒ a).

Положим

$$F(z)=B_{h,r}(f)(z)=\int\limits_0^z(z-t)^{n-1}h(t)f^{(n)}(rt)\,dt.$$

Поскольку $F^{(j)}(0)=0$, $j=0,1,\dots,n-1$, учитывая лемму 2, для оценки нормы $||F||_{\Lambda_\omega^\alpha}$ достаточно оценить функцию $F^{(n+1)}(z)$ при $|z|\ge\frac12$.

Имеем $F^{(n+1)}(z)=h'(z)f^{(n)}(rz)+rh(z)f^{(n+1)}(rz)$. Поэтому

$$||F||_{\Lambda_\omega^{(n-1)}}\lesssim\sup_{z\in\mathbf{U}}\left(\left(|h'(z)f^{(n)}(rz)|+||h||_\infty\left|f^{(n+1)}(rz)\right|\right)\frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)}\right)$$

$$\lesssim||f||_{\Lambda_\omega^\alpha}||h||_\infty+\sup_{z\in\mathbf{U}}\left(|h'(z)|\frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)}\left|f^{(n)}(rz)\right|\right). \tag{19}$$

Теперь заметим, что $f^{(n)}(rz) = r\int\limits_0^z f^{(n+1)}(rt)\ dt + f^{(n)}(0)$.

Поскольку $\left|f^{(n)}(0)\right| \le \|f\|_{\Lambda_\omega^\alpha}$, имеем

$$\left|f^{(n)}(rz)\right| \le \int\limits_0^\rho \left|f^{(n+1)}(rte^{i\varphi})\right| dt + \|f\|_{\Lambda_\omega^\alpha}\,, \quad \text{где} \quad z = \rho e^{i\varphi};$$

$$|f^{(n)}(rz)| \le \int\limits_0^\rho ||f||_{\Lambda_\omega^\alpha} \frac{\omega(1-rt)}{(1-rt)^2}\, dt + \|f\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \lesssim \|f\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \int\limits_{1-\rho}^1 \frac{\omega(u)}{u^2}\, du.$$

Из (19) окончательно получаем

$$\|F\|_{\Lambda_\omega^{(n-1)}} \lesssim \|f\|_{\Lambda_\omega^{(n-1)}} \left( \|h\|_\infty + \sup_{z\in\mathbf{U}} \left( |h'(z)|\, \frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)} \int\limits_{1-|z|}^1 \frac{\omega(u)}{u^2}\, du \right)\right).$$

Импликация b) $\Rightarrow$ a) установлена. Докажем теперь, что a) $\Rightarrow$ b). Для этого докажем, что если

$$\sup_{z\in\mathbf{U}} \left\{ |h'(z)| \frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)} \int\limits_{1-|z|}^1 \frac{\omega(u)}{u^2}\, du \right\} = +\infty, \tag{20}$$

то

$$\sup_{0\le r<1} \|B_{h,r}\| = +\infty.$$

Для этого используем лемму 1 (при $\alpha = 0$, $n = 2$). Если выполняется условие (20), то существует последовательность $\{\lambda_m\}_{m=1}^{+\infty}$, $\lambda_m \in \mathbf{U}$, $|\lambda_m| \to 1$, $m \to +\infty$, такая, что

$$\sup_{m\ge1} \left\{ \frac{|h'(\lambda_m)|\,(1-|\lambda_m|)^2}{\omega(1-|\lambda_m|)} \int\limits_{1-|\lambda_m|}^1 \frac{\omega(u)}{u^2}\, du \right\} = +\infty.$$

Пусть $g$ – функция, построенная в лемме 1, $g_m(z) = g(\bar\lambda_m z)$,

$$\psi_m(z) = \frac{1}{(n-2)!} \int\limits_0^z (z-t)^{n-2} g(\bar\lambda_m t)\ dt.$$

По лемме 1 при $m > m_0$ справедлива оценка

$$|g'_m(\lambda_m)| = |\lambda_m| \cdot \left|g'\left(|\lambda_m|^2\right)\right| \geq c_0 \int\limits_{1-|\lambda_m|^2}^{1} \frac{\omega(u)}{u^2}\,du,$$

где $c_0$ – некоторое положительное число, не зависящее от $m$.

