Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

Д. М. Столяров

НОВЫЕ ТЕОРЕМЫ ОБ ИСПРАВЛЕНИИ В СВЕТЕ ВЕСОВОГО НЕРАВЕНСТВА ЛИТЛВУДА–ПЭЛИ–РУБИО ДЕ ФРАНСИА

§1. Введение

Теоремы об исправлении утверждают, что произвольную ограниченную измеримую функцию на пространстве с мерой можно изменить на сколь угодно малом множестве, чтобы ее свойства в каком-то смысле улучшились. По-видимому, первой и самой известной теоремой этого типа является классическая теорема Лузина об исправлении функции до непрерывной. Следующим шагом стала теорема Д. Е. Меньшова [11] об исправлении функции на множестве меры не более ε до функции, чьи частичные суммы ряда Фурье равномерно не превосходят $\frac{C}{\varepsilon}$, а ряд Фурье этой функции равномерно сходится. В 1979 г. С. В. Кисляков в [10] улучшил оценку частичных сумм до $C\log\frac{1}{\varepsilon}$, разработав общий метод получения теорем об исправлении. В работе [5] этот результат был усилен.

Нашим основным пространством с мерой будет окружность с некоторым весом $a(x)$, $x \in \mathbb{T}$. Аналогичные результаты можно получить и для прямой, потребуется лишь некоторое изменение технических деталей. Перейдем к точной формулировке, для этого нам понадобится несколько определений.

1.1. Определения. Во-первых, важную роль будут играть условия Макенхаупта $A_p, 1 \leq p \leq \infty$. Для веса w и числа p, $1 < p < \infty$, это условие выглядит следующим образом:

$$A_p : \sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w\right)\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1} < \infty. \qquad (1)$$

Супремум берется по всем дугам окружности.

Ключевые слова: квадратичная функция, теорема об исправлении, условия Макенхаупта.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ 11.G34.31.0026 (Лаборатория им. П. Л. Чебышева при СПбГУ).

При $p = 1$ это условие превратится в $Mw \leq Cw$, где M – максимальная функция Харди–Литлвуда. Также, про любой вес, удовлетворяющий условию A_p хотя бы при одном p, будем говорить, что он удовлетворяет условию A_∞. Подробное изложение теории весов, удовлетворяющих этим условиям, можно найти в книге [1]. Еще нам понадобится несколько измененное условие, α_p, $1 \leq p \leq 2$, которое было введено в работе [2]. Для веса w и $1 < p < 2$ оно выглядит следующим образом:

$$\alpha_p : \sup_I \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{-\frac{1}{p-1}}\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{\frac{2}{2-p}}\right)^{\frac{2-p}{2}} < \infty. \tag{2}$$

Супремум берется по всем дугам окружности. Нетрудно видеть, что (2) в точности означает, что $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{\frac{p'}{2}}$, или, что то же самое, $w^{\frac{2}{2-p}} \in A_{\frac{p}{2-p}}$, где p' – сопряженный с p показатель. Мы позволили себе вольность, употребляя одинаковый символ для условия на вес и для класса весов, удовлетворяющих этому условию; так же будем поступать и в дальнейшем. Предельным переходом можно распространить условие α_p и на граничные показатели 1 и 2, для них оно будут выглядеть следующим образом:

$$\alpha_1 : w^2 \in A_1; \quad \alpha_2 : w^{-1} \in A_1. \tag{3}$$

Сразу же заметим, что из условия α_p следует условие A_p. Действительно, если $w \in \alpha_p$, то $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{\frac{p'}{2}}$, откуда, пользуясь возрастанием классов Макенхаупта, $w^{-\frac{1}{p-1}} \in A_{p'}$, что равносильно включению $w \in A_p$. Случай $p = 1$ можно получить, пользуясь неравенством Коши–Буняковского–Шварца.

Во-вторых, нам понадобится понятие квадратичной функции σ. Пусть Δ_j, $j \in \mathbb{N}$, – семейство непересекающихся отрезков в $\mathbb{Z}$. Для каждого интервала введем соответствующий мультипликатор Фурье M_{Δ_k} посредством следующей формулы:

$$M_{\Delta_k}(f) = \big(\chi_{\Delta_k}(\xi)\widehat{f}(\xi)\big)\check{}. \tag{4}$$

Формула осмыслена, даже если f – распределение, и уж во всяком случае, если $f \in L^1(\mathbb{T})$. Сформируем теперь квадратичную функцию:

$$\sigma f(x) = \left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |(M_{\Delta_k}f)(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{5}$$

В основополагающей работе [3] было доказано, что $\|\sigma f\|_{L^p(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)}$ для $w \in A_{\frac{p}{2}}$ при $2 < p < \infty$. Мы же будем пользоваться, в основном, результатом работы [2], который, в некотором смысле, обслуживает двойственную предыдущей ситуацию и выглядит следующим образом:

Пусть $1 < p < 2$, $0 < r < p$ *и* $w \in \alpha_p$, f_k *– последовательность суммируемых функций, таких что* $\operatorname{supp} \widehat{f_k} \subset \Delta_k$. *Тогда верно неравенство:*

$$\Big\| \sum_k f_k \Big\|_{L^r(w)} \leq B_r \Big\| \Big(\sum_k |f_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^r(w)},$$

где B_r *не зависит от* $\{f_k\}$, *а лишь от* r *и от оценки* α_p *для* w.

Эта теорема верна и при $p = 1$, $p = 2$, это следствия $1, 2$ из [2].

1.2. Формулировка основного результата. Теперь мы готовы сформулировать основной результат.

Теорема 1. *Пусть вес* a *удовлетворяет условию* A_∞, *вес* w *удовлетворяет условию* α_1. *Пусть* f *– измеримая функция, такая что* $|f| \leq w$. *Тогда для любого* ε, $0 < \varepsilon < 1$, *существует такая функция* g, *что* $|g| + |f - g| = |f|$ *и выполняются следующие неравенства:*

1) $\int\limits_{\{f \neq g\}} a \leq \varepsilon \int\limits_{\mathbb{T}} |\frac{f}{w}| a$

2) $\sigma g \leq C(a, w)(1 + |\log(\varepsilon)|) w$.

