Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

П. А. Мозоляко

ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ ТОЧЕК БУРГЕЙНА БОРЕЛЕВСКОГО ЗАРЯДА НА ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРЯМОЙ

§1. Введение

Зарядом мы называем счетно аддитивную вещественную функцию множества, заданную на борелевской σ-алгебре прямой $\mathbb{R}$; неотрицательный заряд мы называем мерой.

С функцией Φ, заданной на $\mathbb{R}$, свяжем семейство функций $\{\Phi_{(y)}\}_{y\in(0,1]}$, полагая

$$\Phi_{(y)}(t) = \frac{1}{y}\Phi\left(\frac{t}{y}\right), \quad y > 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Нам понадобится ядро Пуассона P (для верхней полуплоскости $\mathbb{R}^2_+$)

$$P(t) = \frac{1}{\pi(1+t^2)}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Каждому заряду μ отвечает гармоническая в $\mathbb{R}^2_+$ функция u^μ,

$$u^\mu(x,y) = \left(\mu * P_{(y)}\right)(x), \quad y > 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

(знак $*$ обозначает свертку на $\mathbb{R}$). *Вертикальной вариацией* заряда μ в точке $x \in \mathbb{R}$ мы называем вариацию функции $y \mapsto u^\mu(x,y)$ на промежутке $(0,1]$; мы обозначаем ее символом $(\mathrm{Vvar}\,\mu)(x)$:

$$(\mathrm{Vvar}\,\mu)(x) = \int_0^1 \left|\frac{\partial u^\mu(x,y)}{\partial y}\right| dy.$$

Ключевые слова: вертикальная вариация заряда, точка Бургейна, средняя вариация заряда.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

Средней вариацией заряда μ в точке $x \in \mathbb{R}$ мы называем величину

$$(\operatorname{Mvar}\mu)(x) := \int\limits_0^1 \left(\left|\mu * \frac{\partial}{\partial y}P_{(y)}\right| * P_{(y)}\right)(x)\,dy = \int\limits_0^1 \left(\left|\frac{\partial u^\mu(x,y)}{\partial y}\right| * P_{(y)}\right)(x)\,dy.$$

Средняя вариация заряда неявно присутствует в работах [2, 1], а также в [3], где она участвует в важных оценках сверток зарядов с аппроксимативными единицами (заметим, что $\operatorname{Vvar}\mu \le 2\operatorname{Mvar}\mu$).

Определение 1. *Если* $\operatorname{Mvar}\mu(x) < \infty$*, то x называется точкой Бургейна (B-точкой) заряда μ (а если заряд μ абослютно непрерывен по мере Лебега, то x называаается B-точкой функции $\frac{d\mu}{dx}$).*

В [1] доказано, что хаусдорфова размерность множества B-точек меры μ в любом невырожденном интервале равна единице.

В данной статье мы покажем, что в определении B-точек свертку $\mu * \frac{\partial}{\partial y}P_{(y)}$ можно заменить на $\mu * \Psi_y$, где $\{\Psi_y\}_{y\in(0,1]}$ – некоторое семейство функций с нулевым средним, $\int\limits_{\mathbb{R}} \Psi_y(x)\,dx = 0$ (см. ниже следствие 3.1).

Потребность в различных вариантах определения B-точек возникает в связи с задачей описания B-точек множеств канторовского типа (точнее, их характеристических функций, см. [4, 5]), а также в связи с некоторыми характеристиками B-точек в терминах теории всплесков (см. [3]).

В заключение сделаем одно замечание о функциях $\Phi_{(y)}$.

Предложение 1.1. *Пусть* $\Phi \in C^1(\mathbb{R})$ *и* $\Phi(x) = o(\frac{1}{x})$ *при* $x \to \infty$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial \Phi_{(y)}}{\partial y}(x)\,dx = 0, \quad y > 0,$$

интеграл понимается как $\lim\limits_{\substack{A\to+\infty\\ B\to-\infty}} \int\limits_B^A \frac{\partial\Phi_{(y)}}{\partial y}(x)\,dx$.

