Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

Х. Хеденмальм, Н. А. Широков

КОНТРПРИМЕР КЕЛДЫША–ЛАВРЕНТЬЕВА И СРЕДНИЕ СТЕПЕНЕЙ ПРОИЗВОДНЫХ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ. 1. ПОСТРОЕНИЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

1. Введение

Пусть f – конформное отображение единичного круга $\mathbb{D}$ на ограниченную область. Положим

$$M_{f'}(r,t) = \int\limits_{|z|=r} \left|f^{'}(z)\right|^t |dz|. \tag{1}$$

В оценках величин $M_{f'}(r,t)$ при $r \to 1-0$ фактически учитывается возможное сложное граничное поведение отображения f, что вызывает активный интерес к их изучению. Если положить

$$B_f(t) = \inf\left\{b > 0 : M_{f'}(r,t) \le C_{b,t}(1-r)^{-b}, \frac{1}{2} \le r < 1\right\},$$
$$B(t) = \sup_f B_f(t),$$

то гипотеза Крэтцера [1] состоит в том, что при $|t| \le 2$ справедливо равенство $B(t) = \frac{1}{4}t^2$. В частности, $B(-2) = 1$.

Если предположить, что функция f достаточно гладкая и в окрестности точки ξ_0, $|\xi_0| = 1$, то при $t < 0$ наибольший вклад в интеграл в (1) получается при $f_0^{'}(z) \sim C\,(z-\xi_0)$ в окрестности точки ξ_0, что эквивалентно тому, что функция f_0 отображает дугу единичной окружности $\mathbb{T}$ на некоторый “пик”, имеющий в окрестности точки $f_0\,(\xi_0)$ внутренний по отношению к $f_0(\mathbb{D})$ угол, равный 2π.

Представляет интерес в этой связи рассмотреть оценки величины $M_{f'}(r,t)$ для функций f, отображающих $\mathbb{D}$ на область, имеющую бесконечно много пиков на границе с внутренними углами, равными 2π.

Ключевые слова: конформное отображение, пример Келдыша–Лаврентьева.
Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 11-01-00526.

Одна из возможных идей для построения подобных конформных отображений содержится в примере Келдыша и Лаврентьева конформного отображения f, для которого $f^{'}$ – сингулярная функция в круге $\mathbb{D}$ (см. [2, гл. 3, §13, 14]).

Мы будем использовать их подход, модифицируя конструкцию в соответствии с намерением максимизировать $M_{f'(r,t)}$. В настоящей заметке мы опишем построение отображения f; оценки величины $M_{f'(r,t)}$ будут опубликованы отдельно.

Ключевую роль в нашем построении играет следующая лемма. Разделим единичную окружность $\mathbb{T}$ на n равных дуг $I_1, \ldots, I_n$, $n \geq 8$, и пусть ξ_{j1} и ξ_{j2} – концы дуги I_j. Пусть числа α_j, $0 \leq \alpha_j \leq \frac{1}{2}$, выбраны произвольно. Нам также понадобятся дуги окружностей J_j с теми же концами, что и дуги I_j. Дуги J_j не обязательно являются дугами единичной окружности и содержатся во внешности открытого единичного круга. Для полной определенности достаточно задать углы между I_j и J_j, которые полагаем равными $\pi\alpha_j$, где $0 < \alpha_j \leq \frac{1}{2}$. При $\alpha_j = 0$ полагаем $J_j = I_j$. Пусть D – область, содержащая $\mathbb{D}$ и ограниченная дугами $J_1, \ldots, J_n$, функция g конформно отображает D на $\mathbb{D}$ так, что $g(0) = 0$. Для множества A, лежащего на окружности $\mathbb{T}$, через $|A|_s$ обозначим его меру.

Лемма. *Существуют абсолютные постоянные C_1 и $C_2 > 0$, не зависящие от n и выбора α_j, такие, что*

$$C_1 \cdot \frac{2\pi}{n} \leq |g\left(J_k\right)|_s \leq C_2 \cdot \frac{2\pi}{n} \tag{2}$$

(в нашем доказательстве, которое приведём позже, мы получим $C_1 = \frac{1}{9}$, $C_2 = 4$).