Заметим, что из условия $|g| + |f - g| = |f|$ следует, что исправление осуществляется посредством домножения исходной функции на некоторую вещественнозначную функцию ϕ, заключенную между нулем и единицей. Первое неравенство оценивает меру множества, на котором производилось исправление. Например, если подставить $w = a$, то мера этого множества будет оцениваться лебеговой L^1-нормой функции f. Второе неравенство дает поточечную оценку квадратичной функции в терминах веса w. Например, можно пытаться делать вес w малым (но все же отделенным от нуля, иначе нарушится условие α_1) на каком-то множестве. Более подробное обсуждение следствий будет в четвертом параграфе. Эта теорема очень похожа на теорему $2'$ из работы [4]. Она является, в некотором роде, ее обобщением, так как там фигурировали квадратичные функции лишь для специальных последовательностей интервалов, у нас же последовательность произвольна. Однако, за большую общность нам пришлось поплатиться условием на w, из A_1 оно превратилось в α_1, что, как мы знаем, сильнее. Также отметим, что в той работе во втором условии фигурировал квадрат логарифма, у нас же логарифм в первой степени.

Доказывать эту теорему мы будем при помощи общей схемы получения теорем об исправлении, изложенной в [5]. Для этого нам понадобится неравенство слабого типа $(1,1)$ для одного оператора, которое мы опишем в следующем пункте.

1.3. Формулировка неравенства. Если μ – мера, то через $L^p(l^2,\mu)$ мы будем обозначать пространство l^2-значных функций, суммируемых с p-ой степенью по мере μ. Рассмотрим оператор T, заданный на конечных последовательностях тригонометрических полиномов следующей формулой:

$$T(\{f_j\}) = \sum_j M_{\Delta_j} f_j. \tag{6}$$

Мы будем изучать его окаймление посредством функции u, а именно, оператор T_u, действующий по формуле:

$$T_u(\{f_j\}) = u^{-1} T(\{u f_j\}). \tag{7}$$

Теперь мы готовы сформулировать второй результат этой работы.

Теорема 2. *Пусть вес a удовлетворяет классическому условию A_∞, вес w – условию α_1 из первого пункта. Пусть $u = \frac{a}{w}$. Тогда оператор T_u, заданный при помощи формул* (6), (7), *непрерывен из $L^1(l^2,a)$ в $L^{1,\infty}(a)$.*

На самом деле, формулировка не совсем корректна, так как мы задавали оператор T на тригонометрических полиномах, а теперь подставляем в него какие-то другие функции. Однако, как обычно в таких случаях бывает, из доказательства станет ясно, что все корректно. Эта теорема очень похожа на теорему 4 из [4], однако, в той теореме вместо оператора T фигурировал сингулярный интегральный оператор. T таковым не является, хотя и получается перемножением из сингулярных интегральных операторов с не совсем стандартными условиями на гладкость ядра. Конечно же, свойство слабого типа $(1,1)$ при перемножении могло бы и потеряться, однако этого не происходит.

Возможно, стоит пояснить, что такое умножение и деление на u. Это просто изометрия между пространствами $L^1(a)$ и $L^1(w)$, как обычными, так и l^2-значными. Однако, для $L^{1,\infty}$ это, естественно, не изометрия.

Перед тем как начать доказывать наши утверждения, стоит сделать две оговорки. Во-первых, в доказательстве второй теоремы мы будем всюду считать, что последовательности функций у нас конечны. Это позволит обойти многие вопросы сходимости. Общий же случай получается предельным переходом. Во-вторых, мы будем считать, что все отрезки Δ_k содержатся в $\mathbb{Z}_+$, что позволит формулировать теорему в терминах аналитических классов Харди H^p_A. Общий случай получается сложением операторов, построенных для множеств отрезков, лежащих в $\mathbb{Z}_+$ и в $\mathbb{Z}_-$. Если же какой-то отрезок содержит ноль, то его можно рассмотреть отдельно и потом прибавить ко всему остальному.

Как было сказано выше, нам понадобятся классы Харди. Вообще, непрерывность описанных выше операторов связана скорее с ними, чем со свойствами пространств Лебега. Стоит пояснить наши обозначения. Через $H^p_A(l^2, a)$ мы обозначаем аналитический класс Харди, то есть, класс l^2-значных аналитических функций из класса Смирнова в круге, граничные значения которых суммируемы со степенью p по мере $a(x)\,dx$, $x \in \mathbb{T}$. Мы часто будем отождествлять функции из таких классов с их граничными значениями. Также у нас часто будут фигурировать классы $H^{1,\infty}_A(l^2, a)$, мы понимаем их как замыкание множества конечных последовательностей аналитических тригонометрических полиномов в $L^{1,\infty}(l^2, a)$. Это не совсем стандартное определение, обычно $H^{1,\infty}_A(l^2, a)$ тоже определяется как пересечение пространства $L^{1,\infty}(l^2, a)$ с классом Смирнова. Для L^p-нормы эти опредления эквивалентны при $p \geq 1$, однако, для $L^{1,\infty}$-квазинормы эквивалентности может и не быть. Для наших целей более удобно определение через тригонометрические полиномы, его мы и будем придерживаться.

Мы будем использовать некоторую интерполяционную технику при доказательстве второй теоремы. По поводу общей теории интерполяции см. [8]; нам также понадобится понятие K-замкнутости и его связь с интерполяцией. Пусть (X_0, X_1) – пара совместимых квазибанаховых пространств и пусть Y_0 и Y_1 — замкнутые подпространства пространств X_0 и X_1 соответсвенно. Пара (Y_0, Y_1) называется K-замкнутой в (X_0, X_1), если для любого $y \in Y_0 + Y_1$ и любого представления $y = x_0 + x_1$, $x_i \in X_i$ $(i = 0, 1)$ существует другое представление

$y = y_1 + y_2$, где $y_i \in Y_i$ и выполнены неравенства $||y_i||_{Y_i} \le C||x_i||_{X_i}$. Нетрудно видеть, что если пара (Y_0, Y_1) K-замкнута в (X_0, X_1), то

$$(Y_0, Y_1)_{\theta,q} = (Y_1 + Y_2) \cap (X_0, X_1)_{\theta,q}.$$

См. [7] по поводу понятия K-замкнутости и его роли в интерполяции пространств Харди.

Сначала мы докажем теорему 2, потом выведем из нее теорему 1, после чего обсудим, что же это все значит. Приступим к доказательству.