Символом $\widehat{F}$ будем обозначать преобразование Фурье функции F:

$$\widehat{F}(\tau)=\int\limits_{\mathbb{R}} F(x)e^{-2\pi i x\tau}\,dx, \quad \tau\in\mathbb{R}.$$

В пункте 2 мы докажем теорему об оценке величин вида $\mathrm{Vvar}\,\mu$.

Следствие 3.2 – заготовка для последующего описания B-точек множества канторовского типа (см. [5]).

Следствия 3.1, 3.3 и 3.4 будут использованы при переписывании определения точек Бургейна в терминах теории всплесков.

§2. Замена ядра в операторе свертки

При $y>0$ положим

$$I_y=\left[-\frac{1}{y},-\frac{1}{2y}\right]\bigcup\left[\frac{1}{2y},\frac{1}{y}\right], \quad y>0. \tag{1}$$

Пусть $\{\Phi_y\}_{y\in(0,1]}$, $\{\Psi_y\}_{y\in(0,1]}$ – семейства функций класса $L^1(\mathbb{R})$. Предположим, что при любом $y\in(0,1]$ $\widehat{\Phi_y}$, $\widehat{\Psi_y}\in C^2(\mathbb{R}\setminus[-1,1])$, $\widehat{\Phi_y}\in L^1(\mathbb{R})$, и $|\widehat{\Psi_y}|>c_y>0$ на I_y. Положим

$$W_y^\delta=\int\limits_{I_y}\left(\left|\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right|+\left|\tau\cdot\left(\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right)'\right|+\left|\tau^2\cdot\left(\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right)''\right|\right)d\tau. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть μ – заряд на $\mathbb{R}$. При любых $\delta\in(0,1]$ и $x\in\mathbb{R}$ верно неравенство*

$$\begin{aligned}&|\mu*\Phi_\delta|(x)\\ &\le C\bigg(\int\limits_{-1}^{1}|\widehat{\mu}|(\tau)|\widehat{\Phi_\delta}|(\tau)\,d\tau+C\int\limits_{0}^{1}W_y^\delta\left(|\mu*\Psi_y|*P_{(y)}\right)(x)\,dy\bigg),\end{aligned} \tag{3}$$

где C – абсолютная положительная постоянная.

Следует отметить, что теорема 1 представляет собой интегральный аналог оценок норм функции через норму диадических блоков ее ряда Фурье (в духе L^p-оценок Литтлвуда–Пэли).

Доказательство. Заметим, что из суммируемости функций Φ_δ и $\widehat{\Phi_\delta}$ следует, что $\Phi_\delta \in C(\mathbb{R})$, $\lim\limits_{x\to\infty} \Phi_\delta(x) = 0$, а свертку $\Phi_\delta * \mu$ можно понимать так:

$$(\mu * \Phi_\delta)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \Phi_\delta(x-t)\, d\mu(t), \quad x \in \mathbb{R}.$$

При этом $\mu * \Phi_\delta \in L^1(\mathbb{R})$, так что

$$(\mu * \Phi_\delta)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\Phi_\delta}(\tau)\widehat{\mu}(\tau)e^{2\pi i x\tau}\, d\tau, \quad x \in \mathbb{R}.$$

В последнем интеграле выделим "блок", отвечающий множеству I_y. Для этого рассмотрим функцию Σ_1, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{supp}\Sigma_1 \subset [-1,1];\\
&0 \le \Sigma_1 \le 1;\\
&\Sigma_1 \in C^\infty(\mathbb{R});\\
&|\Sigma_1'| + |\Sigma_1''| + |\Sigma_1'''| \le C(\Sigma_1);\\
&\Sigma_1(\tau) \equiv 1, \quad \tau \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right].
\end{aligned} \tag{4}$$

Положим теперь

$$\sigma_y(\tau) = \frac{\partial \Sigma_1(y\tau)}{\partial y} = \tau \cdot \Sigma_1'(\tau y), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad y \in (0,1]. \tag{5}$$

