Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

**А. Роткевич**

# ФОРМУЛА АЙЗЕНБЕРГА В НЕВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ И НЕКОТОРЫЕ ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

## §1. Введение

Интегральные представления для строго выпуклых областей, которые восстанавливают голоморфную функцию по её граничным значениям, например, формулы Лере–Коппельмана, требуют предварительных неявных конструкций. Формула Айзенберга для выпуклых областей, тем не менее, вполне явная, и для функции, аналитической в строго выпуклой области $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ и непрерывной вплоть до границы, выполнено: $f(z) = Kf\,(z) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{f(\xi)\omega(\xi)}{\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\rangle^n}$, $z \in \Omega$.

Главным результатом статьи является то, что для некоторого класса областей интегральный оператор $K$, порождаемый ядром Айзенберга, действует из класса Гёльдера функций, определённых на границе области, в голоморфный класс Гёльдера функций, определённых в области, с сохранением показателя (теорема 6). При этом область необязательно должна быть выпуклой (теорема 5).

Второй и третий параграфы посвящены описанию класса областей, к которым применима излагаемая теория. В §4 определён специальный тип окрестностей точек границы области и дана оценка их объёмов, ключевой здесь является лемма 2 и следствие из неё.

В последнем параграфе сформулированы основные теоремы, в том числе несколько критериев, характеризующих голоморфный класс Гёльдера (теоремы 2, 4, 6).

---

*Ключевые слова*: аналитические функции нескольких комплексных переменных, интегральные представления, формула Айзенберга, пространство Гёльдера.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

## §2. Основные обозначения и класс рассматриваемых областей

Для точек $\xi, \zeta \in \mathbb{C}^n$ определим:

$$\langle \xi,\ \zeta \rangle = \xi_1\zeta_1 \ldots + \xi_n\zeta_n,\ |\xi| = \sqrt{\langle \xi,\ \bar{\xi} \rangle} = \sqrt{|\xi_1|^2 + \ldots + |\xi_n|^2},$$

$B_r(\xi) = \{z \in \mathbb{C}^n : |z - \xi| < r\}$– шар радиуса $r$ с центром в $\xi$.

Стандартные операции дифференцирования $\frac{\partial f}{\partial z}$ и $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ ($z$ – комплексная переменная) мы почти всегда обозначаем так: $f'_z$ и $f'_{\bar{z}}$.

Пусть функция $\rho : \mathbb{C}^n \to \mathbb{R} - C^2$-гладкая, обозначим:

$$\rho'_\xi(\xi) = (\rho'_{\xi_1}(\xi), \ldots, \rho'_{\xi_n}(\xi)),$$

$$d\rho(\xi)[w] = \rho'_{\bar{\xi}_1}(\xi)\bar{w}_1 + \ldots + \rho'_{\bar{\xi}_n}(\xi)\bar{w}_n + \rho'_{\xi_1}(\xi)w_1 + \ldots + \rho'_{\xi_n}(\xi)w_n,$$

$$d^2\rho(\xi)[w] = \sum_{j,k=1}^{n} \rho''_{\xi_j,\xi_k} w_j w_k + \sum_{j,k=1}^{n} \rho''_{\bar{\xi}_j,\bar{\xi}_k} \bar{w}_j \bar{w}_k + 2\sum_{j,k=1}^{n} \rho''_{\xi_j,\bar{\xi}_k} w_j \bar{w}_k.$$

Из вещественности функции $\rho$ следует, что

$$d\rho(\xi)[w] = 2\,\mathrm{Re}(\rho'_{\xi_1}(\xi)w_1 + \ldots + \rho'_{\xi_n}(\xi)w_n) = 2\,\mathrm{Re}\left\langle \rho'_\xi(\xi),\ w \right\rangle,$$

$$d^2\rho(\xi)[w] = 2\,\mathrm{Re}\sum_{j,k=1}^{n} \rho''_{\xi_j,\xi_k} w_j w_k + 2\sum_{j,k=1}^{n} \rho''_{\xi_j,\bar{\xi}_k} w_j \bar{w}_k.$$

Пусть область $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ ограничена, причём выполняются следующие три условия.

(1) Область регулярна, т.е. $\rho'_\xi \neq 0$ на $\partial\Omega$.

(2) Рассмотрим в точке $\xi \in \mathbb{C}^n$ комплексную касательную гиперплоскость:

$$T_\xi = \{z \in \mathbb{C}^n : \left\langle z - \xi,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle = 0\}.$$

Предполагаем, что область $\Omega$ строго линейно выпукла, то есть комплексная касательная гиперплоскость $T_\xi$ пересекает границу области $\Omega$ только в точке $\xi$ :

$$T_\xi \setminus \{\xi\} \subset \mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}, \quad \xi \in \partial\Omega.$$

(3) Кроме того предположим, что второй дифференциал функции $\rho$ порождает положительную квадратичную форму на комплексной касательной гиперплоскости $T_\xi$:

$$d^2\rho(\xi)[z - \xi] \geq c(\xi)|z - \xi|^2,\ \xi \in \partial\Omega,\ z \in T_\xi,$$

для некоторой постоянной $c(\xi) > 0$.

Обозначим через $n(\xi) = \frac{\rho'_{\xi}(\xi)}{|\rho'_{\xi}(\xi)|}$ комплексную нормаль в точке $\xi$.

Следующие два параграфа посвящены изучению областей, удовлетворяющих условиям (1)–(3).

## §3. Технические утверждения о рассматриваемом классе областей

В дальнейшем нам потребуется не одна область, а расширяющееся семейство областей $\Omega_\delta = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < \delta\}$. При малых значениях параметра $\delta$ область $\Omega_\delta$ будет также принадлежать рассматриваемому классу.

**Утверждение 1.** *При малых значениях параметра $\delta$ область $\Omega_\delta$ удовлетворяет условиям* (1)–(3), *причём в* (1) *и* (3) *оценки равномерные:*

(1′) $|\rho'_{\xi}(\xi)| > c_1, \quad \xi \in \overline{\Omega}_{\delta_0} \setminus \Omega_{-\delta_0}$,

(3′) $d^2\rho(\xi)[z-\xi] \geq c_2|z-\xi|^2, \qquad \xi \in \overline{\Omega}_{\delta_0} \setminus \Omega_{-\delta_0},\ z \in T_\xi$,

для некоторых постоянных $c_1,\ c_2 > 0,\ \delta_0 > 0$.

**Доказательство.** Условия (1′), (3′) следуют из $C^2$-гладкости функции $\rho(z)$ и компактности множества $\overline{\Omega}_{\delta_0} \setminus \Omega_{-\delta_0}$. Докажем выполнение условия (2), точнее докажем, что для любого радиуса $\sigma > 0$ найдётся число $\varepsilon(\sigma) > 0$ такое, что $\rho(z) > \varepsilon(\sigma)$ при $z \in T_\xi \setminus B_\sigma(\xi)$.

Допустим обратное, т.е. для некоторого радиуса $\sigma > 0$ нашлись последовательности точек $\xi_k \in \partial\Omega, z_k \in T_\xi \setminus B_\sigma(\xi)$ такие, что $\rho(z_k) < \varepsilon_k \to 0$. Множества $\partial\Omega$, $\overline{\Omega}_{\varepsilon_k}$ при малых $\varepsilon_k$ компактны, следовательно, можно выделить сходящиеся подпоследовательности: $\xi_{n_k} \to \xi_0, z_{n_k} \to z_0$; при этом $\xi_0 \in \partial\Omega$ и $z_0 \in T_{\xi_0} \setminus B_\sigma(\xi_0)$, в частности, $z_0 \neq \xi_0$. В то же время, $\rho(z_0) = \lim \rho(z_{n_k}) = 0$, откуда $z_0 \in T_{\xi_0} \cap \overline{\Omega} = \{\xi_0\}$, получаем противоречие. □

**Утверждение 2.** *Нормаль $n(\xi)$ липшицева в некоторой окрестности границы области $\Omega$, то есть $|n(\xi_1) - n(\xi_2)| < c_3|\xi_1 - \xi_2|,\ \xi_1, \xi_2 \in \overline{\Omega}_{\delta_0} \setminus \Omega_{-\delta_0}$ с некоторой постоянной $c_3 > 0$.*

**Доказательство.** Утверждение следует из $C^2$-гладкости функции $\rho$ и отделённости функции $|\rho'_{\xi}(\xi)|$ от нуля. □

**Утверждение 3.** *При малых значениях параметров* $\delta_1, \delta_2$ *расстояние от точек границы* $\partial\Omega_{\delta_1}$ *до границы* $\partial\Omega_{\delta_2}$ *оценивается через* $|\delta_1 - \delta_2|$, *точнее*

$$c_4|\delta_1 - \delta_2| \le \operatorname{dist}(\partial\Omega_{\delta_1},\ \partial\Omega_{\delta_2}) \le \operatorname{dist}(\xi_1,\ \partial\Omega_{\delta_2}) \le c_5|\delta_1 - \delta_2|$$

*при* $\delta_1, \delta_2 \in (-\delta_0,\ \delta_0)$, $\xi_1 \in \partial\Omega_{\delta_1}$, *для некоторых постоянных* $c_4, c_5 > 0, \delta_0 > 0$.

**Доказательство.** Пусть $\delta_2 > \delta_1$, $\xi_1 \in \partial\Omega_{\delta_1}$, $\lambda > 0$, тогда, раскладывая функцию $\rho$ по формуле Тейлора, получаем

$$\rho(\xi_1+\lambda\bar{n}(\xi_1)) = \rho(\xi_1)+\lambda d\rho(\xi_1)[\bar{n}(\xi_1)]+O(\lambda^2) \ge \delta_1+2\lambda c_1-M\lambda^2 \ge \delta_1+c_1\lambda,$$

где

$$d\rho(\xi_1)[\bar{n}(\xi_1)] = 2\left\langle \rho'_\xi(\xi),\ \frac{\bar{\rho}'_\xi(\xi)}{|\rho'_\xi(\xi)|} \right\rangle = 2|\rho'_\xi(\xi)| \ge 2c_1,\ \lambda < \frac{c_1}{M}.$$

Положим $\lambda_0 = \frac{\delta_2-\delta_1}{c_1}$, выберем значение постоянной $\delta_0 > 0$ столь малым, что $|\lambda_0| \le \frac{2\delta_0}{c_1} < \frac{c_1}{M}$, следовательно, $\rho(\xi_1+\lambda_0\bar{n}(\xi_1)) \ge \delta_2$, откуда $\operatorname{dist}(\xi_1,\ \partial\Omega_{\delta_2}) \le \lambda_0 = \frac{|\delta_1-\delta_2|}{c_1}$.