§2. Доказательство второй теоремы

Наше доказательство будет в общих чертах следовать работе [6]. А именно, мы представим наш окаймленный оператор как произведение конечного числа окаймлений сингулярных интегральных операторов. Доказательству предпошлем лемму, которая не относится к окаймленным операторам, однако, играет важную роль в дальнейшем.

2.1. Лемма о смешивании весов.

Лемма 1. *Пусть $w \in \alpha_q$, $a \in A_\infty$, $1 < q < 2$. Тогда существует δ, $0 < \delta < 1$, такое что для всех t из отрезка $[1-\delta, 1)$ существует r из $(1,2)$, такое что вес $w^t a^{1-t}$ удовлетворяет условию α_r.*

Доказательство. Мы хотим ограничить следующую величину:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{-\frac{t}{r-1}} a^{\frac{t-1}{r-1}}\right)^{r-1} \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{\frac{2t}{2-r}} a^{\frac{2-2t}{2-r}}\right)^{\frac{2-r}{2}}.$$

Так как $a \in A_\infty$, существует p, такое что $a \in A_p$. Тогда, благодаря факторизационной теореме Джонса (см. [1, глава 5]), существуют a_1, $a_2 \in A_1$, такие что $a = a_1 {a_2}^{1-p}$. Подставим новое выражение для

a и перепишем чуть-чуть по другому:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{1}{w^{\frac{t}{r-1}}}\frac{1}{a_1^{\frac{1-t}{r-1}}}a_2^{\frac{(1-t)(p-1)}{r-1}}\right)^{r-1}\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{\frac{2t}{2-r}}a_1^{\frac{2-2t}{2-r}}\frac{1}{a_2^{\frac{(2-2t)(p-1)}{2-r}}}\right)^{\frac{2-r}{2}}$$
$$\leq \frac{1}{\operatorname{essinf}_I a_1{}^{1-t}}\frac{1}{\operatorname{essinf}_I a_2{}^{(p-1)(1-t)}}\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{a_2^{\frac{(p-1)(1-t)}{r-1}}}{w^{\frac{t}{r-1}}}\right)^{r-1}$$
$$\times\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{\frac{2t}{2-r}}a_1^{\frac{2-2t}{2-r}}\right)^{\frac{2-r}{2}}.$$

Оценим отдельно каждый из оставшихся интегралов. В первом применим обычное неравенство Гёльдера с показателями $\frac{r-1}{(1-t)(p-1)}$, $\frac{r-1}{r-1-(1-t)(p-1)}$:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{a_2^{\frac{(p-1)(1-t)}{r-1}}}{w^{\frac{t}{r-1}}}\right)^{r-1}$$
$$\leq \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I a_2\right)^{(1-t)(p-1)}\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{1}{w^{\frac{t}{r-1-(1-t)(p-1)}}}\right)^{r-1-(1-t)(p-1)}.$$

Чтобы здесь все было корректно, надо, чтобы $\frac{r-1}{(1-t)(p-1)} \geq 1$. Запомним это условие. Теперь применим неравенство Гёльдера с показателями $\frac{2-r}{2-2t}$, $\frac{2-r}{2t-r}$ ко второму интегралу:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{\frac{2t}{2-r}}a_1^{\frac{2-2t}{2-r}}\right)^{\frac{2-r}{2}} \leq \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{\frac{2t}{2t-r}}\right)^{\frac{2t-r}{2}}\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I a_1\right)^{1-t}.$$

Чтобы эта оценка была справедлива, надо, чтобы $\frac{2-r}{2-2t} \geq 1$.

Итого, мы видим, что участие весов a_1 и a_2 в формуле оценилось их A_1-постоянными в степенях $1-t$ и $(p-1)(1-t)$ соответственно. Осталось оценить величину:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{1}{w^{\frac{t}{r-1-(1-t)(p-1)}}}\right)^{r-1-(1-t)(p-1)}\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{\frac{2t}{2t-r}}\right)^{\frac{2t-r}{2}}.$$

Принудительно положим $r = tq$. При t, достаточно близких к единице, эта величина тоже лежит в $(1,2)$, стало быть, такое действие правомерно. Тогда все перепишется в виде:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{1}{w^{\frac{t}{tq-1-(1-t)(p-1)}}}\right)^{tq-1-(1-t)(p-1)} \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{\frac{2}{2-q}}\right)^{\frac{2-q}{2}t}.$$

Заметим, что так как $w \in \alpha_q$, можно заключить, что $w^{-\frac{1}{q-1}} \in A_{\frac{q'}{2}}$. Стало быть, вес $w^{\frac{1}{q-1}}$ удовлетворяет обратному неравенству Гёльдера для некоторого s. Заметим, что $\lim\limits_{t\to 1} \frac{t}{tq-1-(1-t)(p-1)} = \frac{1}{q-1}$. Также нетрудно видеть, что это выражение больше, чем $\frac{1}{q-1}$. Стало быть, при всех $t < 1$ в некоторой окрестности точки 1 можно написать оценку:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I \frac{1}{w^{\frac{t}{tq-1-(1-t)(p-1)}}}\right)^{tq-1-(1-t)(p-1)} \leq c\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{\frac{-1}{q-1}}\right)^{t(q-1)}.$$

В итоге, после подстановки этой оценки в предыдущую, получим в точности условие α_q для w, возведенное в степень t. Нам надо еще проверить два неравенства, которые мы запомнили. Во-первых, число $\frac{r-1}{(1-t)(p-1)} = \frac{tq-1}{(1-t)(p-1)}$ должно быть больше единицы. При $t \to 1$ это выражение стремится к бесконечности и стало быть, когда-нибудь станет больше единицы. Во-вторых, больше единицы должно быть и число $\frac{2-r}{2-2t} = \frac{2-tq}{2-2t}$. Это выражение тоже стремится к бесконечности, значит, рано или поздно требуемое неравенство будет выполнено. Лемма доказана. □

Теперь сформулируем лемму 2. Она почти идентична по формулировке лемме 1, доказательство тоже отличается лишь тем, что в конце надо воспользоваться обратным неравенством Гёльдера для другого множителя. Поэтому мы не будем его приводить.