Заметим, что если выполняется равенство (20) для некоторого $h \in H^\infty(\mathbf{U})$, то

$$\sup_{z\in\mathbf{U}} \left( \frac{(1-|z|)}{\omega(1-|z|)} \int\limits_{1-|z|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^2}\,du \right) = +\infty.$$

Оценим норму функций

$$B_{h,r}(\psi_m)(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int\limits_0^z (z-t)^{n-1} h(t) \psi_m^{(n)}(rt)\,dt$$

в $\Lambda_\omega^{(n-1)}$. Ясно, что

$$\begin{aligned}\left(B_{h,r}(\psi_m)(z)\right)^{(n+1)} &= \left(h(z)\psi_m^{(n)}(rz)\right)' \\ &= h'(z)g'(r\bar\lambda_m z)\bar\lambda_m + h(z)\bar\lambda_m^2 g^{(2)}(\bar\lambda_m rz), \quad z\in\mathbf{U}.\end{aligned}$$

Но по лемме 1

$$\left|h(z)\bar\lambda_m^2 g^{(2)}(r\bar\lambda_m z)\right| \lesssim \|h\|_\infty \frac{\omega(1-|z\lambda_m|)}{\left(1-|\bar\lambda_m z|\right)^2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} &\sup_{r\in\Delta}\sup_{z\in\mathbf{U}} \frac{(1-|z|)^2}{\omega(1-|z|)} \left|B_{h,r}^{(n+1)}(\psi_m(z))\right| \geq \\ &\geq c_0 \left\{ |h'(\lambda_m)| \cdot \left|g'(|\lambda_m|^2)\right| \frac{(1-|\lambda_m|)^2}{\omega(1-|\lambda_m|)} \right\} \\ &\geq c_1 \left\{ |h'(\lambda_m)| \frac{(1-|\lambda_m|)^2}{\omega(1-|\lambda_m|)} \int\limits_{1-|\lambda_m|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^2}\,du \right\}, \quad m \geq m_0. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\sup_m \sup_{r\in\Delta} \left\|B_{h,r}(\psi_m)\right\|_{\Lambda_\omega^{(n-1)}} = +\infty. \tag{21}$$

Учитывая, что $\sup\limits_{m\geq 1} \|\psi_m\|_{\Lambda_\omega^{(n-1)}} < +\infty$, из (21) получим:

$$\sup_{0\leq r<1} \|B_{h,r}\| = +\infty.$$

Первый пункт теоремы доказан. Перейдем к доказательству второго пункта и установим сначала, что b) $\Rightarrow$ a).

Пусть $F(z)=B_{h,r}(f)(z)$, $f\in\Lambda_\omega^\alpha$. Так как $F^{(j)}(0)=0$, $j=0,1,\ldots,n-1$, при этом

$$F^{(n)}(z) = h(z)f^{(n)}(rz), \quad z \in \mathbf{U}, \tag{22}$$

то по лемме 2

$$\|F\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \lesssim \|h\|_\infty \, \|f_r\|_{\Lambda_\omega^\alpha}\,.$$

Поэтому

$$\|B_{h,\,r}(f)\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \lesssim \|h\|_\infty \, \|f_r\|_{\Lambda_\omega^\alpha}\,.$$

Следовательно,

$$\sup_{0\leq r<1} \|B_{h,r}\| < +\infty,$$

что и требовалось доказать.

Доказательство импликации a) $\Rightarrow$ b). Предположим, что существует последовательность $\{\lambda_m\}_{m=1}^{+\infty}$, $\lambda_m \in \mathbf{U}$, такая, что $h(\lambda_m) \to \infty$, $m \to +\infty$.