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&-\int\limits_0^1 \sigma_y(\tau)\, dy + \Sigma_1(\tau) \equiv 1;\\
&\operatorname{supp}\sigma_y \subset I_y, \quad y \in (0,1).
\end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке свертки $\mu * \Phi_\delta$, положим

$$\begin{aligned} J &= \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\mu}(\tau)\widehat{\Phi_\delta}(\tau)e^{-2\pi i x\tau}\,d\tau \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\Sigma_1(\tau) - \int\limits_0^1 \sigma_y(\tau)\,dy\right)\widehat{\mu}(\tau)\widehat{\Phi_\delta}(\tau)e^{-2\pi i x\tau}\,d\tau \\ &= -\int\limits_0^1 \int\limits_{\mathbb{R}} \sigma_y(\tau)\widehat{\mu}(\tau)\widehat{\Phi_\delta}(\tau)e^{-2\pi i x\tau}\,d\tau\,dy \\ &+ \int\limits_{\mathbb{R}} \Sigma_1(\tau)\widehat{\mu}(\tau)\widehat{\Phi_\delta}(\tau)e^{-2\pi i x\tau}\,d\tau = J_2 + J_1. \end{aligned} \tag{6}$$

Оценим $|J_1|$:

$$|J_1| \le \int\limits_{-1}^{1} |\widehat{\mu}|(\tau)|\widehat{\Phi_\delta}|(\tau)\,d\tau. \tag{7}$$

Чтобы оценить $|J_2|$, воспользуемся следующим фактом.

Лемма 1. *Пусть функция $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ с ограниченным носителем удовлетворяет следующим условиям*:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\psi|(\tau)\,d\tau \le \frac{C}{r}; \tag{8a}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |\psi''|(\tau)\,d\tau \le C\cdot r, \quad r > 0. \tag{8b}$$

Тогда

$$|\widehat{\psi}|(t) \le C_1 P_{(r)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Доказательство. При любом $t \in \mathbb{R}$ справедливы неравенства

$$t^2|\widehat{\psi}|(t) \le C\int\limits_{\mathbb{R}} |\psi''|(\tau)\,d\tau \le C_2\cdot r;$$

$$|\widehat{\psi}|(t) \le \int\limits_{\mathbb{R}} |\psi|(\tau)\,d\tau \le \frac{C}{r},$$

так что

$$(r^2+t^2)|\widehat{\psi}|(t) \le C_1 r, \quad t \in \mathbb{R}. \qquad \square$$

Запишем тождество

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \sigma_y(\tau)\widehat{\mu}(\tau)\widehat{\Phi_\delta}(\tau)e^{-2\pi i x\tau}\,d\tau \\ = \int\limits_{\operatorname{supp}\sigma_y} \widehat{\mu}(\tau)\widehat{\Psi_y}(\tau)\left(\frac{\sigma_y(\tau)}{\tau}\right)\left(\tau\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right)e^{-2\pi i x\tau}\,d\tau. \tag{9}$$

Чтобы воспользоваться леммой 1, мы подготовим следующие оценки

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\sigma_y}\left|\tau\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right| \le \frac{C}{y}W_y^\delta; \tag{10a}$$

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\sigma_y}\left|\left(\tau\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right)''\right| \\ \le \int\limits_{\operatorname{supp}\sigma_y}\left(2\left|\left(\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right)'\right| + \left|\tau\left(\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right)''\right|\right) \le CyW_y^\delta \tag{10b}$$

для некоторой положительной константы $C = C(\Sigma_1)$.

Заканчивая подготовку к оценке величины J_2, мы сгладим функции $\chi_{\operatorname{supp}\sigma_y}\cdot\left(\tau\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right)$. Определим (при фиксированных δ и y) функцию $\psi_{\delta,y}\in C^2(\mathbb{R})$ так, чтобы она удовлетворяла следующим условиям

$$\begin{aligned} &\operatorname{supp}\psi_{\delta,y}\subset\left[-\frac{2}{y},-\frac{1}{4y}\right]\bigcup\left[\frac{1}{4y},\frac{2}{y}\right]; \\ &\psi_{\delta,y}(\tau) := \tau\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)},\quad \tau\in\operatorname{supp}\sigma_y; \\ &\int\limits_{\mathbb{R}}|\psi_{\delta,y}|(\tau)\,d\tau \le \tilde{C}\frac{1}{y}W_y^\delta; \\ &\int\limits_{\mathbb{R}}|\psi'_{\delta,y}|(\tau)\,d\tau \le \tilde{C}W_y^\delta; \\ &\int\limits_{\mathbb{R}}|\psi''_{\delta,y}|(\tau)\,d\tau \le \tilde{C}yW_y^\delta, \end{aligned} \tag{11}$$