Лемма 2. *Пусть $w \in \alpha_q$, $a \in A_\infty$, $1 < q < 2$. Тогда существует δ, $0 < \delta < 1$, такое что для всех t из отрезка $(1, 1+\delta]$ существует $r \in (t, 2)$, такое что вес $w^t a^{1-t}$ удовлетворяет условию α_r.*

Стоит отметить, что из доказательства леммы 1 видно, что при t, очень близких к единице, вес $w^t a^{1-t}$ удовлетворяет условию α_{tq}, то же самое получится и в лемме 2.

Следствие 1. *Леммы остаются верными и при* $q = 1$.

Действительно, если вес w удовлетворяет условию α_1, то он удовлетворяет и некоторому условию $\alpha_{1+\delta}$ с некоторым $\delta > 0$. Это можно пояснить так: $w \in \alpha_1$, следовательно, $w^2 \in A_1$, далее, по обратному неравенству Гёльдера, $w^{2+\varepsilon} \in A_1$, после чего, по возрастанию классов Макенхаупта, $w^{2+\varepsilon} \in A_{1+\varepsilon}$. Но это в точности означает, что $w \in \alpha_{2-\frac{2}{2+\varepsilon}}$. Стало быть, к w можно применить лемму напрямик.

2.2. Вспомогательные операторы. Сейчас мы опишем два оператора, S и R, которые пришли из работы [6], оттуда же они попали и в [2]. Начнем с оператора S. При определении этого оператора мы считаем, что длины всех отрезков Δ_j – степени двойки (однако, они могут повторяться). Через B_k мы обозначим множество тех j, длина которых равна 2^k. Пусть $\xi \in (0,1)$ – некоторое число, у нас оно будет близким к единице, ϕ_k – тригонометрические полиномы на окружности, удовлетворяющие следующим условиям из [6] (в той работе это, соответственно, условия (6), (7)):

$$\widehat{\phi_m}(n) = 0 \quad \text{при} \quad n \notin [0, 2^m]; \qquad |\widehat{\phi_m}(n)| \leq 1; \tag{8}$$

$$|(\phi_m)^{(r)}(e^{i\sigma})| \leq C_{r,u} 2^{(r+1-u)m} \sigma^{-u}$$
$$\text{при} \quad \sigma \in [-\pi, \pi], \quad u > 1, \quad r \in \mathbb{Z}_+. \tag{9}$$

Дифференцирование осуществляется по σ. Также на полиномы ϕ_m можно наложить дополнительное условие $\widehat{\phi_m} = 1$ на $[(1-\xi)2^{m-1}, (1+\xi)2^{m-1}]$. В работе [6] подробно обсуждалось построение таких полиномов. Пусть $\{h_j\} \in H^p_A(l^2, w)$, тогда определим

$$S(h)(x) = \sum_k \sum_{j \in B_k} e^{i a_j x} (h_j * \phi_k)(x). \tag{10}$$

Здесь a_j – левый конец отрезка Δ_j. Свертка корректно определена, так как функция ϕ_k лежит в классе Шварца и ее преобразование Фурье имеет конечный носитель, кроме того, напомним, что мы по договоренности считаем множество наших отрезков конечным, поэтому и сумма конечна. Заметим, что можно считать, что $p \neq 1$, так как, как говорилось выше, если $w \in \alpha_1$, то $w \in \alpha_{1+\varepsilon}$. Тогда для всех p, по лемме 2 из [2], S непрерывен из $H^r_A(l^2, w)$ в $L^r(w)$ при $0 < r < p$ (в [2] рассуждения велись на прямой, но для окружности все делается точно так же).

Оператор R определяется при помощи некоторого семейства тригонометрических полиномов, а именно, пусть A – некоторое число, большее единицы. Тогда существуют тригонометрические полиномы β_j, $j > 0$, такие, что выполнены два условия:

$$\widehat{\beta}_j \geq 0, \quad \sum_j \widehat{\beta}_j = \chi_{\mathbb{Z}\setminus\{0\}}, \quad \operatorname{spec}\beta_j \subset [A^{j-1}, A^{j+1}], \tag{11}$$

$$\forall r \in \mathbb{R}_+ \quad R \in \mathfrak{L}(H^r(l^2, w) \to H^r(l^2, w)), \quad R(\{f_k\}_k) = \{f_k * \beta_j\}_{k,j}. \tag{12}$$

На самом деле, в такой формулировке (но без веса, то есть $w = 1$), это утверждение было в работе [6] под именем леммы 1, в [2] его вид был немного изменен ввиду того, что рассуждения велись на прямой, там оно фигурировало как лемма 3. В [2] r уже было не любым, а лишь от нуля до p, если $w \in \alpha_p$.

Однако, в этой работе мы будем иметь дело не с самими операторами S и R, а с их окаймлениями S_u и R_u, следовательно, нам хочется установить и их непрерывность. Ничего нового придумывать нам не придется, работает обычная замена плотности. Но для получения непрерывности на пространствах Лоренца мы будем интерполировать в шкале немного необычных пространств.

2.3. Непрерывность окаймлений. Заметим, что если $u = \frac{a}{w}$, то $f \leftrightarrow uf$ – изометрическая биекция между пространствами $L^t(a)$ и $L^t(w^t a^{1-t})$ и между пространствами $L^t(l^2, a)$ и $L^t(l^2, w^t a^{1-t})$ (t может быть и меньше единицы). Введем два вспомогательных пространства

$$E_u^t(l^2) = u^{-1} H_A^t(l^2, w^t a^{1-t}) \ \text{ и } \ E_u^t = u^{-1} H_A^t(w^t a^{1-t}).$$

Нетрудно видеть, что E_u^t и $E_u^t(l^2)$ – подпространства в $L^t(a)$ и $L^t(l^2, a)$ соответственно. Пространство $E_u^{1,\infty}$ определяется как замыкание в $L_{1,\infty}(a)$ аналитических полиномов, поделенных на u. Операторы S_u, R_u, заданные как в формуле (7), если T заменить на S и R, соответственно, естественно, имеют плотную область определения в $E_u^t(l^2)$ (состоящую из тригонометрических полиномов, разделенных на u).

Лемма 3. *Операторы S_u и R_u непрерывны из $E_u^{1,\infty}(l^2)$ в $E_u^{1,\infty}$ и $E_u^{1,\infty}(l^2)$, соответственно.*

Доказательство. Докажем, что операторы S_u и R_u непрерывны из $E_u^t(l^2)$ в E_u^t и $E_u^t(l^2)$ соответственно, при t, меньших единицы, но лежащих в некоторой ее окрестности. Заметим, что по определению пространств $E_u^t(l^2)$ достаточно доказать непрерывность S и R на пространствах $H_A^t(l^2, w^t a^{1-t})$. Но, по лемме 1, $w^t a^{1-t} \in \alpha_r$ для некоторого $r \in (1,2)$. Стало быть, мы очутились в условиях лемм 2, 3 из [2].