Тогда, снова учитывая лемму 2 и равенство (22), получаем:

$$\left|B_{h,\,r}^{(n)}(f)(z)\right| \lesssim \|B_{h,\,r}\| \; \|f\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{n-\alpha}}, \quad z \in \mathbf{U}, \tag{23}$$

то еcть

$$\left|h(z)f^{(n)}(zr)\right| \lesssim \|f\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{n-\alpha}}, \quad z \in \mathbf{U}.$$

Отсюда, положив $r = 1$, $z = \lambda_m$ и $f(z) = f_{\omega,\alpha}(\bar{\lambda}_m z)$, где $f_{\omega,\alpha}$ – функция, построенная в лемме 1, из (23) получаем:

$$|h(\lambda_m)| \left|f_{\omega,\alpha}^{(n)}\left(|\lambda_m|^2\right)\right| \lesssim \|f_{\omega,\alpha}\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \frac{\omega(1-|\lambda_m|)}{(1-|\lambda_m|)^{n-\alpha}}.$$

Отсюда снова, учитывая лемму 1, приходим к неравенству:

$$|h(\lambda_m)| \lesssim \mathrm{const},$$

что противоречит допущению. □

**Доказательство теоремы 1.**

Докажем первый пункт теоремы: a) $\Rightarrow$ b). Пусть оператор $T_h$ действует в пространстве $A_\omega(\alpha,n)$, $n \geq \alpha+2$. Покажем, что $h$ допускает представление (3), где $h_1 \in A_\omega(\alpha,n)$, $h_2 \in H^\infty(\mathbf{U})$.

Так как оператор $T_h$ действует в пространстве $A_\omega(\alpha,n)$, то

$$\|T_h(f)\|_{A_\omega(\alpha,n)} \leq \|T_h\| \cdot \|f\|_{A_\omega(\alpha,n)}, \quad f \in A_\omega(\alpha,n).$$

Но, учитывая, что значение в точке $f \mapsto f(z_0)$ для произвольной точки $z_0 \in \mathbf{U}$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $A_\omega(\alpha,n)$, легко заметить, что $\Phi(f) = T_h(f)(0)$ является линейным непрерывным функционалом на пространстве $A_\omega(\alpha,n)$. Поэтому по лемме 3 можно найти такую функцию $g \in H(\mathbf{U})$, что $D^{-n}g \in \Lambda_\omega^\alpha$ и

$$\begin{aligned} T_h(f)(0) &= \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{T}} f(\rho\zeta)\overline{g(\rho\zeta)}\, dm_1(\zeta) \\ &= \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{T}} D^n f(\rho\zeta)\overline{D^{-n}g(\rho\zeta)}\, dm_1(\zeta), \end{aligned}$$

где $dm_1$ – линейная мера Лебега на $\mathbf{T}$. Теперь заметим, что

$$T_h(f)(0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbf{T}} f(\zeta)h(\zeta)\, dm_1(\zeta) \tag{24}$$

для произвольной функции $f \in C_A(\mathbf{U}) \cap A_\omega(\alpha,n)$. Напомним, что $C_A(\mathbf{U})$ – множество голоморфных в круге $\mathbf{U}$ функций, непрерывных на $\mathbf{U} \cup \mathbf{T}$. Положим в равенстве (24) $f(\zeta) = \zeta^m$, $\zeta \in \mathbf{U}$, $m \in \mathbb{Z}_+$, и учтём лемму 3:

$$\int\limits_{\mathbf{T}} \zeta^m\overline{g(\zeta)}\, dm_1(\zeta) = \int\limits_{\mathbf{T}} \zeta^m h(\zeta)\, dm_1(\zeta)$$

при всех $m \in \mathbb{Z}_+$, следовательно, функция $h(\zeta) - \overline{g(\zeta)}$, $\zeta \in \mathbf{T}$, имеет аналитическое продолжение в $\mathbf{U}$, принадлежащее классу $H^1(\mathbf{U})$, т.е. $h = h_1 + \bar{h}_2$, где

$$h_1 \in H_0^1(\mathbf{U}), \quad D^{-n}h_2 \in \Lambda_\omega^\alpha, \quad H_0^1(\mathbf{U}) = \left\{f \in H^1 : f(0) = 0\right\}.$$

Возвращаясь к определению оператора $T_h$, получим:

$$T_h(f)(z) = h_1(z)f(z) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\mathbf{T}} \frac{f(\zeta)\overline{h_2(\zeta)}\, d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbf{U}, \tag{25}$$