Пусть теперь точка $\xi_1 \in \partial\Omega_{\delta_1}$ – ближайшая к $\partial\Omega_{\delta_2}$, рассмотрим произвольное направление $e \in \mathbb{C}^n$, $|e| = 1$, разложим по формуле Тейлора, как и в предыдущем рассуждении, заметив при этом, что $|d\rho(\xi_1)[e]| \le \le 2|\rho'_\xi(\xi_1)|$, значит $\rho(\xi_1 + \lambda e) \le \delta_1 + c\lambda < \delta_2$ при $\lambda < \frac{|\delta_2-\delta_1|}{c}$, следовательно, $\operatorname{dist}(\partial\Omega_{\delta_1},\ \partial\Omega_{\delta_2}) \ge \frac{|\delta_2-\delta_1|}{c}$. □

**Утверждение 4.** *При достаточно малом значении постоянной* $\delta_0 > 0$ *для любой точки* $\xi \in \overline{\Omega}_{\delta_0} \setminus \Omega_{-\delta_0}$ *ровно одна точка поверхности* $\rho(z) = \delta$ *реализует расстояние от* $\xi$ *до этой поверхности, где* $|\delta| < \delta_0$.

**Доказательство.** Рассмотрим границу области $\Omega_\delta$ как $(2n-1)$-мерное многообразие в $\mathbb{R}^{2n}$. Пусть $\nu(z) = \frac{\operatorname{grad}\ \rho(z)}{|\operatorname{grad}\ \rho(z)|}$ – нормаль в точке $z$. Фиксируем точку $\xi \in \Omega_{\delta_0} \setminus \Omega_{-\delta_0}$ и $|\delta| \le \delta_0$. Допустим, нашлись две точки, реализующие расстояние

$$h = \operatorname{dist}(\xi,\ \partial\Omega_\delta) \le c_5|\delta - \rho(\xi)| \le 2c_5\delta_0,$$

тогда $\xi = z_1 + h\nu(z_1) = z_2 + h\nu(z_2)$, значит $0 = |z_1 - z_2 + h(\nu(z_1) - \nu(z_2))| \ge (1 - 2c_3c_5\delta_0)|z_1 - z_2|$, откуда при $\delta_0 < \frac{1}{2c_3c_5}$ получаем $z_1 = z_2$. □

## §4. Специальные окрестности и оценки их объёмов

В данном вспомогательном разделе определены специальные множества $W_{h,\delta}$, характеризующиеся расстоянием до комплексной касательной гиперплоскости (лемма 2) и позволяющие оценить ядро Айзенберга в них. Напрямую дать оценку для этих окрестностей не удаётся, поэтому сначала вводится некоторый аналог сфер Хёрмандера и требуемая оценка доказывается для них (теорема 1, лемма 1 и следствие 1), затем уже получаем оценку для множеств $W_{h,\delta}$ (лемма 2, следствие 2).

Пусть $\xi \in \partial\Omega$, определим семейство окрестностей точки $\xi$ :

$$V_{h,\delta}(\xi) = \{z \in \Omega_\delta : \operatorname{dist}(z,\ T_\xi) < h\}.$$

Через $m_{2n}$ будем обозначать меру Лебега в пространстве $\mathbb{C}^n$, через $\sigma_\delta$ – поверхностную меру на $\partial\Omega_\delta$, индуцированную мерой Лебега, $\sigma := \sigma_0$.

**Теорема 1.** *Пусть область $\Omega$ удовлетворяет условиям* (1)–(3), *тогда для множеств $V_{h,\delta}(\xi)$ при достаточно малых значениях постоянной $\delta_0 > 0$ выполнена следующая оценка:*

$$m_{2n}(V_{h,\delta}(\xi)) \le C_1 h^{n+1},\ h > \delta,\ \xi \in \partial\Omega,\ \delta < \delta_0,$$

*для некоторой постоянной $C_1 > 0$.*

**Доказательство.** Основная идея состоит в том, что при малых значениях параметров $h,\ \delta > 0$ проекция множества $V_{h,\delta} = V_{h,\delta}(\xi)$ на плоскость $T_\xi$ содержится в шаре с радиусом порядка $h^{1/2}$. Обозначим через $\pi_\xi(z)$ проекцию разности $z - \xi$ на плоскость $T_\xi$. Доказательство проведём в несколько этапов:

1. Покажем, что для некоторых постоянных $\sigma > 0,\ \gamma_1, \gamma_2 > 0$ выполняется следующая оценка:

$$\gamma_1 |z - \xi|^2 \le \rho(z) \le \gamma_2 |z - \xi|^2,\ \xi \in \partial\Omega,\ z \in B_\sigma(\xi) \cap T_\xi.$$

Действительно, разложим $\rho(z)$ по формуле Тейлора:

$$\begin{aligned}\rho(z) = \rho(\xi) + 2\operatorname{Re}\left\langle \rho'_\xi(\xi),\ z - \xi \right\rangle + \frac{1}{2} d^2\rho(\xi)\left[\frac{z-\xi}{|z-\xi|}\right] \cdot |z-\xi|^2 + o(|z-\xi|^2)\\ = \frac{1}{2} d^2\rho(\xi)\left[\frac{z-\xi}{|z-\xi|}\right] \cdot |z-\xi|^2 + o(|z-\xi|^2).\end{aligned}$$

Тогда, в силу условия ($3'$) и компактности границы $\partial\Omega$, найдутся $\gamma_1, \gamma_2 > 0$ такие, что

$$0 < 2\gamma_1 < d^2\rho(\xi)\left[\frac{z-\xi}{|z-\xi|}\right] < \frac{1}{2}\gamma_2, \quad \xi \in \partial\Omega,$$

и при достаточно малом значении радиуса $\sigma > 0$ выполнено требуемое неравенство.

2. Далее, из утверждения 1 вытекает, что

$$\rho(z) > \varepsilon(\sigma) > 0,\ z \in T_\xi \setminus B_\sigma(\xi),\ \sigma > 0.$$

Следовательно, вне любой окрестности точки касания плоскость $T_\xi$ отделена от области $\Omega$:

$$\mathrm{dist}(z,\ \partial\Omega) > \varepsilon_1(\sigma),\ z \in T_\xi \setminus B_\sigma(\xi),\ \sigma > 0,$$

так как $\mathrm{dist}(z,\ \partial\Omega) \asymp |\rho(z)|$ по утверждению 3.

3. Из утверждения 3 следует, что

$$\Omega_\delta \subseteq B_{c_5\delta}(\Omega) = \{z \in \mathbb{C}^n : \mathrm{dist}(z,\ \Omega) < c_5\delta\}$$

при достаточно малом значении постоянной $\delta > 0$.

4. При достаточно малых значениях радиуса $\sigma > 0$ имеем

$$\mathrm{dist}(z,\ T_\xi) > \gamma_3|\pi_\xi(z)|^2, z \in B_\sigma(\xi) \cap \partial\Omega.$$

Разложим вектор $z \in \partial\Omega$ по гиперплоскости $T_\xi$, тогда $z = \xi + w + \lambda\bar{n}$, где $\langle w,\ n\rangle = 0,\ \bar{n} = \bar{n}(\xi)$ – сопряжённый вектор к комплексной нормали, $\lambda \in \mathbb{C}$. Разложим функцию $\rho(z - \lambda\bar{n})$ по формуле Тейлора по $\lambda$ и воспользуемся неравенством из первого пункта данного рассуждения:

$$\gamma_1|w|^2 \le \rho(\xi + w) = \rho(z - \lambda\bar{n}) = -\lambda d\rho(z)[\bar{n}] + O(|\lambda|^2).$$

Тогда из непрерывности функции $d\rho(z)[\bar{n}(z)]$ можно выбрать такой радиус $\sigma > 0$, что

$$|d\rho(z)[\bar{n}]| \le 2d\rho(\xi)[\bar{n}] \le c,\ z \in B_\sigma(\xi),$$

и

$$\rho(z - \lambda\bar{n}) \le 2c\lambda,\ |\lambda| < \sigma.$$

Значит, для некоторой постоянной $\gamma_3 > 0$ выполнено неравенство

$$\mathrm{dist}(z,\ T_\xi) = |\lambda| \ge \gamma_3|\pi_\xi(z)|^2,\ z \in B_\sigma(\xi).$$

5. Расстояние от точек плоскости $T_\xi$ до области $\Omega$ вне некоторой окрестности точки $\xi$ можно оценить следующим образом:

$$\mathrm{dist}(z,\ \partial\Omega) \ge \gamma_3|\pi_\xi(z)|^2,\ z \in T_\xi \cap B_\sigma(\xi).$$

Действительно, пусть $z = w + \xi \in T_\xi \cap B_\sigma(\xi)$ и пусть точка $z' = w + \xi + \lambda\bar{n}$ – ближайшая к точке $z$ на $\partial\Omega$. Заметим, что $\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) \le |z-\xi| < \sigma$, следовательно, $|z' - \xi| = |w + \lambda\bar{n}| \le |w| + |\lambda| = |z - \xi| + \operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) \le \sqrt{2}\sigma$. Применим к точке $z'$ оценку из предыдущего пункта:

$$\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) = \operatorname{dist}(z',\ T_\xi) \ge \gamma_3|w|^2 = \gamma_3|\pi_\xi(z)|^2.$$

6. Выберем радиус $\sigma > 0$ столь малым, что в шаре $B_\sigma(\xi)$ выполнены оценки из предыдущих пунктов доказательства. Тогда найдутся постоянные $\sigma_1 \in (0,\ \sigma),\ c > 0$ такие, что

$$\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) \ge (1 + c_5)h \ge h + c_5\delta$$

при $\sigma_1 > h \ge \delta$ и $z \in (T_\xi \setminus B_{ch^{\frac{1}{2}}}(\xi)) \cap B_\sigma$.