При t, больших единицы, но лежащих в некоторой ее окрестности, операторы S_u и R_u тоже непрерывны из $E_u^t(l^2)$ в E_u^t и $E_u^t(l^2)$ соответственно, по аналогичным причинам, только вместо леммы 1 надо использовать лемму 2.

Осталось проинтерполировать наш результат на случай "$t=(1,\infty)$". Для этого заметим, что пара $(E_u^t(l^2), E_u^s(l^2))$ K-замкнута в $(L^t(l^2,a), L^s(l^2,a))$ при t, s, достаточно близких к единице. Действительно, у нас есть изометрия, которая отправляет $(E_u^t(l^2), E_u^s(l^2))$ в $(H_A^t(l^2, w^t a^{1-t}), H_A^s(l^2, w^s a^{1-s}))$. Тогда нам достаточно доказать K-замкнутость соответствующей пары в $(L^t(l^2, w^t a^{1-t}), L^s(l^2, w^s a^{1-s}))$. Воспользуемся теоремой 3.3 из [7]. Для этого достаточно проверить, что $L^t(l^2, w^t a^{1-t}), L^s(l^2, w^s a^{1-s})$ – BMO-регулярные решетки, что верно, если $\log(w^t a^{1-t}) \in BMO$, $\log(w^s a^{1-s}) \in BMO$ по следствию 3.1 из той же работы. Но эти веса удовлетворяют условию α_r для некоторого r по леммам 1, 2, стало быть, удовлетворяют условию A_r, а логарифм таких весов всегда в BMO. Для скалярно-значных пространств все получается абсолютно аналогичным образом.

Из K-замкнутости следует, что

$$(E_u^t(l^2), E_u^s(l^2))_{\theta,\infty} = (E_u^t(l^2)+E_u^s(l^2)) \cap L^{1,\infty}(l^2,a) = u^{-1}N^+ \cap L^{1,\infty}(l^2,a)$$

при $\frac{1}{1} = \frac{\theta}{t} + \frac{\theta}{s}$ (N^+ – класс Смирнова, последнее равенство пространств получается, если пройти всю процедуру доказательства K-замкнутости из [7]). Но последнее пространство уж точно содержит $E_u^{1,\infty}(l^2)$ как замкнутое подпространство. Аналогично и для скалярно-значных функций. Значит, операторы S_u, R_u непрерывны на своей области определения, как операторы из $E_u^{1,\infty}(l^2)$ в $E_u^{1,\infty}(l^2)$ и $E_u^{1,\infty}$ соответственно, стало быть, их можно продолжить по непрерывности на эти пространства, и лемма доказана. □

2.4. Окончание доказательства. Для наглядности переформулируем теорему 2 в виде неравенства:

$$\Big\| \sum_k u^{-1} M_{\Delta_k}(u f_k) \Big\|_{L^{1,\infty}(a)} \leq C \Big\| \Big(\sum_k |f_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^1(a)}. \tag{13}$$

Заметим, что верно следующее неравенство:

$$\left\| u^{-1}\Big(\sum |M_{\Delta_k}(uf_k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{1,\infty}(a)} \le C\left\|\Big(\sum |f_k|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^1(a)}, \qquad (14)$$

которое в точности означает, что окаймление P_u проектора P, заданного формулой $P(\{f_k\}_k) = \{M_{\Delta_k} f_k\}_k$, непрерывно из $L^1(l^2, a)$ в $L^{1,\infty}(l^2, a)$. Действительно,

$$M_{\Delta_k} f_k = e^{2\pi i a_k \cdot} P_+(e^{-2\pi i a_k \cdot} f_k(\cdot)) - e^{2\pi i b_k \cdot} P_+(e^{-2\pi i b_k \cdot} f_k(\cdot)),$$

если $\Delta_k = [a_k, b_k - 1]$, а P_+ – проектор Рисса. Таким образом, мы представили $P = U_1^{-1} P_+ U_1 - U_2^{-1} P_+ U_2$, где U_1, U_2 – операторы умножения на некоторую унимодулярную функцию, то есть, унитарные операторы как в $L^1(l^2, a)$, так и в $L^{1,\infty}(l^2, a)$. Аналогичная формула имеет место и для окаймлений. Вспомним, что w из класса α_1 и, следовательно, из A_1. Тогда окаймление оператора P_+ непрерывно из $L^1(l^2, a)$ в $L^{1,\infty}(l^2, a)$ по теореме 4 из [4]. Но окаймления операторов U_1 и U_2 совпадают с ними, поэтому требуемая непрерывность наличиствует и для P_u, и неравенство (14) доказано.

Итого, нам осталось доказать, что

$$\left\| \sum u^{-1} M_{\Delta_k}(uf_k)\right\|_{L^{1,\infty}(a)} \le C\left\| u^{-1}\Big(\sum |M_{\Delta_k}(uf_k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{1,\infty}(a)}. \qquad (15)$$

Обозначив $g_k = u^{-1} M_{\Delta_k}(uf_k)$, получим, что нам надо доказать, что окаймление оператора $\{g_k\}_k \mapsto \sum\limits_k g_k$ действует из $E_u^{(1,\infty)}(l^2)$ в $E_u^{(1,\infty)}$ (напомню, что мы договорились, что все отрезки Δ_k содержатся в $\mathbb{Z}_+$) непрерывно. Оставшуюся часть доказательства мы будем выражать этот оператор через композиции операторов вида R и S для разных последовательностей интервалов. Тогда окаймление рассматриваемого оператора выразится через окаймления операторов вида R и S и будет непрерывно. На самом деле, эта процедура была подробно описана как в [6], так и в [2]. Продублируем ее здесь для полноты.

Сначала мы измельчим интервалы, чтобы добиться их более регулярного взаимного расположения. Для этого сдвинем все наши функции f_j так, чтобы левый конец отрезка Δ_j попал в единицу, то есть рассмотрим функции $g_j(x) = e^{-i(a_j-1)x} f_j(x)$, где a_j – левый конец отрезка Δ_j. Применим оператор R с $A = 2^{\frac{1}{10}}$ к g и вернем все на место. В результате мы получим набор функций f_{jk} с более регулярным набором спектров, сохранив их сумму.