следовательно, $T_h(1)(z) = h_1(z) + \overline{h_2(0)}$, т.е. $h_1 \in A_\omega(\alpha, n)$. По лемме 8 пространство $A_\omega(\alpha, n)$ при $n \geq \alpha + 2$ является кольцом, поэтому оператор $S_{h_1}(f)(z) = h_1(z)f(z)$, $z \in \mathbf{U}$, является ограниченным оператором в $A_\omega(\alpha, n)$. Снова возвращаясь к равенству (25), заметим, что в условиях пункта a) оператор

$$T_{\bar{h}_2}(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{T}} \frac{f(\zeta)\overline{h_2(\zeta)}\,d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \mathbf{U},$$

является ограниченным оператором в пространстве $A_\omega(\alpha, n)$. По лемме 7 $h \in H^\infty$ и импликация a) $\Rightarrow$ b) установлена.

Перейдём к доказательству импликации b) $\Rightarrow$ a). Для этого достаточно доказать ограниченность оператора

$$T_{\bar{h}_2}(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{T}} \frac{f(\zeta)\overline{h_2(\zeta)}}{\zeta - z}d\,\zeta, \ z \in \mathbf{U}, \tag{26}$$

при условии, что $h_2 \in H^\infty$. Для удобства положим $F(z) = T_{\bar{h}_2}(f)(z)$, $z \in \mathbf{U}$. По лемме 3 и теореме Хана–Банаха существует функция $g \in \Lambda_\omega^\alpha$ такая, что $\|g\|_{\Lambda_\omega^\alpha} \lesssim 1$,

$$\left\|F_r^{(n)}\right\|_{A_\omega(\alpha)} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F^{(n)}(re^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\,d\theta, \quad r \in (0, 1].$$

Учитывая равенство (26), получим:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} F^{(n)}(re^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{T}} f(\zeta)\overline{h_2(\zeta)} \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{g(e^{i\theta})}}{(\zeta - re^{i\theta})^{n+1}}\,d\zeta$$

$$= \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{T}} f(\zeta)\overline{h_2(\zeta)} \cdot \overline{\frac{\zeta^{n+1}}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{g(e^{i\theta})e^{i\theta(n+1)}}{(e^{i\theta} - r\zeta)^{n+1}}\,d\theta}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{T}} f(\zeta)\overline{h_2(\zeta)\zeta^{n+1}\psi_r(\zeta)}\,d\zeta, \tag{27}$$

где $\psi_r(\zeta) = \left.(g(t) \cdot t^n)^{(n)}\right|_{t = r\zeta}$.

Из равенства (27) получаем:

$$\left\|F_r^{(n)}\right\|_{A_\omega(\alpha)} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{T}} f(\zeta)\overline{h_2(\zeta)\psi_r(\zeta)\zeta^{n+1}}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{h_2(e^{i\theta})e^{in\theta}\psi_r(e^{i\theta})}\,d\theta, \qquad (28)$$

где $F_r(z) = F(rz)$, $z \in \mathbf{U}$.

Теперь заметим, что

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(e^{i\theta})\overline{h_2(e^{i\theta})e^{in\theta}\psi_r(\theta)}\,d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} D^n f(e^{i\theta})\overline{D^{-n}G_r(e^{i\theta})}\,d\theta, \quad (29)$$

где $G_r(z) = h_2(z)z^n\psi_r(z)$, $z \in \mathbf{U}$. Применив лемму 3 и теорему 2, из (29) получаем:

$$\left\|F_r^{(n)}\right\| \lesssim \|f\|_{A_\omega(\alpha,n)}\,\|h_2\|_\infty\,.$$

Первый пункт теоремы установлен.