мы всегда можем так сделать (достаточно свернуть $\frac{\widehat{\Phi_\delta}}{\widehat{\Psi_y}} \cdot \chi_{\operatorname{supp}\sigma_y}$ с каким-нибудь гладким ядром с компактным носителем); при этом константа $\tilde{C}$ получается как небольшое увеличение константы C из (10).

Учитывая (9), мы имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \sigma_y(\tau)\widehat{\mu}(\tau)\widehat{\Phi_\delta}(\tau)e^{-2\pi i x\tau}\,d\tau = \int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\mu}(\tau)\frac{\sigma_y(\tau)}{\tau}\widehat{\Psi_y}(\tau)\psi_{\delta,y}(\tau)e^{-2\pi i x\tau}\,d\tau.$$

Применяя лемму 1 к функциям $\psi_{\delta,y}$ и $\frac{\sigma_y(\tau)}{\tau}$ и учитывая (11), получаем

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \sigma_y(\tau)\widehat{\mu}(\tau)\widehat{\Phi_\delta}(\tau)e^{-2\pi i x\tau}\,d\tau\right| \\ &\le CW_y^\delta\left(|\mu*\Psi_y|*P_{(y)}*P_{(y)}\right)(x), \quad y\in(0,1),\end{aligned} \tag{12}$$

и

$$\begin{aligned}&\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \widehat{\mu}(\tau)\widehat{\Phi_\delta}(\tau)e^{-2\pi i x\tau}\,d\tau\right| \\ &= \left|\int\limits_{\mathbb{R}}\left(\Sigma_1(\tau)-\int\limits_0^1\sigma_y(\tau)\,dy\right)\widehat{\mu}(\tau)\widehat{\Phi_\delta}(\tau)e^{-2\pi i x\tau}\,d\tau\right| \\ &\le C\int\limits_0^1 W_y^\delta\left(|\mu*\Psi_y|*P_{(y)}\right)(x)\,dy + \int\limits_{-1}^1|\widehat{\mu}|(\tau)|\widehat{\Phi_\delta}|(\tau)\,d\tau.\end{aligned}$$

Теорема доказана. □

§3. Замена ядра Пуассона в средней вариации.

Следствие 3.1. *Пусть функция Φ удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{aligned}&\Phi\in L^1(\mathbb{R});\\ &\widehat{\Phi}\in C^3(\mathbb{R});\\ &\left|\widehat{\Phi}(\tau)-\widehat{\Phi}\left(\frac{\tau}{2}\right)\right|\ge C_1, \quad |\tau|\in\left[\frac14,\frac34\right];\\ &\int\limits_{\mathbb{R}}\left(|\tau\widehat{\Phi}'|(\tau)+|\tau|^2|\widehat{\Phi}''|(\tau)+|\tau|^3|\widehat{\Phi}'''|(\tau)\right)d\tau<\infty,\end{aligned} \tag{13}$$

где C_1 – положительная постоянная.

Тогда для любого заряда μ на $\mathbb{R}$ верна оценка

$$\begin{aligned}&\frac{1}{C}\int\limits_0^1\left(\left|\mu*\frac{\partial}{\partial y}\Phi_{(y)}\right|*P_{(y)}\right)(x)\,dy\le(\operatorname{Mvar}\mu)(x)+1\\&\le C\left(\int\limits_0^1\left(\left|\mu*\frac{\partial}{\partial y}\Phi_{(y)}\right|*P_{(y)}\right)(x)\,dy+1\right),\quad x\in\mathbb{R},\end{aligned}\tag{14}$$

где $C=C(C_1,\Phi)>1$.