Рассмотрим теперь те j, для которых длина отрезка Δ_j не больше одиннадцати. Заметим, что для каждого такого отрезка отрезок $9\Delta_j$ пересекается не более чем с 99 другими отрезками изначального разбиения. Стало быть, множество таких j можно разбить на 100 подмножеств так, чтоб внутри каждого подмножества спектры функций f_j были хорошо разделены (то есть, чтобы отрезки $3\Delta_j$ и $3\Delta_{j'}$ не пересекались при $j \neq j'$, если j, j' лежат в одном подмножестве разбиения), после чего применить оператор S к последовательности, пронумерованной индексами из одного подмножества (точнее, оператор S будет применяться к $e^{-ia_jx}f_j(x)$) и получить кусочек суммы, образуемой этими функциями. В итоге, мы избавились от маленьких отрезков.

Теперь каждая из остальных функций f_j разбилась на несколько функций f_{jk}. Рассмотрим A_m, $m = [0, \dots, 9]$, $A_m = \{(j,k) | k \equiv_{10} m, f_{jk} \neq 0\}$. То есть, мы разбили наши функции на десять групп в соответствии с остатком от деления на 10 их номера среди тех, что получились при разбиении из одной функции. Заметим, что если выкинуть из рассмотрения те функции, которые имеют наибольшее и наибольшее за вычетом единицы k при данном j, то в каждой из оставшихся групп спектры функций хорошо разделены, так как и слева и справа от них есть хотя бы два отрезка из других групп (напомним, что в спектр функции f_{jk} может наползти на спектр функции $f_{j(k-1)}$, но никак не функции $f_{j(k-2)}$). Значит, мы можем применить оператор вида S к набору функций каждой из этих групп и получить кусочек суммы, образуемый этими функциями (опять же, мы будем применять оператор вида S к “сдвинутым в ноль” функциям). С оставшимися функциями можно опять проделать измельчения, только с другой стороны, то есть сдвинуть правые концы их спектров в -1, после чего применить оператор, аналогичный оператору R, только для антианалитических функций, и вернуть все обратно. Теперь проделаем ту же самую процедуру с разбиением на 10 групп, только тут уже можно будет не выкидывать последнюю и предпоследнюю функции, ведь наши отрезки первого разбиения были достаточно велики и, следовательно, разбились хотя бы на четыре отрезка. Значит, слева от предпоследнего и последнего отрезков что-то было, значит, и последние отрезки новых разбиений хорошо разделены. Следовательно, и их вклад в общую сумму можно записать через применение оператора S

для какой-то последовательности. Итак, искомое представление оператора $\{g_k\}_k \mapsto \sum\limits_k g_k$ осуществлено и теорема 2 доказана.

§3. Вывод первой теоремы из второй

Рассмотрим множество X тех ограниченных измеримых функций на окружности, что $w^{-1}\sigma(wf) \in L^\infty$. Введем в нем норму:

$$\|f\|_X = \operatorname{esssup}|f(\cdot)| \vee w^{-1}\left(\sum_k |M_{\Delta_k}(fw)|^2\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{16}$$

Нетрудно видеть, что X непусто. Действительно, A_1-вес отделен от нуля, стало быть, X содержит, например, все функции, получающиеся при делении тригонометрических полиномов на w. Основным пространством с мерой выберем $(\mathbb{T}, a(x)dx)$. Мы будем пользоваться следующей общей теоремой из [5] (мы несколько переформулировали ее, учитывая, что наше пространство имеет конечную меру).

Пусть для банахова пространства X суммируемых по мере μ функций выполнены следующие две аксиомы:

A1. *Естественное вложение X в $L^1(\mu)$ непрерывно и единичный шар простанства X слабо компактен в $L^1(\mu)$.*

A2. *Для любой $g \in L^\infty$ функционал Φ_g на X, определенный формулой $\Phi_g(h) = \int ghd\mu$, допускает следующую оценку:*

$$\|g\|_{L^{1,\infty}(\mu)} \le c\|\Phi_g\|_{X^*},$$

где константа не зависит от g.

Тогда для любой функции F, такой что $\|F\|_{L^\infty} \le 1$, и любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует такая функция G, что $|G| + |F - G| = |F|$, $\mu(F \ne G) \le \varepsilon$, $\|G\|_X \le C(1 + \log \varepsilon^{-1})$

Итого, нам надо проверить две аксиомы.

3.1. Проверка первой аксиомы. Прежде всего, полезно отметить, что на единичном шаре пространства L^∞ слабая топология $\sigma(L^\infty, L^1(a))$ (двойственность задается билинейной формой $\langle f, g\rangle = \int fga$) не зависит от положительного веса a. Пространство X вкладывается в L^∞, а стало быть, и в $L^1(a)$. Надо проверить, что шар пространства X компактен в слабой топологии пространства $L^1(a)$. Заметим, что слабая L^1-сходимость на шаре пространства L^∞ есть слабая* сходимость в L^∞, как двойственном к L^1; будем доказывать компактность в этой последней топологии. Также учтем, что X – некоторое подпространство в $(L^\infty \bigoplus L^\infty(l^2))_\infty$. Действительно, определим отображение вложения $\alpha : X \to (L^\infty \bigoplus L^\infty(l^2))_\infty$ посредством следующей формулы: $\alpha(h) = (h, \{w^{-1}M_{\Delta_k}(wh)\}_k)$. Стало быть, наш шар B_X стал образом шара αB_X при канонической проекции суммы $(L^\infty \bigoplus L^\infty(l^2))_\infty$ на первую координату. Таким образом, достаточно доказать, что множество αB_X компактно. Оно является подмножеством шара $(L^\infty \bigoplus L^\infty(l^2))_\infty$, но это пространство – сопряженное к $(L^1(a) \bigoplus L^1(l^2, a))_1$, его шар по теореме Алаоглу компактен, значит, нам достаточно проверить замкнутость множества αB_X как подмножества шара $(L^\infty \bigoplus L^\infty(l^2))_\infty$, а именно, если $f_n \to f$ слабо* в L^∞ и $\|f_n\|_X \leq 1$, то и $\|f\|_X \leq 1$, или, что то же самое, $\|\alpha f\|_{L^\infty(l_2)} \leq 1$. Заметим, что $\psi \mapsto M_{\Delta_k}(w\psi)$ – слабо* непрерывный оператор конечного ранга из L^∞ в себя, значения которого лежат в $C(\mathbb{T})$. Стало быть, $M_{\Delta_k}(wf_n) \to M_{\Delta_k}(wf)$ в $C(\mathbb{T})$, значит, для любого N верна оценка $w^{-1}(\sum\limits_{k=1}^{N} |M_{\Delta_k}(wf)|)^{\frac{1}{2}} \leq 1$. Переходя к пределу по N, получаем требуемое. Итак, первое условие мы проверили.