Перейдём к доказательству второго пункта и проверим сначала, что a) $\Rightarrow$ b). По лемме 7 из a) следует, что $h \in H^\infty(\mathbf{U})$. Докажем необходимость условия (4). По теореме 2 условие (4) равносильно условию (5). Предположим вопреки утверждению теоремы 1, что условие (5) не выполнено, то есть для $h$ выполняется

$$\sup_{0<r<1}\|B_{h,\,r}\| = +\infty.$$

Применим теорему Банаха–Штейнгауза (см. [11]), согласно которой существует функция $\psi_0$ из $\Lambda_\omega^{(n-1)}$ такая, что

$$\sup_{0<r<1}\|B_{h,\,r}(\psi_0)\|_{\Lambda_\omega^{(n-1)}} = +\infty;$$

при этом очевидно, что $B_{h,r}(\psi) \in \Lambda_\omega^{(n-1)}$ для произвольной функции $\psi \in \Lambda_\omega^{(n-1)}$, $0 < r < 1$. Определим функционал на пространстве $A_\omega(\alpha)$, порождаемый функцией $B_{h,\,r}(\psi_0)$ по равенству (13) из леммы 3. Указанный функционал обозначим через $\Phi_r$, $0 < r < 1$. Используя оценки (14) из леммы 3, имеем:

$$\sup_{0<r<1}\|\Phi_r\| = +\infty.$$

Теперь, снова используя теорему Банаха–Штейнгауза, получим, что существует функция $f_0$ из $A_\omega(\alpha)$ такая, что

$$\sup_{0<r<1} |\Phi_r(f_0)| = +\infty. \tag{30}$$

Положим

$$f(z) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^z (z-t)^{n-1} f_0(t)\, dt, \quad z \in \mathbf{U}.$$

Докажем, что $T_{\bar{h}}(f) \notin A_\omega(\alpha, n)$. Положим, как и выше, $F(z) = T_{\bar{h}}(f)(z)$, $z \in \mathbf{U}$. Ввиду равенств (28) и (29) получаем:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^{(n)}(re^{i\theta}) \overline{\psi_0(e^{i\theta})}\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} D^{\,n} f(e^{i\theta}) \overline{D^{-n} G_r(e^{i\theta})}\, d\theta$$

$$= \lim_{\rho\to 1-0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \Big( f(\rho e^{i\theta}) \left(\rho e^{i\theta}\right)^{(n)} \Big)^{(n)} \overline{D^{-n} G_r(\rho e^{i\theta})}\, d\theta, \tag{31}$$

где $G_r(z) = h(z) z^n \psi_0(rz)$, $z \in \mathbf{U}$.

Упростив подынтегральное выражение, легко установить равенство:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F^{(n)}(re^{i\theta}) \overline{\psi_0(e^{i\theta})} d\theta = \Phi_r(f_0) + \gamma(r), \quad r \in [0,1),$$

где $\gamma(r)$ – некоторая ограниченная функция от $r$, $r \in [0,1)$. Теперь, учитывая формулу (30), получаем, что

$$\sup_{0<r<1} \left| \int_{-\pi}^{\pi} F^{(n)}(re^{i\theta}) \overline{\psi_0(e^{i\theta})}\, d\theta \right| = +\infty.$$

По лемме 3 функция $F$ не принадлежит классу $A_\omega(\alpha, n)$, т.е. импликация второго пункта a) $\Rightarrow$ b) установлена.

Перейдём к доказательству импликации b)$\Rightarrow$ a). Доказательство этой импликации почти дословно повторяет рассуждения, приведённые при доказательстве первого пункта теоремы. Действительно, пусть $g$ – произвольная функция из $\Lambda_\omega^\alpha$. Учитывая равенство (31), имеем:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F^{(n)}(re^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D^n f(e^{i\theta}) D^{-n} G_r(e^{i\theta})\,d\theta,$$

где $G_r$ определяется равенством (31). Но так как выполняется (4), то

$$\sup_{0<r<1}\left\|D^{-n}G_r\right\|_{\Lambda_\omega^\alpha} < +\infty.$$

Из леммы 3 получаем

$$\sup_{0<r<1}\left\|F_r^{(n)}\right\|_{A_\omega^\alpha} < +\infty,$$

где $F_r(z) = F(rz)$, $z \in \mathbf{U}$, $r \in \Delta$.

Доказательство импликации b) $\Rightarrow$ a) закончено.