Замечание. Отметим, что функции $\frac{\partial}{\partial y}\Phi_{(y)}$ имеют нулевое среднее (см. предложение 1.1).

Доказательство этого (и остальных) утверждений следует одному и тому же рассуждению – исходя из условия, мы определяем функции Φ_δ и Ψ_y, – в данном случае (для доказательства левого неравенства) мы полагаем $\Phi_\delta:=\frac{\partial}{\partial\delta}\Phi_{(\delta)}$, $\Psi_y:=\frac{\partial}{\partial y}P_{(y)}$, – и затем применяем теорему 1. После этого обычно остается проверить, что

$$\int\limits_0^1 W_y^\delta P_{(y+\delta)}d\delta\le CP_{(y)},\quad y\in(0,1].$$

В качестве примера мы приведем доказательство следствия 3.2, специфическая формулировка которого приспособлена к потребностям доказательства теоремы, описывающей B-точки характеристических функций множеств канторовского типа ([4, 5]).

Следствие 3.2. *Пусть задана монотонно убывающая последовательность положительных чисел $\varepsilon_j, j\in\mathbb{Z}_+$, таких что*

$$\begin{aligned}&\varepsilon_j\in[A\cdot2^{-j},2^{-j}],\quad 0<A<1,\quad j\in\mathbb{N};\\&\varepsilon_0=1.\end{aligned}\tag{15}$$

Пусть функция ϕ, заданная на $\mathbb{R}$, удовлетворяет следующим условиям:

$$\phi \in L^1(\mathbb{R}); \tag{16a}$$

$$\widehat{\phi} \in C^2(\mathbb{R}); \tag{16b}$$

$$\widehat{\phi}(0) = 0; \tag{16c}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left(|\widehat{\phi}(\tau)| + |\tau \widehat{\phi}'(\tau)| + |\tau^2 \widehat{\phi}''(\tau)| \right) \, d\tau < \infty; \tag{16d}$$

$$|\widehat{\phi}|(\tau) \geq C, \quad |\tau| \in [\tfrac{A}{4}, \tfrac{3}{4}]. \tag{16e}$$

Определим функции $\phi_j, j \in \mathbb{Z}$, *следующим образом*

$$\phi_j(t) = \frac{1}{\varepsilon_j} \phi \left(\frac{t}{\varepsilon_j} \right)$$

и для заряда μ *на* $\mathbb{R}$ *положим*

$$B_{\mu,\phi} = \sum_{j \in \mathbb{Z}_+} |\mu * \phi_j| * P_{(2^{-j})}.$$

Тогда для любого заряда μ *на* $\mathbb{R}$ *верна оценка*

$$\frac{1}{C} B_{\mu,\phi} \leq \operatorname{Mvar} \mu + 1 \leq C(B_{\mu,\phi} + 1), \tag{17}$$

где $C = C(A, \phi)$ *– положительная константа.*

Доказательство. Положим

$$\tilde{\Phi}_y(t) = \phi_j(t), \quad y \in (\varepsilon_j, \varepsilon_{j-1}], \ j \in \mathbb{N}.$$

Учитывая, что

$$P_{(y)} \asymp P_{(2^{-j})}, \quad y \in (\varepsilon_j, \varepsilon_{j-1}],$$

мы получаем, что достаточно доказать неравенства

$$\int\limits_0^1 \left| \mu * \tfrac{1}{y} \tilde{\Phi}_y \right| * P_{(y)} \leq C(\operatorname{Mvar} \mu + 1); \tag{18a}$$

$$\operatorname{Mvar} \mu \leq C \left(\int\limits_0^1 \left| \mu * \tfrac{1}{y} \tilde{\Phi}_y \right| * P_{(y)} + 1 \right) \tag{18b}$$

для некоторой положительной константы $C = C(\phi)$.
Докажем сначала оценку (18a).