3.2. Проверка второй аксиомы. Нам надо доказать оценку

$$\|\Phi_g\|_{X^*} \geq c\|g\|_{L^{1,\infty}(a)}.$$

X – замкнутое (как образ при изометрии) подпространство в $(L^\infty \bigoplus L^\infty(l^2))_\infty$. Докажем, что функционал $\Phi = \Phi_g$ будет непрерывным в топологии, индуцированной на X как на подпространстве слабой* топологией пространства $(L^\infty \bigoplus L^\infty(l^2))_\infty$ как двойственного к $(L^1(a) \bigoplus L^1(l^2, a))_1$. Как мы выяснили в прошлом пункте, X само по себе замкнуто в этой топологии, так как его шар замкнут (например, можно сослаться на лемму Банаха, см. [9], прил. к гл. 5.4). Пусть $\{h_k\}$ – последовательность в X. Пусть она в указанном выше смысле сходится к некоторому элементу h. Тогда, используя сходимость по первой координате в $(L^\infty \bigoplus L^\infty(l^2))_\infty$, заключаем, что $h_k \to h$ слабо* в L^∞. Но так как $g \in L^\infty$, $g \in L^1(a)$, стало быть и $\int h_k ga \to \int hga$. Непрерывность доказана. Значит, функционал Φ на X может быть естественным образом отождествлен с элементом пространства $(L^1 \bigoplus L^1(l^2))_1 / \operatorname{Ann} X$, иными словами, можно выбрать представителя, на котором норма почти достигается, а именно такой функционал

$\tilde{\Phi}$, являюшийся расширением Φ, что

$$\tilde{\Phi}((h, \{h_k\}_k)) = \int fha + \sum_k \int f_k h_k a,$$

где

$$(f, \{f_k\}_k) \in (L^1(a) \bigoplus L^1(l^2, a))_1,$$

$$\|\Phi\| = \|(|f|^2 + \sum_k |f_k|^2)^{\frac{1}{2}}\|_{L^1(a)} + \varepsilon.$$

Тогда

$$\Phi(h) = \int fha + \sum_k \int w^{-1} M_{\Delta_k}(wh) f_k a = \int fha + \sum_k \int hu^{-1} \overline{M_{\Delta_k}(u\overline{f_k})} a.$$

Подставляя вместо h тригонометрические полиномы, получаем, что

$$g = f + u^{-1} \sum_k \overline{M_{\Delta_k}(u\overline{f_k})}.$$

Итак, нам надо доказать следующее неравенство:

$$\left\|f + u^{-1} \sum_k \overline{M_{\Delta_k}(u\overline{f_k})}\right\|_{L^{1,\infty}(a)} \leq c \left\|\left(|f|^2 + \sum_k |f_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^1(a)}. \quad (17)$$

Понятно, что можно отдельно оценить f, отдельно сумму. Но оценка для f тривиальна с константой один, а неравенство для суммы – в точности теорема 2, в форме (13). Мы проверили тем самым и второе условие.

Значит, заключение теоремы, цитированной выше, выполняется. Но теорема 1 – это в точности она, если только положить $F = \frac{f}{w}$.

§4. Следствия, выводы и гипотезы

4.1. Следствия из теоремы 1. Подставим $w = a = 1$. Получится следующая теорема (через μ мы обозначаем вероятностную меру Лебега на окружности).

Теорема 3. *Пусть f – измеримая функция, такая что $|f| \leq 1$. Тогда для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует такая функция g, что $|g| + |f - g| = |f|$ и выполняются следующие неравенства:*

(1) $\mu\{f \neq g\} \leq \varepsilon \|f\|_{L^1}$,

(2) $\sigma g \leq C(1 + |\log(\varepsilon)|)$.

Теперь пусть f – произвольная измеримая функция из L^∞, $|f| \le 1$. Возьмем $w = (Mf)^\gamma$, $0 < \gamma < \frac{1}{2}$ (напомним, что M – максимальная функция). Тогда $w^2 = (Mf)^{2\gamma} \in A_1$. После чего замечаем, что мы получили следующую теорему.

Теорема 4. *Пусть f – измеримая функция, такая что $|f| \le 1$, $a \in A_\infty$, $\gamma \in (0, \frac{1}{2})$. Тогда для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует такая функция g, что $|g| + |f - g| = |f|$ и выполняются следующие неравенства:*

(1) $\int\limits_{\{f \ne g\}} a(x)dx \le \varepsilon \int f(x)^{1-\gamma} a(x)dx,$

(2) $\sigma g \le C(1 + |\log(\varepsilon)|)(Mf)^\gamma$.

4.2. Теорема 1 на прямой. На прямой первая теорема выглядит так:

Теорема 5. *Пусть вес a удовлетворяет условию A_∞, вес w удовлетворяет условию α_1, $u = \frac{a}{w}$. Пусть f – измеримая функция с компактным носителем, такая что $|f| \le w$. Тогда для любого ε, $0 < \varepsilon < 1$, существует такая функция g, что $|g| + |f - g| = |f|$ и выполняются следующие неравенства:*

(1) $\int\limits_{\{f \ne g\}} a \le \varepsilon \int\limits_{\mathbb{T}} |\frac{f}{w}| a,$

(2) $\sigma g \le C(a, w)(1 + |\log(\varepsilon)|)w.$

Доказывается она примерно так же, однако есть некоторое различие в технических деталях, потому что в случае прямой сингулярные интегралы действуют из L^∞ лишь в BMO, стало быть, их значения на L^∞ могут быть определены лишь как классы функций, отличающихся на константу. Однако, если в качестве исправляемой функции брать функцию из $L^\infty \cap L^p$, то сингулярный интеграл переводит ее в функцию из L^p, отсюда и появляется требование компактного носителя.