Действительно, пусть $z \in T_\xi \setminus B_{ch^{\frac{1}{2}}}(\xi)$ и при этом $|z - \xi| < \sigma$. Тогда из предыдущего пункта получаем оценку

$$\operatorname{dist}(z,\ \Omega) \ge \gamma_3(ch^{\frac{1}{2}})^2 = \gamma_3 c^2 h;$$

поэтому достаточно взять $c = \left(\frac{1+c_5}{\gamma_3}\right)^{\frac{1}{2}},\ \sigma_1 < \left(\frac{\sigma}{\gamma_3}\right)^2$.

7. Из пункта 2 получаем, что

$$\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) > \varepsilon_1(\sigma) > (1 + c_5)\delta_0,\ z \in T_\xi \setminus B_\sigma(\xi),$$

где $\delta_0 = \min\left(\frac{\varepsilon_1(\sigma)}{1+c_5}, \sigma_1\right)$. Пусть $\delta_0 \ge h \ge \delta \ge 0$, покажем, что $\pi_\xi(V_{h,\delta}) \subseteq B_{ch^{\frac{1}{2}}}(\xi)$. Для этого достаточно показать, что, если точка $z \in T_\xi$ лежит вне шара $B_{ch^{\frac{1}{2}}}(\xi)$, то $\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega_\delta) > h$. Пусть $z \in T_\xi \setminus B_{ch^{\frac{1}{2}}}(\xi)$. Заметим, что

$$\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega_\delta) \ge \operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) - \sup_{z_1 \in \partial\Omega_\delta} \operatorname{dist}(z_1,\ \partial\Omega) \ge \operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) - c_5\delta.$$

Рассмотрим два случая.

a. Точка $z$ лежит в шаре $B_\sigma(\xi)$, тогда $\operatorname{dist}(z,\ \Omega) \ge (1 + c_5)h$, откуда $\operatorname{dist}(z,\ \Omega_\delta) > h$;
b. Точка $z$ лежит вне шара $B_\sigma(\xi)$, тогда $\operatorname{dist}(z,\ \Omega) \ge (1 + c_5)\delta_0$, откуда $\operatorname{dist}(z,\ \Omega_\delta) > h$.

Таким образом, $\pi_\xi(V_{h,\delta}) \subseteq B_{ch^{\frac{1}{2}}}(\xi)$, откуда

$$m_{2n}V_{h,\delta} \le C_1(h^{\frac{1}{2}})^{2n-2}h^2 = C_1 h^{n+1}$$

при $\delta_0 \ge h \ge \delta \ge 0$. При этом данное неравенство можно считать глобальным, так как мера множеств $V_{h,\delta}$ не превосходит меры множества $\Omega_{\delta_0}$. $\square$

**Замечание 1.** Расстояние от точки границы до комплексной касательной плоскости оценивается следующим образом:

$$c_6|\pi_\xi(z)|^2 \le \operatorname{dist}(z,\ T_\xi) \le c_7|\pi_\xi(z)|^2,\ z,\xi \in \partial\Omega,$$

для некоторых постоянных $c_6, c_7 > 0$.

**Доказательство.** Левая часть неравенства прямо следует из четвёртого пункта доказательства теоремы 1 и равномерной ограниченности величин $|\pi_\xi(z)|$, $\operatorname{dist}(z,\ T_\xi)$ при $z,\xi \in \partial\Omega$.

Правая часть доказывается аналогично. Из формулы Тейлора получаем неравенство $\gamma_2|\pi_\xi(z)|^2 \ge \rho(\xi + w) = \rho(z - \lambda\bar{n}) = -\lambda d\rho(z)[\bar{n}] + O(|\lambda|^2)$ при $z = \xi + w + \lambda\bar{n}(\xi) \in \partial\Omega \cap B_\sigma(\xi)$, значит $c|\pi_\xi(z)|^2 \ge |\lambda| = \operatorname{dist}(z,\ T_\xi)$ при $z = \xi + w + \lambda\bar{n}(\xi) \in \partial\Omega \cap B_\sigma(\xi)$, для некоторых постоянных $\sigma > 0,\ c > 0$. Но расстояние $\operatorname{dist}(z,\ T_\xi)$ равномерно ограничено при $z,\xi \in \partial\Omega$, следовательно, это неравенство можно считать глобальным. □

**Лемма 1.** *Для пересечения $V_{h,\delta}(\xi_0) \bigcap \partial\Omega_{\delta'}$ выполнена следующая оценка*:

$$\sigma_{\delta'}(V_{h,\delta}(\xi_0) \cap \partial\Omega_{\delta'}) \le Ch^n, \quad \xi_0 \in \partial\Omega,\ 0 < \delta < \delta_0, 0 \le \delta' \le \delta \le h$$

*для некоторой постоянной $C > 0$.*

**Доказательство.** Пусть $h > \delta$, тогда, как доказано в теореме 1, $\pi_{\xi_0}(V_{h,\delta}(\xi_0)) \subset B = B_{ch^{\frac{1}{2}}}(\xi_0) \cap T_{\xi_0}$. Рассмотрим обычную касательную плоскость $T^{\mathbb{R}}_{\xi_0}$ и проекцию на неё $\pi^{\mathbb{R}}_{\xi_0}$. Поскольку точки множества $V_{h,\delta} = V_{h,\delta}(\xi_0)$ отстоят от $(2n-2)$-мерного шара $B$ не более чем на $h$, заключаем, что $m_{2n-1}(\pi^{\mathbb{R}}_{\xi_0}(V_{h,\delta})) \le Ch^n$. Отсюда, используя $\pi^{\mathbb{R}}_{\xi_0}$ как локальную параметризацию границы $\partial\Omega$, получаем, что $\sigma(V_{h,\delta} \cap \partial\Omega_{\delta'}) \le Ch^n$.

Далее, пусть $\delta' > 0$ и пусть точка $\xi' \in \partial\Omega_{\delta'}$ – ближайшая к точке $\xi_0$, следовательно, $|\xi' - \xi_0| \le c_5\delta$ и $|n(\xi') - n(\xi_0)| < c_3c_5\delta'$. Оценим, насколько может отличаться расстояние от произвольной точки $z \in \Omega_\delta$ до плоскостей $T_{\xi'}$ и $T_{\xi_0}$:

$$\begin{aligned}|\operatorname{dist}(z,\ T_{\xi'}) - \operatorname{dist}(z,\ T_{\xi_0})| &= |\,\langle z - \xi',\ n(\xi')\rangle - \langle z - \xi_0,\ n(\xi_0)\rangle\,| \\ &\le |\,\langle z - \xi',\ n(\xi')\rangle - \bar{n}(\xi_0)| + |\,\langle \xi_0 - \xi',\ n(\xi_0)\rangle\,| \le Ch.\end{aligned}$$

Кроме того, $\operatorname{diam}(V_{h,\delta}) \le Ch^{\frac{1}{2}}$, следовательно, проекция множества $V_{h,\delta}$ на любую плоскость содержится в шаре радиуса порядка $h^{\frac{1}{2}}$, а ввиду предыдущей оценки на плоскости $T_{\xi'}$ можно взять такой шар с центром в $\xi'$, т.е. $\pi_{\xi'}(V_{h,\delta}) \subset B_{Ch^{\frac{1}{2}}} \cap T_{\xi'}$, при этом $\operatorname{dist}(B_{Ch^{\frac{1}{2}}} \cap T_{\xi'},\ z) \leq (C+1)h,\ z \in V_{h,\delta}$, откуда $m_{2n-1}(\pi^{\mathbb{R}}_{\xi_0}(V_{h,\delta})) \leq Ch^n$ и, используя $\pi^{\mathbb{R}}_{\xi'}$ как локальную параметризацию, получаем $\sigma_{\delta'}(V_{h,\delta} \cap \partial\Omega_{\delta'}) \leq Ch^n$. $\square$

**Следствие 1.** *Пусть* $0 < \delta \leq \frac{\delta_0}{2}$, $\xi_0 \in \partial\Omega_\delta$, *рассмотрим окрестность*

$$\tilde{V}_{h,\delta}(\xi_0) = \{z \in \Omega_{2\delta} \setminus \Omega_\delta : \operatorname{dist}(z,\ T_{\xi_0}) < h\}.$$

*Для таких окрестностей выполнены следующие оценки:*

1) $m_{2n}(\tilde{V}_{h,\delta}(\xi_0)) \leq c_9 h^{n+1}, \quad h > \delta,$

2) $\sigma_{\delta'}(\tilde{V}_{h,\delta}(\xi_0) \cap \partial\Omega_{\delta'}) < c_{10}h^n, \quad h > \delta,\ \delta < \delta' < 2\delta,$

*для некоторых постоянных* $c_9, c_{10} > 0$.

**Лемма 2.** *Пусть* $z \in \overline{\Omega}$, $\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) < \delta_0,\ 0 < \delta \leq \frac{\delta_0}{2}$, *точка* $z_0 \in \partial\Omega_\delta$ *– ближайшая к* $z$ *точка,* $|z - z_0| = r$, *рассмотрим семейство множеств*

$$W_{h,\delta}(z) = \{\xi \in \Omega_{2\delta} \setminus \Omega_\delta : r \leq |\langle \xi - z,\ n(\xi)\rangle| \leq r + h\},$$

*то есть* $W_{h,\delta}(z)$ *– множество всех точек* $\Omega_{2\delta} \setminus \Omega_\delta$ *таких, что расстояние от* $z$ *до комплексной касательной плоскости не превосходит* $r + h$. *Тогда, если* $\delta_0 > 0$ *достаточно мало, то существует постоянная* $K > 1$ *такая, что* $W_{h,\delta}(z) \subset \tilde{V}_{Kh,\delta}(z_0),\ z \in \overline{\Omega},\ 0 < \delta < h$.

**Доказательство.** Достаточно доказать, что при малых значениях параметра $h$ для некоторой постоянной $K > 1$ из того, что $r \leq |\langle \xi - z,\ n(\xi)\rangle| \leq r + h$, следует, что $|\langle \xi - z_0,\ \bar{n}(z_0)\rangle| \leq Kh$.