Перейдём к доказательству третьего пункта, импликации a) $\Rightarrow$ b). Пусть $T_h$ действует в пространстве $A_\omega(\alpha,n)$, тогда, как и выше, легко установить, что $h = h_1 + \bar{h}_2$, где $h_2$ удовлетворяет условию $D^{-n}h_2 \in \Lambda_\omega^\alpha$. Поэтому получаем, что $h = h_1 + \overline{h_2}$, где $h_1 \in H^1(\mathbf{U})$, $D^{-n}h_2 \in \Lambda_\omega^\alpha$. Если мы докажем, что $T_{\bar{h}_2} \in L\left(A_\omega(\alpha,n)\right)$, то, используя равенство (25), этим мы докажем, что $h_1$ является мультипликатором в пространстве $A_\omega(\alpha,n)$. Доказательство этого утверждения при $n = 0$ получается стандартным образом (см. [1]), поэтому будем предполагать, что $n \geq 1$.

Воспользовавшись леммой 4, получим представление

$$f(z) = \int_{\mathbf{U}} \frac{(1-|t|^2)^m D^n f(t) P(\bar{t}z)}{(1-\bar{t}z)^{m+2-n}}\,dm_2(t),$$

где $P(w)$ – многочлен степени не выше $m+1-n$, при этом, поскольку $n \geq 1$, интеграл абсолютно сходится при $z \in \mathbf{T}$. Поэтому

$$T_{\bar{h}_2}(f)(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}} \frac{\overline{h_2(\zeta)}}{\zeta - z}\int_{\mathbf{U}} \frac{(1-|t|^2)^m D^n f(t) P(\bar{t}\zeta)}{(1-\bar{t}\zeta)^{m+2-n}}\,dm_2(t)\,d\zeta.$$

Изменив порядок интегрирования, получаем

$$T_{\bar{h}_2}(f)(z) = \int_{\mathbf{U}} (1-|t|^2)^m D^n f(t) \left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbf{T}} \frac{\overline{h_2(\zeta)}P(\bar{t}\zeta)}{(1-\bar{t}\zeta)^{m+2-n}(\zeta - z)}\,d\zeta\right) dm_2(t).$$

Теперь преобразуем внутренний интеграл:

$$J(z,t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{T}} \frac{\overline{h_2(\zeta)}P(\bar{t}\zeta)}{(1-\bar{t}\zeta)^{m+2-n}(\zeta-z)}\,d\zeta$$
$$= \overline{\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbf{T}} \frac{h_2(\zeta)P(\bar{\zeta}t)\zeta^{m+1-n}}{(\zeta-t)^{m+2-n}(1-\zeta\bar{z})}\,d\zeta}, \quad z\in\mathbf{U}.$$

Ввиду того, что $P$ – многочлен степени не выше $m+1-n$, получаем, что $P(t\bar{\zeta})\zeta^{m+1-n}$ – аналитический многочлен от $\zeta$. Поэтому к интегралу $J$ применима формула Коши, и, следовательно,

$$J(z,t) = \left.\overline{\left(\frac{h_2(\zeta)P_1(\bar{t},\zeta)}{1-\zeta\bar{z}}\right)^{(m+1-n)}}\right|_{\zeta=t}.$$

Используя формулу Лейбница, получаем:

$$J(z,t) = \sum_{k=0}^{m+1-n} C^k_{m+1-n}\overline{h_2^{(k)}(t)}\frac{\widetilde{P}(t,z)}{(1-\bar{t}z)^{m+2-k-n}},$$

где $P_1(t,z)$ и $\widetilde{P}(t,z)$ – некоторые многочлены относительно переменных $t$, $z$ на $\mathbf{U}\times\mathbf{U}$. Следовательно, чтобы установить ограниченность оператора $T_{\bar{h}_2}$ в $A_\omega(\alpha,n)$, достаточно доказать, что оператор

$$B_{h_2}(\psi)(z) = \int\limits_{\mathbf{U}} \frac{(1-|t|^2)^m\overline{h_2^{(k)}}\psi(t)}{(1-\bar{t}z)^{m+2-k}}\,dm_2(t)$$

действует в пространстве $A_\omega(\alpha) := A_\omega(\alpha,0)$ при $0\le k\le m+1-n$, при условии $D^{-n}h_2\in\Lambda^\alpha_\omega$.