2. Построение

Будем строить по индукции области D_1, $D_2, \ldots, G_1, G_2, \ldots$ и конформные отображения круга $\mathbb{D}$ на эти области. Сразу подчеркнем, что области D_n будут ограничены дугами окружностей, $D_n \supset \mathbb{D}$, функции h_n будут конформно отображать круг $\mathbb{D}$ на области D_n так, что $h_n(0) = 0$, $h'_n(0) > 0$ и окажется возможным корректно определить во всем единичном круге $\mathbb{D}$ функции $f_n(z) = h_1 \circ h_2 \circ \ldots \circ h_n(z)$, которые отображают $\mathbb{D}$ на области G_n. При определении этой суперпозиции приходится систематически использовать аналитическое продолжение функции через дугу окружности, если эта дуга отображается данной функцией на дугу другой окружности.

Положим $N_1 = 8$, N_n – натуральные и таковы, что $N_n \geqslant C_\varepsilon N_{n-1}^{1+\varepsilon}$, где число $\varepsilon > 0$ произвольное; при этом постоянная C_ε должна быть выбрана достаточно большой, чтобы нижеследующие конструкции можно было провести. Через E_{N_n} обозначим корни степени N_n из 1, $\mathrm{Arc}(n)$ – множество всех замкнутых дуг окружности $\mathbb{T}$ длины $\frac{2\pi}{N_n}$ с концами в точках E_{N_n}. Будем определять также множества $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ и $S_n = S_n^{(1)} \cup S_n^{(2)}$. Начнем с $n = 1$. Для каждой дуги $I \in \mathrm{Arc}(1)$ пусть $\alpha(I) = \frac{1}{2}$, $S_1^{(1)} = \varnothing$, $S_1^{(2)} = E_8$, область D_1 построена для указанных значений $\alpha(I)$, как это было сделано перед леммой. На этом начальном этапе $h_1(E_8) = E_8$. При $n \geqslant 2$ множество $S_n^{(2)}$ состоит из каких-то точек множества E_{N_n}.

Область D_2 построена следующим образом: пусть

$$\delta_2 = \left(2\left[100\left(\frac{N_2}{N_1}\right)^{2/3}\right] + 2\right)\frac{2\pi}{N_2},$$

квадратными скобками обозначена целая часть, для $\xi_j \in E_8$ через $\widetilde{I}_{\xi_j}$ обозначим дугу длины δ_2, середина которой совпадает с точкой ξ_j. Ясно, что $\widetilde{I}_{\xi_j}$ является объединением дуг из $\mathrm{Arc}(2)$. Положим $S_2^{(1)} = \cup_{j=1}^{8} \widetilde{I}_{\xi_j}$, $S_2^{(2)} = E_{N_2} \setminus S_2^{(1)}$, и пусть для $I_j \in \mathrm{Arc}(2)$ выполнены соотношения $\alpha(I_j) = 0$, если $I_j \subset S_2^{(1)}$, и $\alpha(I_j) = \frac{1}{2}$, если $I_j \subset \mathbb{T} \setminus S_2^{(1)}$. Для дуг I_j построим дуги J_j с теми же концами, используя значения $\alpha(I_j)$, как это было сделано перед формулировкой леммы, и пусть D_2 – область, ограниченная дугами J_j и содержащая 0. Пусть функция h_2 отображает $\mathbb{D}$ конформно на D_2 так, что $h_2(0) = 0$, $h_2'(0) > 0$. В таком случае $h_2^{-1}(S_1) = h_2^{-1}(S_1^{(2)}) = h_2^{-1}(E_8) \subset S_2^{(1)}$. Предположим, что области $D_1, D_2, \ldots, D_n$ уже построены, множества $S_1, S_2, \ldots, S_n$ указаны, $S_n = S_n^{(1)} \cup S_n^{(2)}$, множество $S_n^{(1)}$ состоит из конечных объединений дуг из $\mathrm{Arc}(n)$, $S_n^{(2)} = (\mathbb{T} \setminus S_n^{(1)}) \cap E_{N_n}$. Положим

$$\delta_{n+1} = \left(2\left[100\left(\frac{N_{n+1}}{N_n}\right)^{2/3}\right] + 2\right)\frac{2\pi}{N_{n+1}}$$