Фиксируем точку $\xi \in W_{h,\delta}(z)$, пусть точка $\xi' \in T_\xi$ – ближайшая к точке $z$ на плоскости $T_\xi$, тогда $|z - \xi'| = \operatorname{dist}(z,\ T_\xi) = |\langle \xi - z,\ n(\xi)\rangle|$. Так как плоскость $T_\xi$ пересекает границу области $\Omega_\delta$ только в точке $\xi$, то отрезок, соединяющий точки $z$ и $\xi'$, пересекает $\partial\Omega$ в какой-то точке $z'$.

Оценим расстояние $\operatorname{dist}(z',\ T_{z_0}) = l$. Пусть $\pi_{z_0}(z')$ – это проекция вектора $z'-z_0$ на $T_{z_0}$, тогда $|\pi_{z_0}(z')| \geq \sqrt{c_7^{-1}l}$, следовательно, $(r+h)^2 \geq |z - \xi'|^2 \geq |z - z'|^2 = (r - l)^2 + |\pi_{z_0}(z')|^2 \geq (r - l)^2 + c_7^{-1}l$, откуда $h(2r+h) \geq (c_7^{-1} - 2r + l)l$. Заметим, что величину $(2r+h)$ можно считать ограниченной, а $r \leq c_5\delta_0 + \operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) \leq (c_5 + 1)\delta_0$, и возьмём столь малую постоянную $\delta_0 > 0$, что $c_7^{-1} - 2r + l > c_7^{-1} - 2(c_5 + 1)\delta_0 > c' > 0$. Получаем, что $l \leq \gamma_1 h$ для некоторой постоянной $\gamma_1$.

Оценим расстояние между точками $\xi$ и $\xi'$. Согласно замечанию 1, $|\xi-\xi'| \le c_6^{-1}\mathrm{dist}(\xi',\ \partial\Omega_{\rho(\xi)})$, при этом $|z-z'| \ge \sqrt{(r-l)^2+c_7^{-1}l} \ge r$, $|z-\xi'| \le r+h$, следовательно, $\mathrm{dist}(\xi',\ \partial\Omega_{\rho(\xi)}) \le |z'-\xi'| \le h$, откуда $|\xi-\xi'| \le \sqrt{c_6^{-1}h}$.

Далее, $|\xi-z_0| \le |\xi-\xi'|+|\xi'-z'|+|z'-z_0|$,
$|z'-z_0| = \sqrt{\mathrm{dist}(z',\ \ T_{z_0})^2+|\pi_{z_0}(z')|^2} \le \sqrt{l^2+c_6^{-1}l} \le \sqrt{1+c_6^{-1}}\sqrt{l}$,
$|\xi'-z'| \le h,\ |\xi'-\xi| \le \sqrt{c_6^{-1}h}$, откуда $|\xi-z_0| \le \gamma_2\sqrt{h}$ и

$$|\,\langle \xi-\xi',\ n(z_0)\rangle\,| = |\,\langle \xi-\xi',\ n(z_0)-n(\xi)\rangle\,| \le c_3|\xi-\xi'||z_0-\xi| \le \gamma_3 h.$$

Окончательно получаем, что для некоторой постоянной $K>1$ справедливы оценки

$$\begin{aligned}&|\,\langle \xi-z_0,\ n(z_0)\rangle\,|\\ &\quad\le |\,\langle \xi-\xi',\ n(z_0)\rangle\,| + |\,\langle \xi'-z',\ n(z_0)\rangle\,| + |\,\langle z'-z_0,\ n(z_0)\rangle\,| \le Kh.\end{aligned}$$

Требуемое неравенство доказано. □

**Следствие 2.** *При достаточно малых значениях постоянной* $\delta_0>0$ *выполнены следующие оценки*:

1) $m_{2n}(W_{h,\delta}(z)) \le c_{11}h^{n+1}, \quad h>\delta,$

2) $\sigma_{\delta'}(W_{h,\delta}(z)\cap\partial\Omega_{\delta'}) < c_{12}h^n, \quad h>\delta,\ \delta<\delta'<2\delta,$

*при* $0<\delta\le\frac{\delta_0}{2},\ z\in\overline{\Omega},\ \mathrm{dist}(z,\ \partial\Omega)<\delta_0$.

Подготовительная часть закончена, перейдем к формулировке основных результатов.

## §5. Основные результаты

Пусть область $\Omega$ удовлетворяет условиям (1)–(3). Определим оператор $K: C(\partial\Omega)\to H(\Omega)$ следующим образом:

$$Kg\ (z) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{g(\xi)\omega(\xi)}{\left\langle \xi-z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle^n},$$

где $\omega(\xi)=\omega'(\rho'_\xi(\xi))\wedge d\xi,\ \omega'(\eta)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\eta_k d\eta_{[k]}$,
$d\eta_{[k]}=\eta_1\wedge\ldots\wedge\eta_{k-1}\wedge\eta_{k+1}\wedge\eta_n,\ d\xi=d\xi_1\wedge\ldots\wedge d\xi_n$.

Пусть $H^\alpha(\Omega)$ – голоморфный класс Гёльдера в $\Omega$, $C^\alpha(\partial\Omega)$ – класс Гёльдера в $\Omega$ порядка $\alpha>0,\ \alpha$ – нецелое. Через $A_C=H(\Omega)\bigcap C(\overline{\Omega})$

обозначим пространство всех аналитических функций, непрерывных вплоть до границы.

Главным результатом является то, что при выполнении условий (1)–(3) интегральный оператор $K$ действует из $C^\alpha(\partial\Omega)$ в $H^\alpha(\Omega)$ при $0 < \alpha < 1$ (теорема 6). Кроме того, приведён пример невыпуклой области, обладающей этими свойствами (теорема 5).

Нижеследующая теорема 2 и следствие из неё являются естественным обобщением на произвольные $C^2$-гладкие области результата для шара в $\mathbb{C}^n$ (см. [4]) и применяется в работе [2]. Здесь она приводится для замкнутости изложения, поскольку прямая ссылка на доказательство в интересующей общности мне неизвестна.

Теорема 4, вместе с теоремой 3, позволяет для рассматриваемого типа областей характеризовать класс $H^\alpha(\Omega)$ при $\alpha \in (0,\ 1)$ через непрерывное продолжение функции вне области.

**Теорема 2.** *Пусть $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ – ограниченная область, причём функция $\rho(z)$ $C^2$-гладкая и $d\rho \neq 0$. Тогда аналитическая в области $\Omega$ функция $f$ лежит в классе $H^\alpha(\Omega)$ с показателем $\alpha \in (0,\ 1)$ в том и только том случае, когда выполнена оценка:*

$$|\mathrm{grad}\ f(z)| \le C \mathrm{dist}(z,\ \partial\Omega)^{\alpha-1}, \quad z \in \Omega.$$

**Доказательство.** Необходимость следует из неравенства Коши. Достаточность можно проверять для таких точек $z_1,\ z_2 \in \Omega$, что $|z_1 - z_2| = \delta \le \frac{\delta_0}{2}$, $\mathrm{dist}(z_1,\ \partial\Omega) \ge \mathrm{dist}(z_2,\ \partial\Omega)$. Заметим, что

$$\mathrm{dist}(\partial\Omega,\ \partial\Omega_{-2c_4^{-1}\delta}) \ge 2\delta,\ \mathrm{dist}(\partial\Omega_{-c_4^{-1}\delta},\ \partial\Omega_{-2c_4^{-1}\delta}) \ge \delta,$$

где константа $c_4 > 0$ взята из утверждения 3. Рассмотрим три случая.

1. Если $z_1, z_2 \in \bar{\Omega}_{-2c_4^{-1}\delta}$, то, так как

$$|z_1 - z_2| = \delta \le \mathrm{dist}(\partial\Omega_{-c_4^{-1}\delta},\ \partial\Omega_{-2c_4^{-1}\delta}),$$

отрезок, соединяющий $z_1$ и $z_2$, содержится в $\Omega_{-c_4^{-1}\delta}$, следовательно, для любой точки $z$ этого отрезка имеем $\mathrm{dist}(z,\ \partial\Omega) \ge \delta$, откуда

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le C\delta^{\alpha-1}|z_1 - z_2| \le C\delta^\alpha.$$

2. Пусть $z_1 \in \bar{\Omega}_{-2c_4^{-1}\delta}, z_2 \notin \bar{\Omega}_{-2c_4^{-1}\delta}$. Обозначим через $z_2'' \in \partial\Omega$ точку, ближайшую к точке $z_2$. Тогда прямая, проходящая через точки $z_2$ и $z_2''$, ортогональна границе $\Omega$. Пусть $z_2'$ – точка пересечения этой прямой

с $\partial\Omega_{-2c_4^{-1}\delta}$, тогда для любой точки $z$ отрезка $[z_2',\ z_2'']$ ближайшей на границе области $\Omega$ является точка $z_2''$ и $\mathrm{dist}(z,\ \partial\Omega) = |z - z_2''|$, откуда

$$|f(z_2) - f(z_2')| \le \int\limits_{[z_2',\ z_2]} |\mathrm{grad}\ f(z_t)|dt \le C \int\limits_{|z_2''-z_2|}^{|z_2''-z_2'|} t^{\alpha-1}dt =$$
$$= C\alpha^{-1}(|z_2'' - z_2'|^\alpha - |z_2'' - z_2|^\alpha) \le C\alpha^{-1}|z_2'' - z_2'|^\alpha \le \tilde{C}\delta^\alpha,$$

так как $|z_2'' - z_2'| = \mathrm{dist}(z_2', \partial\Omega) \le 2c_4^{-1}c_5\delta$. Окончательно:

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le |f(z_1) - f(z_2')| + |f(z_2') - f(z_2)|.$$

Второе слагаемое уже оценено, а первое оценивается аналогично первому случаю, учитывая, что $|z_1 - z_2'| \le |z_1 - z_2| + |z_2 - z_2'| \le \delta + c_5\delta$.