Заметим, что $m+2-k\ge n+1$ при всех $0\le k\le m+1-n$, т.е. $m+2-k\ge 2$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbf{U}} |B_{h_2}(\psi)(z)|\,\omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1}\,dm_2(z) \tag{32}$$

$$\lesssim \int\limits_{\mathbf{U}}\int\limits_{\mathbf{U}} \frac{(1-|t|^2)^m\,|\psi(t)|\cdot\left|h_2^{(k)}(t)\right|\omega(1-|z|)(1-|z|)^{\alpha-1}}{|1-\bar{t}z|^{m+2-k}}\,dm_2(t)dm_2(z).$$

Перейдем к оценке внешнего интеграла:

$$I(t) = \int\limits_{\mathbf{U}} \frac{(1-|z|)^{\alpha-1}\omega(1-|z|)}{|1-\bar{t}z|^{m+2-k}}\, dm_2(z), \quad t \in \mathbf{U}, \quad 0 \le k \le m+1-n.$$

Как было отмечено выше, при указанных значениях $k$ верно неравенство $m+2-k \ge 2$. Кроме того, $t \mapsto \omega(t)$ – неубывающая функция на $[0,1]$. Поэтому

$$I(t) \asymp \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-\rho)(1-\rho)^{\alpha-1}}{(1-r\rho)^{m+1-k}}\, d\rho$$

$$\le \int\limits_0^1 \frac{\omega(1-r\rho)(1-\rho)^{\alpha-1}}{(1-r\rho)^{m+1-k}}\, d\rho,$$

где $r := |t|$.

Рассмотрим сперва случай $m-k-\alpha > 0$. Тогда, учитывая, что $\frac{\omega(1-\rho)}{1-\rho}$ – неубывающая функция на $[0,1)$, получаем

$$I(t) \lesssim \frac{\omega(1-r)}{1-r} \int\limits_0^1 \frac{(1-\rho)^{\alpha-1}}{(1-r\rho)^{m-k}}\, d\rho \lesssim \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{m-k-\alpha+1}}, \quad r \in [0,1).$$

Теперь рассмотрим случай $m-k-\alpha \le 0$. Оценивая $I(t)$ через $\int\limits_0^1 (\ ) = \int\limits_0^r (\ ) + \int\limits_r^1 (\ )$, легко заметить, что

$$I(t) \lesssim \int\limits_{1-r}^1 \frac{\omega(u)}{u^{2+m-k-\alpha}}\, du + \frac{\omega(1-r)}{(1-r)^{m+1-k-\alpha}}. \tag{33}$$

Напомним, что $r = |t|$. Возвращаясь к оценке интеграла (32) и учитывая лемму 6, получаем, что при $m-k-\alpha > 0$ справедлива оценка

$$\|B_{h_2}(\psi)\|_{A_\omega(\alpha)} \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}} |\psi(t)| \cdot \left| h_2^{(k)}(t) \right| (1-|t|)^k \omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1}\, dm_2(t)$$

$$\lesssim \|\psi\|_{A_\omega(\alpha)},$$

поскольку из условия $h_2 \in H^\infty$ следует, что $\left|h_2^{(k)}(t)\right|(1-|t|)^k \lesssim 1$. Теорема доказана в этом случае

Вернемся к случаю $m-k-\alpha \le 0$. Учитывая оценки (32) и (33), приходим к неравенству

$$\|B_{h_2}(\psi)\|_{A_\omega(\alpha)} \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}} |\psi(t)| \cdot \left|h_2^{(k)}(t)\right| (1-|t|)^m \times \left( \int\limits_{1-|t|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^{2+m-k-\alpha}} du \right) dm_2(t) + \|\psi\|_{A_\omega(\alpha)}. \tag{34}$$

Остается оценить последний интеграл. Учитывая, что $k \ge m-\alpha$, и применяя лемму 5, имеем

$$\left|h_2^{(k)}(z)\right| \lesssim \frac{\omega(1-|z|)}{(1-|z|)^{n+k-\alpha}}, \quad z \in \mathbf{U}.$$