Применим теорему 1 с $\Phi_y := \tilde{\Phi}_y$ и $\Psi_y := \frac{\partial}{\partial y} P_{(y)}$. Мы имеем неравенство

$$|\mu * \Phi_\delta|(x) \le \int\limits_{-1}^{1} |\widehat{\mu}|(\tau)|\widehat{\Phi_\delta}|(\tau)\,d\tau + C\int\limits_{0}^{1} W_y^\delta \left(|\mu * \Psi_y| * P_{(y)}\right)(x)\,dy,$$

$$\delta \in (0,1], \quad x \in \mathbb{R}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}\int\limits_0^1 \left|\mu * \frac{1}{\delta}\Phi_\delta\right| * P_{(\delta)}\,d\delta &\le \int\limits_0^1 \frac{1}{\delta}\int\limits_{-1}^{1} |\widehat{\mu}|(\tau)|\widehat{\Phi_\delta}|(\tau)\,d\tau\,d\delta \\ &+ C\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \frac{1}{\delta} W_y^\delta |\mu * \Psi_y| * P_{(y+\delta)}\,dy\,d\delta.\end{aligned} \tag{19}$$

Нам, таким образом, нужно показать, что

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\delta} W_y^\delta P_{(y+\delta)}\,d\delta \le C P_{(y)}, \quad y \in (0,1], \tag{20}$$

и

$$\int\limits_0^1 \frac{1}{\delta}\int\limits_{-1}^{1} |\widehat{\mu}|(\tau)|\widehat{\Phi_\delta}|(\tau)\,d\tau\,d\delta \le C.$$

Последнее неравенство следует из того, что $\widehat{\Phi_\delta} = \widehat{\phi}(0) = 0$, и из дифференцируемости функции $\widehat{\phi}$ в нуле, т.е.

$$\int\limits_{-1}^{1} |\widehat{\mu}|(\tau)\int\limits_0^1 \frac{1}{\delta}|\widehat{\Phi_\delta}|(\tau)\,d\delta\,d\tau \le \int\limits_{-1}^{1} |\widehat{\mu}|(\tau)\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\frac{\widehat{\phi}(t)}{t}\right|\,dt\,d\tau < C.$$

Переписывая (2), получаем

$$\begin{aligned} W_y^\delta &= \int\limits_{I_y} \left(\left|\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right| + \left|\tau\cdot\left(\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right)'\right| + \left|\tau^2\cdot\left(\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)}\right)''\right| \right)\,d\tau \\ &\le C\int\limits_{I_y} \left(\left|\frac{1}{\tau}\widehat{\Phi_\delta}(\tau)\right| + \left|\widehat{\Phi_\delta}'(\tau)\right| + \left|y\widehat{\Phi_\delta}(\tau)\right| \right. \end{aligned} \tag{21}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \left|\tau \widehat{\Phi_\delta}''(\tau)\right| + \left|y\tau \widehat{\Phi_\delta}'(\tau)\right| + \left|y^2\tau \widehat{\Phi_\delta}(\tau)\right| \Bigr) \, d\tau \\
&\le C \int\limits_{I_y} \left(\left|\frac{1}{\tau}\widehat{\Phi_\delta}(\tau)\right| + \left|\widehat{\Phi_\delta}'(\tau)\right| + \left|\tau\widehat{\Phi_\delta}''(\tau)\right| \right) d\tau.
\end{aligned}
$$

Из определения функций $\tilde{\Phi}_y$ следует, что для $\varepsilon_{j+1} < \delta \le \varepsilon_j$ мы имеем