3. В случае, когда $z_1, z_2 \notin \bar{\Omega}_{-2c_4^{-1}\delta}$, аналогично предыдущему пункту вводим точки $z_1',\ z_2'$, тогда

$$|z_1' - z_2'| \le |z_1 - z_2| + |z_1 - z_1'| + |z_2 - z_2'| \le (1 + 2c_5)\delta$$

и

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le |f(z_1') - f(z_2')| + |f(z_2') - f(z_2)| + |f(z_1') - f(z_1)|.$$

Первое слагаемое оценивается как в первом случае, второе и третье слагаемые – как во втором. □

Применяя теорему 2 ко всем смешанным производным порядка $[\alpha]$ от функции $f(z)$, получаем характеристику класса $H^\alpha(\Omega)$ для всех нецелых показателей $\alpha > 0$.

**Следствие 3.** *В условии теоремы* 2, *пусть показатель* $\alpha > 0$ *нецелый, тогда функция* $f$, *аналитическая в области* $\Omega$, *лежит в классе* $H^\alpha(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда для любого мультииндекса* $\mu$ *такого, что* $|\mu| = [\alpha] + 1$, *выполнена оценка*

$$|\partial^\mu f(z)| \le C\mathrm{dist}(z,\ \partial\Omega)^{\alpha-[\alpha]-1}, \quad z \in \Omega.$$

**Теорема 3.** *Пусть* $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ *– ограниченная область, удовлетворяющая условиям* (1)–(3), *функция* $f$ *лежит в* $A_C(\Omega)$, *функция* $f_0 \in C_0^1(\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{C}^n \setminus \Omega)$ *– непрерывное продолжение функции*

*$f$ вне $\Omega$, тогда*

$$f(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus\Omega} \frac{\bar{\partial} f_0(\xi) \wedge \omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle^n},\ z \in \Omega,$$

*где* $\omega(\xi) = \omega'(\rho'_\xi(\xi)) \wedge d\xi,\ \omega'(\eta) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \eta_k d\eta_{[k]}$.

**Доказательство.** Применим формулу Айзенберга [1, формула 8.5]:

$$f(z) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{f(\xi)\omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle^n}.$$

Далее (см. [2]):

$$d_\xi \left( \frac{\omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle^n} \right) = 0,$$

$$df(\xi) \wedge \omega(\xi) = \sum_{j=1}^{n} (f'_{\xi_j} d\xi_j + f'_{\bar{\xi}_j} d\bar{\xi}_j) \wedge \left( \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} d\bar{\rho}(\xi)_{[k]} \wedge d\xi \right)$$
$$= \bar{\partial} f \wedge \omega(\xi).$$

В итоге получаем:

$$f(z) = \lim_{r\to 0+} \int\limits_{\partial\Omega_r} \frac{f(\xi)\omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle^n} = \lim_{r\to 0+} \int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus\Omega_r} \frac{\bar{\partial} f_0(\xi) \wedge \omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle^n}$$
$$= \int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus\Omega} \frac{\bar{\partial} f_0(\xi) \wedge \omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle^n}.$$

□

**Теорема 4.** *Пусть область $\Omega$ удовлетворяет условиям (1)–(3), тогда для того, чтобы аналитическая в $\Omega$ функция $f$ лежала в классе $H^\alpha(\Omega)$ с показателем $\alpha \in (0,1)$, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое непрерывное продолжение $g$ функции $f$ в $\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Omega}$, что*

$$g \in C_0^1(\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Omega}), \quad |\bar{\partial} g(\xi)| \le c \operatorname{dist}(\xi,\ \partial\Omega)^{\alpha-1},\ \xi \in \mathbb{C}^n \setminus \bar{\Omega},$$

*для некоторой постоянной $c$, причём можно считать, что* $\operatorname{supp} g \subset \Omega_{\delta_0}$.

Для доказательства этой теоремы нам понадобятся следующие две леммы, дающие оценки для ядра интегрального представления в слоях $\Omega_{2r} \setminus \Omega_r$ (лемма 3) и $\Omega_r \setminus \Omega$ (лемма 4).

**Лемма 3.** *Для слоя $\Omega_{2r} \setminus \Omega_r$ выполнена оценка*

$$\int\limits_{\Omega_{2r}\setminus\Omega_r} \frac{1}{\left|\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle\right|^k} dm_{2n}(\xi) \le C_k r^{n-k+1}$$

*при* $0 < r < \frac{\delta_0}{2},\ k > n, z \in \bar{\Omega},\ \operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) < \delta_0$, *для некоторой постоянной* $\delta_0 > 0$.

**Доказательство.** Для простоты обозначим $W_h = W_{h,\delta_0},\ h > \delta_0 > 0$. Из отделённости функции $|\rho'_\xi(\xi)|$ от нуля в $\Omega_{\delta_0} \setminus \Omega_{-\delta_0}$ следует, что

$$\int\limits_{\Omega_{2r}\setminus\Omega_r} \frac{1}{\left|\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle\right|^k} dm_{2n}(\xi) \le C \int\limits_r^{2r} ds \int\limits_{\partial\Omega_s} \frac{d\sigma_s(\xi)}{|\left\langle \xi - z,\ n(\xi)\right\rangle|^k}.$$

Разобъём поверхность $\partial\Omega_s$ следующим образом:

$$\partial\Omega_s = \bigsqcup_{j=1}^{\infty}((W_{2^j r} \setminus W_{2^{j-1}r}) \cap \partial\Omega_s) \bigsqcup (W_r \cap \partial\Omega_s),$$

заметим, что $|\left\langle \xi - z,\ n(\xi)\right\rangle|^k \ge 2^{k(j-1)} r^k$ при $\xi \in W_{2^j r} \setminus W_{2^{j-1}r}$, и $|\left\langle \xi - z,\ n(\xi)\right\rangle| \ge \operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega_{\rho(\xi)}) \ge \operatorname{dist}(\partial\Omega_{\rho(\xi)},\ \partial\Omega) \ge c_4 r$ при $\xi \in W_r$. Значит,

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\partial\Omega_s} \frac{d\sigma_s(\xi)}{|\left\langle \xi - z,\ n(\xi)\right\rangle|^k} \\
&= \int\limits_{W_r\cap\partial\Omega_s} \frac{d\sigma_s(\xi)}{|\left\langle \xi - z,\ n(\xi)\right\rangle|^k} + \sum_{j=1}^{\infty} \int\limits_{(W_{2^j r}\setminus W_{2^{j-1}r})\cap\partial\Omega_s} \frac{d\sigma_s(\xi)}{|\left\langle \xi - z,\ n(\xi)\right\rangle|^k} \\
&\le r^{-k}\left(C\sigma_s(W_r \cap \partial\Omega_s) + \sum_{j=1}^{\infty} 2^{-k(j-1)} \sigma_s\big((W_{2^j r} \setminus W_{2^{j-1}r}) \cap \partial\Omega_s\big)\right) \\
&\qquad\qquad \le r^{n-k} c_{10}\left(c_4^{-1} + 2^k \sum_{j=1}^{\infty} 2^{(n-k)j}\right) \le C_k r^{n-k}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_{2r}\setminus\Omega_r} \frac{1}{\left|\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle\right|^k}\, dm_{2n}(\xi) \le C_k \int_r^{2r} r^{n-k} ds = C_k r^{n-k+1}. \qquad \square$$

**Лемма 4.** *Для слоя* $\Omega_r \setminus \Omega$ *выполнена оценка*:

$$\int\limits_{\Omega_r\setminus\Omega} \frac{\operatorname{dist}(\xi,\ \partial\Omega)^{\alpha-1}}{\left|\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle\right|^k} dm_{2n}(\xi) \le C_k r^{n-k+\alpha}$$

*при* $z \in \Omega,\ \operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) = r \le \frac{\delta_0}{2},\ \alpha > 0$ *и достаточно малой константе* $\delta_0 > 0$.

**Доказательство.** Будем действовать аналогично доказательству предыдущей леммы:

$$\int\limits_{\Omega_r\setminus\Omega} \frac{\operatorname{dist}(\xi,\ \partial\Omega)^{\alpha-1}}{\left|\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle\right|^k} dm_{2n}(\xi) \le C \int\limits_0^r s^{\alpha-1} ds \int\limits_{\partial\Omega_s} \frac{d\sigma_s(\xi)}{|\langle \xi - z,\ n(\xi)\rangle|^k},$$

так как $\operatorname{dist}(\xi,\ \partial\Omega) \asymp s$ при $\xi \in \partial\Omega_s$ и $|\rho'_\xi| > c_1$ в $\Omega_{\delta_0} \setminus \Omega_{-\delta_0}$. Повторяя рассуждение, дающее оценку интеграла по поверхности в предыдущей лемме, и учитывая при этом, что $|\langle \xi - z,\ n(\xi)\rangle| = \operatorname{dist}(z,\ T_\xi) \ge \operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) = r$, получаем следующую оценку:

$$\int\limits_{\partial\Omega_s} \frac{d\sigma_s(\xi)}{|\langle \xi - z,\ n(\xi)\rangle|^k} \le C r^{n-k}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\Omega_r\setminus\Omega} \frac{\operatorname{dist}(\xi,\ \partial\Omega)^{\alpha-1}}{\left|\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle\right|^k} dm_{2n}(\xi) \le C r^{n-k} \int\limits_0^r s^{\alpha-1} ds = \frac{C}{\alpha} r^{n-k+\alpha}.$$

$\square$

**Лемма 5.** *Пусть* $\Omega = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}$ *– ограниченная область, причём* $\rho \in C^2$ *и* $d\rho \ne 0$ *на* $\partial\Omega$. *Пусть функция* $g$ *принадлежит классу* $C^\alpha(\partial\Omega)$ *с показателем* $\alpha \in (0,\ 1)$, *тогда существует непрерывное продолжение* $g_1$ *функции* $g$ *в* $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ *такое, что*

$$g_1 \in C^1(\mathbb{C}^n \setminus \bar\Omega), \qquad |\bar\partial g_1(\xi)| \le C \operatorname{dist}(\xi,\ \partial\Omega)^{\alpha-1}.$$

**Доказательство.** При $\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) \le \delta_0$, где постоянная $\delta_0 > 0$ достаточно мала, существует только одна точка $\xi(z) \in \partial\Omega$, ближайшая к точке $z$. Определим функцию $\tilde{g}_0$ в $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ следующим образом:

$$\tilde{g}_0(z) = \begin{cases} g(\xi(z)), & \operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) \le \delta_0; \\ 0, & \operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) > \delta_0. \end{cases}$$

Получили кусочно-непрерывную функцию, определённую на $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$, причём она непрерывна при $\operatorname{dist}(z,\ \Omega) \le \delta_0$. Рассмотрим функцию $\chi \in C^\infty$, равную 1 при $\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) \le \frac{\delta_0}{2}$ и 0 при $\operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega) \ge \delta_0$, домножим $\tilde{g}_0$ на неё, получим непрерывную функцию $g_0 = \chi\tilde{g}_0$. Введём вспомогательные обозначения:

$$\delta(z) = \frac{1}{2}\operatorname{dist}(z,\ \Omega), \qquad B_z = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi - z| < \delta(z)\}.$$

Положим

$$g_1(z) = \frac{1}{m_{2n}(B_z)} \int\limits_{B_z} g_0(\xi) dm_{2n}(\xi).$$

Покажем, что функция $g_1$ удовлетворяет требованиям леммы.