Следовательно, оценку (34) можно записать в виде

$$\|B_{h_2}(\psi)\|_{A_\omega(\alpha)} \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}} |\psi(t)|\, \omega(1-|t|)(1-|t|)^{m-n-k+\alpha} \times \left( \int\limits_{1-|t|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^{2+m-k-\alpha}} du \right) dm_2(t) + \|\psi\|_{A_\omega(\alpha)}. \tag{35}$$

Пусть $\delta(t) = (1-|t|)^{m-n-k+1} \int\limits_{1-|t|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^{2+m-k-\alpha}}\, du$, $t \in \mathbf{U}$. Тогда неравенство (35) можно записать в виде

$$\|B_{h_2}(\psi)\|_{A_\omega(\alpha)} \lesssim \int\limits_{\mathbf{U}} |\psi(t)|\, \omega(1-|t|)(1-|t|)^{\alpha-1} \delta(t)\, dm_2(t) + \|\psi\|_{A_\omega(\alpha)}.$$

Если мы докажем, что $\delta \in L^\infty(0,1)$, то утверждение теоремы будет установлено. Прежде всего заметим, что

$$\delta(t) \le \int\limits_{1-|t|}^{1} \frac{\omega(u)}{u^{1+n-\alpha}}\, du.$$

Но по условию теоремы $n < \alpha$, $\omega \in C[0,1]$, поэтому из последней оценки следует, что $\delta \in L^\infty(0,1)$. □

## Литература

1. Ф. А. Шамоян, *Об ограниченности одного класса операторов, связанных с делимостью аналитических функций.* — Изв. АН АрмССР. Сер. мат. **8**, No. 6 (1973), 474–490.
2. Ф. А. Шамоян, *Об одном классе операторов, связанных с факторизацией аналитических функций.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **39** (1974), 200–206.
3. Ф. А. Шамоян, *Теплицевы операторы и деление на внутреннюю функцию в некоторых пространствах аналитических функций.* — ДАН АрмССР **76**, No. 3 (1983), 109–113.
4. S. Janson, J. Peetre, A. Semmes, *On the action of Hankel and Toeplitz operators on some function spaces.* — Duke Math. J. **51** (1984), 937–958.
5. K. Zhu, *Multipliers of BMO in the Bergman metric with applications to Toeplitz operators.* — J. Func. Anal. **87**, No. 1 (1989), 31–50.
6. Songxiao Li, Stevo Stević, *Volterra type operators from Zygmund space into Bloch spaces.* — J. Concr. Appl. Math. **6**, No. 2 (2008), 199–207.
7. М. М. Джрбашян, *Интегральные преобразования и представление функций в комплексной области.* Наука, М., 1966.
8. Ф. А. Шамоян, *Диагональные отображения и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций.* — Сибирский мат. ж. **31**, No. 2 (1990), 197–215.
9. О. Е. Антоненкова, Ф. А. Шамоян, *Преобразование Коши линейных непрерывных функционалов и проекторы в весовых пространствах аналитических функций.* — Сибирский мат. ж. **46**, No. 6 (2005), 1208–1234.
10. N. M. Tkachenko, F. A. Shamoyan, *The Hardy–Littlewood theorem and the operator of harmonic conjugate in some classes of simply connected domains with rectifiable boundary.* — J. Math. Physics, Analysis, Geometry **5**, No. 2 (2009), 192–210.
11. У. Рудин, *Функциональный анализ.* Мир, М., 1975.

Shamoyan F. A. Boundedness of Toeplitz operators in weighted Sobolev spaces of functions holomorphic in the disk.

A complete description is found for functions $h$ integrable on the unit circle and having the property that the Toeplitz operator whose symbol is $h$ is bounded in certain weighted Sobolev spaces of functions holomorphic in the disk.

Брянский государственный университет
им. акад. И. Г. Петровского
ул. Бежицкая 14, 241036 Брянск, Россия
*E-mail*: shamoyanfa@yandex.ru

Поступило 5 мая 2011 г.