и к каждой дуге I, составляющей множество $S_n^{(1)}$, с каждой стороны присоединим дуги $I_\pm$ такие, что $\delta_{n+1} - \frac{2\pi}{N_{n+1}} < |I_\pm|_s \leqslant \delta_{n+1}$ и дуга $\widetilde{I}_I \stackrel{\text{def}}{=} I \cup I_+ \cup I_-$ состоит из объединения дуг из $\mathrm{Arc}\,(n+1)$. Для любой точки $\xi_j \in S_n^{(2)}$ через $\widetilde{I}_{\xi_j}$ обозначим дугу длины δ_{n+1}, состоящую из объединения дуг из $\mathrm{Arc}\,(n+1)$, расстояние от середины которой до точки ξ_j меньше $\frac{2\pi}{N_{n+1}}$ (или любую из них). Теперь полагаем $S_{n+1}^{(1)} = \cup_{I \subset S_n^{(1)}} \widetilde{I}_I \cup \cup_{\xi_j \in S_n^{(2)}} \widetilde{I}_{\xi_j}$, $S_{n+1}^{(2)} = E^{N_{n+1}} \setminus S_{n+1}^{(1)}$. Пусть $\alpha(I_j) = 0$, если $I_j \in \mathrm{Arc}(n+1)$, $I_j \subset S_{n+1}^{(1)}$, $\alpha(I_j) = \frac{1}{2}$, если $I_j \in \mathrm{Arc}(n+1)$, $I_j \not\subset S_{n+1}^{(1)}$, область D_{n+1} построена по параметрам $\alpha(I_j)$, функция h_{n+1} конформно отображает $\mathbb{D}$ на D_{n+1}. Выбор множеств $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$ и параметров δ_n влечет следующий важный результат.

Утверждение 0. *Справедливо включение* $h_{n+1}^{-1}(S_n) \subset S_{n+1}^{(1)}$.

Теперь определим основной объект данной работы – отображение $f(z)$.

Утверждение 1. *При выборе достаточно большого* C_ε *при* $n = 1, 2, \ldots$ *для* $z \in \mathbb{D}$ *определено конформное отображение*

$$f_n(z) = h_1 \circ h_2 \circ \ldots \circ h_n(z), \tag{3}$$

которое отображает $\mathbb{D}$ *на некоторую область* G_n.

Утверждение 2. *Для всякого* $z \in \mathbb{D}$ *существвет*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z). \tag{4}$$

Функция f *конформно отображает* $\mathbb{D}$ *на некоторую область* G, *граница которой содержит бесконечное количество пиков с внутренними по отношению к* G *углами, равными* 2π.

Утверждение 3. *Для всяких* $n \geq 1$ *и* $k \geq 1$ *определено отображение круга* $\mathbb{D}$, *задаваемое соотношением*

$$\varphi_{n,k}(z) = h_n \circ h_{n+1} \circ \ldots \circ h_{n+k}(z) \tag{5}$$

и для всякого $z \in \mathbb{D}$ *и* $n \geq 1$ *существует*

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{n,k}(z) = \varphi_n(z); \tag{6}$$

φ_n *– функция, которая отображает* $\mathbb{D}$ *на некоторую область* Ω_n.

При доказательстве соотношений (3)–(6) применяется аналитическое продолжение функций, переводящих дугу окружности в дугу окружности, и оценки леммы.

Литература

1. D. Kraetzer, *Experimental bound for the universal integral means spectrum of conformal maps.* — Compl. Variabl. Theory Appl. **31** (1996), 305–309.
2. И. И. Привалов, *Граничные свойства аналитических функций.* ГИТТЛ, М.-Л., 1950.

Hedenmalm H., Shirokov N. A. Keldysh–Lavrentiev counterexample and means of powers of conformal mapping. 1. Construction of a mapping.

We construct a region with infinitely many cusps on its boundary such that it is possible to estimate the derivative of a conformal mapping of the unit disk onto this region from below. We use here some ideas taken from a construction of a famous Keldysh–Lavrentiev example.

Department of Mathematics, The Royal Institute of Technology,
SE-10044 Stockholm, Sweden

E-mail: haakanh@math.kth.se

Поступило 1 июня 2011 г.

С.-Петербургский государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия

E-mail: nikolai.shirokov@gmail.com