1. Непрерывность функции $g_1(z)$ в области $\mathbb{C}^n \setminus \overline{\Omega}$ следует из непрерывности функции $g_0$ и непрерывности функции расстояния до замкнутого множества ($|\delta(z) - \delta(z')| \le \frac{1}{2}|z - z'|$).

Докажем непрерывность вплоть до границы. Рассмотрим последовательность $z_k \in \mathbb{C}^n \setminus \Omega$, сходящуюся к точке $\xi \in \partial\Omega$. Без ограничения общности считаем, что $\operatorname{dist}(z_k,\ \partial\Omega) < \frac{\delta_0}{2}$, положим $B_k := B_{z_k}$. Покажем, что $g_1(z_k) \to g(\xi)$.

Пусть $z \in B_k$, точка $\zeta \in \partial\Omega$ – ближайшая к точке $z$. Тогда

$$|\xi - \zeta| \le |\xi - z_k| + |z_k - z| + |z - \zeta| \le |\xi - z_k| + \delta(z_k) + 2\delta(z) \le |\xi - z_k| + 4\delta(z_k),$$

так как $z \in B_k$ и при этом $\delta(z) \le \delta(z_k) + \frac{1}{2}|z - z_k| < \frac{3}{2}\delta(z_k)$. Фиксируем число $\varepsilon > 0$, тогда найдётся такое число $\delta > 0$, что $|g(\xi) - g(\zeta)| < \varepsilon$ при $|\xi - \zeta| < \delta$. Последовательность $z_k$ сходится к точке $\xi$, следовательно, $|\xi - z_k| + 4\delta(z_k) < \delta$ при достаточно больших значениях индекса $k$. Откуда $|g_0(z) - g(\xi)| = |g(\zeta) - g(\xi)| < \varepsilon,\ z \in B_k$, и

$$|g_1(z_k) - g(\xi)| < \frac{1}{m_{2n}(B_k)} \int\limits_{B_k} |g_0(\xi) - g_0(z)| dm_{2n}(z) < \varepsilon.$$

2. Граница области $\Omega$ $C^2$-гладкая, следовательно, функция расстояния $\delta(z)$ $C^1$-гладкая в окрестности $\partial\Omega$ (см. [3]). Заметим, что $m_{2n}(B_z)$

$= c_n\delta(z)^{2n}$. Представим функцию $g_1(\zeta)$ в следующем виде:

$$g_1(\zeta) = g_0(z^*) + \frac{1}{m_{2n}(B_\zeta)} \int\limits_{B_\zeta} (g_0(z) - g_0(z^*))dm_{2n}(z), \quad z^* \in B_\zeta.$$

Пусть $D_j$ обозначает производную по $j$-й координате в $2n$-мерном пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда

$$D_j g_1(\zeta) = D_j \left(\frac{1}{m_{2n}(B_\zeta)}\right) \cdot \int\limits_{B_\zeta} (g_0(z) - g_0(z^*))dm_{2n}(z)$$
$$+ \frac{1}{m_{2n}(B_\zeta)} D_j(\delta(\zeta)) \cdot \int\limits_{S_\zeta} (g_0(z) - g_0(z^*))\gamma_j(z)d\sigma(z),$$

где $S_\zeta = \partial B_\zeta$, $\gamma_j(z)$ – угол между нормалью к сфере $S_\zeta$ в точке $z$ и $j$-й координатной осью, $\sigma$ – поверхностная мера на сфере.

Далее, $|D_j \frac{1}{m_{2n}(B_z)}| \leq \frac{C}{\delta(z)^{2n+1}}$, оценим разность $g_0(z) - g_0(z^*)$. Пусть точки $\xi, \xi^* \in \partial\Omega$ – ближайшие к $z$ и $z^*$, соответственно: $z = \xi + 2n(\xi)\delta(z)$, $z^* = \xi^* + 2n(\xi^*)\delta(z^*)$. Согласно утверждению 2, $|n(\xi) - n(\xi^*)| \leq c_3|\xi - \xi^*|$, тогда, считая, что $\delta(z^*) \leq \frac{1}{4c_3}$, получаем

$$|\xi - \xi^*| \leq |z - z^*| + 2|n(\xi) - n(\xi^*)|\delta(z^*) + 2|n(\xi)||\delta(z) - \delta(z^*)|$$
$$\leq 2|z - z^*| + \frac{1}{2}|\xi - \xi^*|.$$

Следовательно, $|\xi - \xi^*| \leq 4|z - z^*|$ и

$$|g_0(z) - g_0(z^*)| = |g(\xi) - g(\xi^*)| \leq C|\xi - \xi^*|^\alpha \leq C'|z - z^*|^\alpha.$$

Окончательно получаем, что для некоторой постоянной $C > 0$ справедлива оценка

$$|D_j g_1(\zeta)| \leq \frac{C}{\delta(\zeta)^{2n+1}} \int\limits_{B_\zeta} \delta(\zeta)^\alpha d\mu(z) + \frac{C}{\delta(\zeta)^{2n}} \int\limits_{S_\zeta} \delta(\zeta)^\alpha d\sigma(z) = \tilde{C}\delta(\zeta)^{\alpha-1}.$$

□

**Доказательство теоремы 4.** Лемма 5 доказывает необходимость, проверим достаточность. Достаточно показать выполнение оценки градиента функции $f$ из теоремы 2, воспользуемся представлением из теоремы 3:

$$D_j f(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^n \setminus \Omega} \bar{\partial} f_0(\xi) \wedge \omega(\xi) D_{z,\, j} \frac{1}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle^n},$$

где символ $D_j$ обозначает производную по $j$-й координате в $2n$-мерном пространстве $\mathbb{C}^n$. Тогда, в силу непрерывности и финитности функции $\bar{\partial} f_0$ и $C^2$-гладкости функции $\rho(\xi)$, производную функции $f$ можно оценить следующим образом:

$$|D_j f(z)| \leq C \int\limits_{\mathbb{C}^n \setminus \Omega} \frac{|\bar{\partial} f_0(\xi)| dm_{2n}(\xi)}{\left| \left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle \right|^{n+1}} \leq C \left( \int\limits_{\Omega_r \setminus \Omega} + \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_{2^k r} \setminus \Omega_{2^{k-1} r}} \right),$$

где $r = \operatorname{dist}(z,\ \partial\Omega)$. Далее, в силу леммы 4 и условия теоремы,

$$\int\limits_{\Omega_r \setminus \Omega} \frac{|\bar{\partial} f_0(\xi)| dm_{2n}(\xi)}{\left| \left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle \right|^{n+1}} \leq C r^{\alpha - 1}.$$

Заметим, что

$$|\bar{\partial} f(\xi_0)| \leq C \operatorname{dist}(\xi,\ \partial\Omega)^{\alpha-1} \leq C 2^{k(\alpha-1)} r^{\alpha-1},\ \xi \in \Omega_{2^k r} \setminus \Omega_{2^{k-1} r},$$

тогда из леммы 4 получаем оценку суммы:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_{2^k r} \setminus \Omega_{2^{k-1} r}} \frac{|\bar{\partial} f_0(\xi)| dm_{2n}(\xi)}{\left| \left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle \right|^{n+1}}$$
$$\leq C r^{\alpha-1} \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k(\alpha-1)} \int\limits_{\Omega_{2^k r} \setminus \Omega_{2^{k-1} r}} \frac{dm_{2n}(\xi)}{\left| \left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle \right|^{n+1}} \leq \tilde{C} r^{\alpha-1},$$

требуемое неравенство доказано, а вместе с ним и теорема. □

**Замечание 2.** При доказательстве достаточности в теореме 4 не использовалось то, что функция $g$ – непрерывное продолжение функции $f$. Достаточно найти интегральное представление функции $f$ из теоремы 3, т.е. представление $f(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^n \setminus \Omega} \frac{\bar{\partial} g(\xi) \wedge \omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi) \right\rangle^n}$ через некоторую функцию $g \in C_0^1(\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Omega})$ такую, что $|\bar{\partial} g(\xi)| \leq c\ \operatorname{dist}(\xi,\ \partial\Omega)^{\alpha-1}$, $\xi \in \mathbb{C}^n \setminus \bar{\Omega}$.

Отметим, что строго выпуклые области удовлетворяют условиям (1)–(3), приведём пример невыпуклой области, удовлетворяющей этим условиям.