4.3. Об условиях на вес w. В этом пункте мы обсудим вопросы, касающиеся условий на вес в теоремах 1 и 2. Обсуждению предпошлем простую лемму.

Лемма 4. *Пусть вес w удовлетворяет условиям α_p и A_1. Тогда $w \in \alpha_1$.*

Доказательство. Перемножив условие α_p и условие A_1 в положительной степени b (точное значение которой мы укажем потом), получим следующее неравенство:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{-\frac{1}{p-1}}(x)dx\right)^{p-1}\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{\frac{2}{2-p}}(x)dx\right)^{\frac{2-p}{2}}\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(x)dx\right)^{b}$$
$$\le [w]_{\alpha_p}[w]_{A_1}\operatorname{essinf}_I(w^b). \quad (18)$$

Теперь мы применим два неравенства Гёльдера. Первое будет таким:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{(p-1)a}\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{\frac{2}{2-p}}(x)\,dx\right)^{\frac{2-p}{2}} \quad (19)$$
$$\ge \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{-\frac{a}{c}+\frac{1}{c}}(x)dx\right)^{c} = \left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{2}(x)\,dx\right)^{c}. \quad (20)$$

Константы следующие: $c = (\frac{p-1}{p-1+\frac{2-p}{2}}+2)^{-1}$, $a = \frac{p-1}{p-1+\frac{2-p}{2}}c$. Тогда параметры неравенства Гёльдера – $\frac{c}{a(p-1)}$ и $\frac{2c}{2-p}$ – действительно являются сопряженными. Также выполняется соотношение $-\frac{a}{c}+\frac{1}{c}=2$, которое обеспечивает равенство (20).

Второе неравенство Гёльдера будет таким (точнее, это неравенство Гёльдера, возведенное в некоторую степень):

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{-\frac{1}{p-1}}(x)\,dx\right)^{(p-1)(1-a)}\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w(x)\,dx\right)^{1-a} \ge 1. \quad (21)$$

Заметим, что так как $0<a<1$, можно выбрать $b=1-a$. Тогда перемножением первого и второго неравенств Гёльдера мы получим, пользуясь формулой (18), следующую оценку:

$$\left(\frac{1}{|I|}\int\limits_I w^{2}(x)\,dx\right)^{c} \le [w]_{\alpha_p}[w]_{A_1}\operatorname{essinf}_I(w^b).$$

Осталось проверить, что $b=2c$, тогда это будет в точности условие α_1, возведенное в степень c. Но это действительно так. Лемма доказана. □

Можно было бы предположить, что в теореме 2 можно требовать не $w \in \alpha_1$, а $w \in \alpha_p$. Действительно, все рассуждения по-прежнему будут справедливыми, кроме кусочка про проектор Рисса, между формулами (14) и (15). Там требуется, чтобы $w \in A_1$, поскольку проектор Рисса разрывен как оператор из $L^1(w)$ в $L^{1,\infty}(w)$, если $w \notin A_1$. Этот факт хорошо известен, см., например, предложение 5.4.7 из [1], относящееся к близкой ситуации.

В силу леммы 4, в совокупности такие условия все равно влекут $w \in \alpha_1$, так что здесь нет возможности усилить теорему 2.

4.4. Об интерполяции. Приведем одно интересное предположение, которое неявно затрагивалось в доказательстве второй теоремы и могло бы его укоротить. А именно, рассмотрим пространства X^p, которые получаются как замыкания множества конечных последовательностей тригонометрических полиномов $\{f_k\}_k$, удовлетворяющих условиям $\operatorname{supp} \widehat{f_k} \in \Delta_k$, в топологиях $L^p(w)$. Тогда, как нам кажется, верно следующее утверждение:

Лемма 5. (*Гипотеза*) *Пусть* $p_1 < 1 < p_2$. *Тогда пара* (X^{p_1}, X^{p_2}) K*-замкнута в* (L^{p_1}, L^{p_2}).

Автор выражает благодарность С. В. Кислякову за постановку задачи и значительную помощь в ее решении.

Литература

1. E. M. Stein, *Harmonic analysis: real-variable methods, orthogonality and oscillatory integrals.* Princeton University Press, 1993
2. С. В. Кисляков, *Теорема Литлвуда–Пэли для произвольных интервалов: весовые оценки.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **355** (2008), 180–198.
3. J. L. Rubio de Francia, *A Littlewood–Paley inequality for arbitary intervals.* — Rev. Math. Iberoamer., **1** (1985), 1–13.
4. Д. С. Анисимов, С. В. Кисляков, *Двойные сингулярные интегралы: интерполяция и исправление.* — Алгебра и Анализ **16**, вып. 5 (2004), 1–33.
5. S. V. Kisliakov, *A sharp correction theorem.* — Studia Mathematica **113**, No. 2 (1995), 177–196.
6. С. В. Кисляков, Д. В. Парилов, *О теореме Литтлвуда–Пэли для произвольных интервалов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **327** (2005), 78–114.
7. S. V. Kisliakov *Interpolation of H^p-spaces: some recent developments.* — Israel Math. Conference Proceedings, vol. 13 (1999), 102–140.
8. Й. Берг, Й. Лефстрем, *Интерполяционные пространства. Введение.* Мир, 1980.
9. К. Иосида, *Функциональный анализ.* ЛКИ, 2010.

10. С. В. Кисляков, *Количественный аспект теорем об исправлении.* — Зап. научн. семин. **92** (1979), 182–191.
11. Д. Е. Меньшов, *Об равномерной сходимости рядов Фурье.* — Матем. сб., т. 2 (53), 67–96 (1942).

Stolyarov D. M. New correction theorems in the light of a weighted Littlewood–Paley–Rubio de Francia inequality.

We prove the following correction theorem: every function f on the circumference $\mathbb{T}$ that is bounded by an α_1-weight w (this means that $Mw^2 \leq Cw^2$) can be modified on a set e with $\int\limits_e w < \varepsilon$ so that the quadratic function built up from f with the help of an arbitary sequence of nonintersecting intervals in $\mathbb{Z}$ will not exceed $C\log(\frac{1}{\varepsilon})w$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
14 линия В. О., 29,
199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: dms239@mail.ru

Поступило 1 марта 2011 г.