**Теорема 5.** *Пусть*

$$\widetilde{\Omega}_m = \Big\{ z \in \mathbb{C}^2 : \\ \rho(z) = |z|^2 + \frac{2}{m(m-1)}\,(z_1^m + \bar{z}_1^m) - \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right) < 0 \,\Big\}, \quad (1)$$

*тогда при* $m \geq 8$ *у множества* $\widetilde{\Omega}_m$ *есть ограниченная компонента* $\Omega_m$, *удовлетворяющая условиям* (1)–(3), *при этом область* $\Omega_m$ *невыпукла.*

**Лемма 6.** *Рассмотрим уравнение*

$$\tilde{\rho}_m(r) = r^2 - \frac{4}{m(m-1)} r^m - \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right) = 0.$$

*Тогда при* $m \geq 8$ *уравнение имеет ровно два положительных корня, причём наименьший корень* $r_m$ *можно оценить следующим образом*:

$$1 + \frac{3}{m(m-3)} < r_m < 1 + \frac{6}{m(m-1)}.$$

**Доказательство.** Рассматриваемое уравнение имеет ровно два положительных корня, так как у производной функции $\tilde{\rho}_m(r)$ только один положительный корень, причём значение функции в этом корне положительно:

$$\tilde{\rho}'_m(r) = 2r - \frac{4}{m-1} r^{m-1} = 0, \quad r_0 = \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{1}{m-2}},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_m(r_0) &= \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{2}{m-2}} \left(1 - \frac{2}{m}\right) - \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right) \\ &= e^{\frac{2}{m-2}\ln\frac{m-1}{2}} \left(1 - \frac{2}{m}\right) - \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right) \\ &\geq \left(1 + \frac{2}{m-2}\ln\frac{m-1}{2}\right)\left(1 - \frac{2}{m}\right) - \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right) \\ &= \frac{2}{m}\left(\ln\frac{m-1}{2} - 1 - \frac{1}{m-1}\right) > 0, \quad m \geq 8, \end{aligned}$$

поскольку $\ln(x) > 1 + \frac{1}{2x}$, $x \geq 3.5$.

Для того, чтобы оценить сверху меньший корень функции $\tilde{\rho}_m$, достаточно найти точку, в которой эта функция принимает положительное значение. Оценим значение в точке $r'_m = 1 + \frac{6}{m(m-1)}$, заметив, что $(1+h)^m \le e^{hm}$,

$$\tilde{\rho}_m(r'_m) \ge 1 + \frac{12}{m(m-1)} - \frac{4e^{\frac{6}{m-1}}}{m(m-1)} - \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right)$$
$$= \frac{2}{m(m-1)}\left(5 - 2e^{\frac{6}{m-1}}\right) > 0,\ m \ge 8.$$

Оценим значение функции $\tilde{\rho}_m$ в точке $r = 1+h,\ h > 0:$

$$\tilde{\rho}_m(1+h)$$
$$< 1 + 2h + h^2 - \frac{4}{m(m-1)}(1 + mh + \frac{m(m-1)}{2}h^2) - \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right)$$
$$= 2\frac{m-3}{m-1}h - h^2 - \frac{6}{m(m-1)} < 0,\ h = \frac{3}{m(m-3)}.$$

Отсюда $r_m > 1 + \frac{3}{m(m-3)}$, и доказательство леммы завершено. $\square$

**Доказательство теоремы 5.** Из леммы 6 следует, что у множества $\widetilde{\Omega}_m$ есть ограниченная компонента связности $\Omega_m$, причем

$$\Omega_m = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \rho(z) < 0,\ |z_1| \le 1 + \frac{6}{m(m-1)}\right\}, \quad m \ge 8.$$

Условие (1) соблюдено, поскольку $|\xi_1| < \left(\frac{m-1}{2}\right)^{\frac{1}{m-2}}$ и

$$|\rho'_\xi(\xi)|^2 = |\bar{\xi}_1 + \frac{2}{m-1}\xi_1^{m-1}|^2 + |\xi_2|^2 \ge |\xi_1|^2|1 - \frac{2}{m-1}|\xi_1|^{m-2}|^2 > 0,$$
$$\xi \in \partial\Omega_m.$$

Далее,

$$T_\xi = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \left(\bar{\xi}_1 + \frac{2}{m-1}\xi_1^{m-1}\right)(\xi_1 - z_1) + \bar{\xi}_2(\xi_2 - z_2) = 0\right\}.$$

Проверим условия (2)–(3), т.е. строгую линейную выпуклость и положительность второго дифференциала на $T_\xi$.

Если вторая координата точки $\xi = (\xi_1,\ \xi_2) \in \partial\Omega_m$ нулевая, то

$$T_\xi = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : \left(\bar{\xi}_1 + \frac{2}{m-1}\xi_1^{m-1}\right)(\xi_1 - z_1) = 0\right\} = \left\{z \in \mathbb{C}^2 : z_1 = \xi_1\right\}.$$

Пусть точка $z$ лежит на пересечении границы области $\Omega_m$ и комплексной касательной гиперплоскости $T_\xi$, тогда $\xi_1 = z_1$ и

$$|z_1|^2 + \frac{2}{m(m-1)}\left(z_1^m + \bar{z}_1^m\right) - \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right) = 0,$$

а следовательно, $z_2 = 0$ и $z = \xi$.

При этом $d^2\rho\left[\frac{z-\xi}{|z-\xi|}\right] = 2 + 4\,\mathrm{Re}\left(z_1^{m-2}\left(\frac{z_1-\xi_1}{|z-\xi|}\right)^2\right) = 2$ при $z \in T_\xi$.

Пусть теперь $\xi_2 \neq 0$, введём коэффициент наклона:

$$\alpha = -\bar{\xi}_2^{-1}\left(\bar{\xi}_1 + \frac{2}{m-1}\xi_1^{m-1}\right).$$

При этом плоскость $T_\xi$ задаётся следующим образом:

$$T_\xi = \{z : z_2 - \xi_2 = \alpha(z_1 - \xi_1)\}.$$

Рассмотрим опять точку $z = (z_1,\ z_2)$, лежащую на пересечении $\partial\Omega_m \cap T_\xi$. Докажем, что тогда она совпадает с точкой $\xi$, точнее докажем, что в противном случае либо $\rho(z) > 0$, либо точка $z$ лежит на границе неограниченной части множества $\widetilde{\Omega}_m$, то есть $z \in \partial(\widetilde{\Omega}_m \setminus \Omega_m)$. Рассмотрим два случая: $|z_1| \leq |\xi_1|$ и $|z_1| \geq |\xi_1|$.

**Случай 1.** В случае, когда $|z_1| \leq |\xi_1|$, разложим $\rho(z)$ в точке $\xi$ по формуле Тейлора с остаточным членом в виде интеграла:

$$\begin{aligned}\rho(z) &= \rho(\xi) + 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\xi_1}(\xi_1 - z_1) + \frac{\partial\rho}{\partial\xi_2}(\xi_2 - z_2)\right)\\ &+ \int\limits_0^\tau (\tau - s)d^2\rho\left(\xi + \frac{s}{\tau}(z-\xi)\right)\left[\frac{z-\xi}{\tau}\right]ds\\ &= \int\limits_0^\tau (\tau - s)d^2\rho\left(\xi + \frac{s}{\tau}(z-\xi)\right)\left[\frac{z-\xi}{\tau}\right]ds, \qquad \text{где} \quad \tau = |z-\xi|.\end{aligned}$$

Если мы покажем, что

$$d^2\rho\left(\xi + \frac{s}{\tau}(z-\xi)\right)\left[\frac{z-\xi}{\tau}\right] > 0,\ z \neq \xi,$$

то получим, что $\rho(z) > 0$ при $z \neq \xi$, к тому же будет доказано условие (3). Проверим это утверждение:

$$d^2\rho(z)[w] = 4\,\mathrm{Re}(z_1^{m-2}w_1^2) + 2 \geq 2 - 4|z_1|^{m-2}|w_1|^2,\ |w| = 1.$$

При этом $|\xi_1 + \frac{s}{\tau}(z_1-\xi_1)| \le \max(|\xi_1|,|z_1|) = |\xi_1|$. Далее,

$$\tau^2 = |z-\xi|^2 = |z_1-\xi_1|^2 + |z_1-\xi_1|^2 = (1+|\alpha|^2)|z_1-\xi_1|^2,$$

$$\frac{1}{2}d^2\rho\left(\xi+\frac{s}{\tau}(z-\xi)\right)\left[\frac{z-\xi}{\tau}\right] \ge 1-2\left|\xi_1+\frac{s}{\tau}(z_1-\xi_1)\right|^{m-2}\left|\frac{z_1-\xi_1}{\tau}\right|^2$$
$$\ge 1-2|\xi_1|^{m-2}\frac{1}{1+|\alpha|^2}.$$

Заметим, что абсолютная величина коэффициента наклона зависит только от первой координаты точки $\xi$:

$$|\alpha|^2 = r^2\frac{1+\frac{4}{m-1}r^{m-2}\cos(m\varphi)+\frac{4}{(m-1)^2}r^{2(m-2)}}{1+\frac{2}{m(m-1)}-\frac{4}{m(m-1)}r^m\cos(m\varphi)-r^2}, \quad \xi_1 = re^{i\varphi}.$$

Откуда требуемое неравенство будет эквивалентно положительности функции $f(r)$ в области $\widehat{\Omega}$, где

$$\widehat{\Omega} = \Big\{r>0 : r<1+\frac{6}{m(m-1)},$$
$$1+\frac{2}{m(m-1)}-\frac{4}{m(m-1)}r^m\cos(m\varphi)-r^2>0\Big\}$$

и

$$\begin{aligned}
&f(r) = |\xi_2|^2\left(1+|\alpha|^2-2r^{m-2}\right)\\
&= 1+\frac{2}{m(m-1)}-\frac{4}{m(m-1)}r^m\cos(m\varphi)-r^2\\
&+r^2\left(1+\frac{4}{m-1}r^{m-2}\cos(m\varphi)+\frac{4r^{2(m-2)}}{(m-1)^2}\right)\\
&-2\left(1+\frac{2}{m(m-1)}\right)r^{m-2}+2r^m-\frac{8}{m(m-1)}r^{2(m-1)} = 1+\frac{2}{m(m-1)}\\
&-2\left(1+\frac{2}{m(m-1)}\right)r^{m-2}+2\left(1-\frac{2}{m(m-1)}\cos(m\varphi)+\frac{2}{m-1}\cos(m\varphi)\right)r^m\\
&+\frac{4}{m-1}\left(\frac{1}{m-1}+\frac{2}{m}\cos(m\varphi)\right)r^{2(m-1)}.
\end{aligned}$$

Продифференцируем это выражение:

$$f'(r) = -2(m-2)r^{m-3}\left(1 + \frac{2}{m(m-1)} - \frac{m+2\cos(m\varphi)}{m-2}r^2 - \frac{m+2(m-1)\cos(m\varphi)}{m-2}\frac{4}{m(m-1)}r^m\right).$$

Заметим, что

$$1 + \frac{2}{m(m-1)} - \frac{m+2\cos(m\varphi)}{m-2}r^2 - \frac{m+2(m-1)\cos(m\varphi)}{m-2}\frac{4}{m(m-1)}r^m \leq \left(1 + \frac{2}{m(m-1)} - r^2 - \frac{4}{m(m-1)}\cos(m\varphi)r^m\right).$$

Последнее выполнено, так как

$$\frac{m+2\cos(m\varphi)}{m-2} \geq 1, \quad \frac{m+2(m-1)\cos(m\varphi)}{m-2} \geq \cos(m\varphi).$$

Таким образом, функция $f'(r)$ имеет единственный корень $r_0$ в множестве $\widehat{\Omega}$ и функция $f(r)$ достигает минимума в этой области в точке $r = r_0$, так как при этом $f'(r) < 0$ при $r < r_0$; $f'(r) > 0$ при $r > r_0$.

Заметим, что $r_0^{m-2} < \frac{m-1}{2}$, откуда

$$\begin{aligned} f(r_0) &= 1 + \frac{2}{m(m-1)} - 2r_0^m(m+2\cos(m\varphi))\frac{2}{m(m-2)} \\ &+ \frac{4}{m(m-1)}\frac{m+2(m-1)\cos(\varphi)}{(m-1)(m-2)}r_0^{2(m-1)} \\ &= \frac{m+2\cos(m\varphi)}{m-2}r_0^2\left(1 - \frac{2}{m}r_0^{m-2}\right) \\ &\frac{4}{m(m-1)}\frac{m+2(m-1)\cos(\varphi)}{(m-2)}r_0^m\left(1 - \frac{2}{m-1}r_0^{m-2}\right) \\ &\geq r_0^2\left(1 + \frac{4r_0^{m-2}}{m(m-1)}\cos(m\varphi)\right)\left(1 - \frac{2}{m-1}r_0^{m-2}\right) > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, $f(r) \geq f(r_0) > 0$, $r \in \widehat{\Omega}$.

**Случай 2.** В случае, когда $|z_1| > |\xi_1|$, представим значение функции $\rho$ в точке $z$ следующим образом, учитывая, что точки $z$ и $\xi$ лежат на границе области $\Omega_m$:

$$
\begin{aligned}
&\rho(z) = |\xi + (z-\xi)|^2 + \frac{2}{m(m-1)}\left(z_1^m + (\bar{z}_1)^m\right) \\
&- \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right) = |\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\bar{\xi}_1(z_1-\xi_1) + \bar{\xi}_2(z_2-\xi_2)) \\
&+ |z_1-\xi_1|^2 + |z_2-\xi_2|^2 + \frac{4}{m(m-1)}\,\mathrm{Re}(z_1^m) \\
&- \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right) = \left(|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \frac{4\,\mathrm{Re}\,\xi_1^m}{m(m-1)} - \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right)\right) \\
&+ 2\,\mathrm{Re}\left(\left(\bar{\xi}_1 + \frac{2}{m-1}\xi_1^{m-1}\right)(z_1-\xi_1) + \bar{\xi}_2(z_2-\xi_2)\right) \\
&+ \frac{4}{m(m-1)}\,\mathrm{Re}\left(z_1^m - mz_1\xi_1^{m-1} + (m-1)\xi_1^m\right) \\
&+ |(z_1-\xi_1)|^2 + |(z_2-\xi_2)|^2 = (1+|\alpha|^2)|z_1-\xi_1|^2 + \frac{4}{m(m-1)} \\
&\mathrm{Re}\left(z_1^m - mz_1\xi_1^{m-1} + (m-1)\xi_1^m\right) \\
&= (1+|\alpha|^2)(t^2 + r^2 - 2rt\cos(\theta)) \\
&+ \frac{4}{m(m-1)}\left(t^m\cos(m(\varphi+\theta)) - mtr^{m-1}\cos(m\varphi+\theta)\right. \\
&\left.+(m-1)\cos(m\varphi)\right),
\end{aligned}
$$

где $\xi_1 = re^{i\varphi},\ z_1 = te^{i\psi},\ \theta = \psi - \varphi$.

Представим значение $\rho(z)$ в виде суммы: $\rho(z) = g(t) + 2tg_1(t)$, где

$$
\begin{aligned}
g(t) &= (1+|\alpha|^2)(t-r)^2 + \frac{4\cos(m\varphi)}{m(m-1)}(t^m - mr^{m-1}t + (m-1)r^m), \\
g_1(t) &= (1+|\alpha|^2)r(1-\cos(\theta)) \\
&\quad + \frac{2}{m(m-1)}\left(t^{m-2}(\cos(m\psi) - \cos(m\varphi))\right. \\
&\qquad\qquad \left.-mr^{m-1}(\cos(m\varphi+\theta) - \cos(m\varphi))\right).
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{gathered}
g(r) = 0; \qquad g'(r) = 0; \\
g''(t) = 2(1+|\alpha|^2 + 2t^{m-2}\cos(m\varphi)).
\end{gathered}
$$

Следовательно, $g''(r) = 2(1+|\alpha|^2+2r^{m-2}\cos(m\varphi)) > 0$, согласно утверждению, доказанному при рассмотрении случая $|\xi_1| \geq |z_1|$, откуда $g(t) > 0$ в некоторой окрестности точки $r$. Кроме того, функция $g$ имеет не более одного положительного корня при $t > r$. В случае, когда $\cos(m\varphi) \geq 0$, корня нет и функция $g(t)$ положительна при $t > r$. В случае, когда $\cos(m\varphi) < 0$, корень один и

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{t\to\infty} g'(t) = \lim_{t\to\infty} g''(t) = -\infty,$$

причём функции $g'(t)$ и $g(t)$ имеют ровно по одному корню при $t > r$. Это означает, что в направлении $\theta = 0$ плоскость $T_\xi$ пересекает границу ограниченной компоненты $\Omega_m$ только в точке $\xi$.

Функция $g_1(t)$ также неотрицательна, так как $g(r) \geq 0$ согласно первому случаю ($|z_1| = |\xi_1|$). Следовательно, $g_1(t)$ также имеет не больше одного корня на луче $t > r$ и в случае, когда он есть, стремится к $-\infty$ при $t \to \infty$, а значит плоскость $T_\xi$ и в направлениях $\theta \neq 0$ пересекает ограниченную компоненту только в точке $\xi$.

Таким образом, проверка условий (1)–(3) завершена.

Покажем, что область $\Omega_m$ невыпукла, для этого рассмотрим второй дифференциал:

$$d^2\rho(z)[w] = 2|w|^2 + 4\,\mathrm{Re}(z_1^{m-2}w_1^2),$$

в качестве $z$ возьмём точку $z_m = (r_m,\ 0)$, где $r_m$ – корень уравнения $\rho(z_m) = r_m^2 + \frac{4}{m(m-1)}r_m^m - \left(1 + \frac{2}{m(m-1)}\right) = 0$, эта точка лежит на границе области $\Omega_m$ и $r_m^{m-2} > \frac{1}{2}$.

Рассмотрим вектор $w = (i,\ 0)$, принадлежащий (вещественной) касательной плоскости в этой точке, тогда

$$d^2\rho(z_m)[w] = 2 - 4r_m^{m-2} < 0.$$

Таким образом, второй дифференциал в точке $z_m$ принимает отрицательные значения, следовательно, область невыпукла. $\square$

**Теорема 6.** *Пусть область $\Omega$ удовлетворяет условиям* (1)–(3), $g \in C^\alpha(\partial\Omega)$ *с показателем* $0 < \alpha < 1$, *применим к функции $g$ оператор продолжения в* $\Omega$:

$$f(z) = Kg(z) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{g(\xi)\omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle^n}.$$

*Тогда $f \in H^\alpha(\Omega)$, т.е. $K : C^\alpha(\partial\Omega) \to H^\alpha(\Omega)$.*

**Доказательство.** По лемме 5 существует непрерывное продолжение $g_1$ функции $g$ в $\mathbb{C}^n \setminus \Omega$ такое, что

$$g_1 \in C^1(\mathbb{C}^n \setminus \bar{\Omega}), \quad |\overline{\partial} g_1(\xi)| \leq \operatorname{dist}(\xi,\ \partial\Omega)^{\alpha-1}.$$

Аналогично доказательству теоремы 3 имеем:

$$f(z) = \int\limits_{\partial\Omega} \frac{g(\xi)\omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle^n} = \lim_{r\to 0+} \int\limits_{\partial\Omega_r} \frac{g_1(\xi)\omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle^n}$$
$$= \lim_{r\to 0+} \int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus\Omega_r} \frac{\bar{\partial} g_1(\xi)\wedge\omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle^n} = \int\limits_{\mathbb{C}^n\setminus\Omega} \frac{\bar{\partial} g_1(\xi)\wedge\omega(\xi)}{\left\langle \xi - z,\ \rho'_\xi(\xi)\right\rangle^n}.$$

Тогда, в силу замечания 2 к теореме 4, функция $f$ будет принадлежать классу $H^\alpha(\Omega)$. □

## Литература


1. Л. А. Айзенберг, Л. П. Южаков, *Интегральные представления и вычеты в комплексном анализе.* Наука (1979).
2. Г. М. Хенкин, *Метод интегральных представлений в комплексном анализе. Комплексный анализ – многие переменные*–1.— Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления **7** (1985), 23–124, ВИНИТИ.
3. Д. Гилбарг, Н. Трудингер, *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.* Наука (1989).
4. У. Рудин, *Теория функций в единичном шаре из* $\mathbb{C}^n$. Мир, М. (1984).



Rotkevich A. Aizenberg formula in nonconvex domains and some its applications.

The paper concerns the operator determined by the kernel of the Aizenberg integral representation for holomorphic functions. A special class of domains such that this operator acts from $C^\alpha(\partial\Omega)$ to $H^\alpha(\Omega)$ is introduced. An example of a nonconvex domain that belongs to this class is described.



СПбГУ, Лаборатория им. П.Л.Чебышева,
14 линия В.О., д. 29Б,
Санкт-Петербург 199178, Россия
*E-mail*: rotkevichas@gmail.com


Поступило 17 мая 2011 г.