$$
\begin{aligned}
W_y^\delta &\le C \int\limits_{I_y} \left(\left|\frac{1}{\tau}\widehat{\phi}(\varepsilon_j\tau)\right| + \left|\varepsilon_j \widehat{\phi}'(\varepsilon_j\tau)\right| + \left|\tau\varepsilon_j^2\widehat{\phi}''(\varepsilon_j\tau)\right| \right) d\tau \\
&= C \int\limits_{\varepsilon_j \cdot I_y} \left(\left|\frac{1}{\tau}\widehat{\phi}(\tau)\right| + \left|\widehat{\phi}'(\tau)\right| + \left|\tau\widehat{\phi}''(\tau)\right| \right) d\tau
\end{aligned}
\tag{22}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_{\varepsilon_{j+1}}^{\varepsilon_j} \frac{1}{\delta} W_y^\delta P_{(y+\delta)} \, d\delta \\
&\le C_1 \varepsilon_j^{-1} P_{(y+2^{-j})} \int\limits_{\varepsilon_j \cdot I_y} \left(\left|\frac{1}{\tau}\widehat{\phi}(\tau)\right| + \left|\widehat{\phi}'(\tau)\right| + \left|\tau\widehat{\phi}''(\tau)\right| \right) d\tau.
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Применяя неравенство Гарнака к ядру Пуассона, получаем при $\varepsilon_{j_y+1} < y \le \varepsilon_{j_y}$:

$$
\begin{aligned}
&\int\limits_0^1 \frac{1}{\delta} W_y^\delta P_{(y+\delta)} \, d\delta = \sum_{j=0}^{j_y} \int\limits_{\varepsilon_{j+1}}^{\varepsilon_j} \frac{1}{\delta} W_y^\delta P_{(y+\delta)} \, d\delta + \sum_{j=j_y}^{\infty} \int\limits_{\varepsilon_{j+1}}^{\varepsilon_j} \frac{1}{\delta} W_y^\delta P_{(y+\delta)} \, d\delta \\
&\le C_1 \sum_{j=0}^{j_y} P_{(y+2^{-j})} \int\limits_{\varepsilon_j \cdot I_y} \left(\left|\frac{1}{\tau}\widehat{\phi}(\tau)\right| + \left|\widehat{\phi}'(\tau)\right| + \left|\tau\widehat{\phi}''(\tau)\right| \right) d\tau \\
&+ C_1 \sum_{j=j_y}^{\infty} P_{(y+2^{-j})} \int\limits_{\varepsilon_j \cdot I_y} \left(\left|\frac{1}{\tau}\widehat{\phi}(\tau)\right| + \left|\widehat{\phi}'(\tau)\right| + \left|\tau\widehat{\phi}''(\tau)\right| \right) d\tau \\
&\le C_2 \sum_{j=0}^{j_y} P_{(y)} \cdot \frac{\varepsilon_j}{y} \int\limits_{\varepsilon_j \cdot I_y} \left(\left|\frac{1}{\tau}\widehat{\phi}(\tau)\right| + \left|\widehat{\phi}'(\tau)\right| + \left|\tau\widehat{\phi}''(\tau)\right| \right) d\tau
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ C_2 \sum_{j=j_y}^{\infty} P_{(y)} \int\limits_{\varepsilon_j \cdot I_y} \left(\left| \frac{1}{\tau} \widehat{\phi}(\tau) \right| + \left| \widehat{\phi}'(\tau) \right| + \left| \tau \widehat{\phi}''(\tau) \right| \right) d\tau \\
&\le C_2 P_{(y)} \int\limits_{\mathbb{R} \setminus [-1,1]} \left(\left| \frac{1}{\tau} \widehat{\phi}(\tau) \right| + \left| \widehat{\phi}'(\tau) \right| + \left| \tau \widehat{\phi}''(\tau) \right| \right) d\tau \\
&+ C_2 P_{(y)} \cdot \int\limits_{-1}^{1} \left(\left| \tau^{-1} \widehat{\phi}(\tau) \right| + \left| \widehat{\phi}'(\tau) \right| + \left| \tau \widehat{\phi}''(\tau) \right| \right) d\tau \\
&\le C P_{(y)} \int\limits_{\mathbb{R}} \left(\left| \widehat{\phi}(\tau) \right| + \left| \tau \widehat{\phi}'(\tau) \right| + \left| \tau^2 \widehat{\phi}''(\tau) \right| \right) d\tau + C P_{(y)},
\end{aligned} \tag{24}
$$

и мы приходим к неравенству (20).

Для доказательства формулы (18b) положим теперь $\Psi_y := \tilde{\Phi}_y$ и $\Phi_y := \frac{\partial}{\partial y} P_{(y)}$. Тогда вес W_y^δ для $y \asymp \varepsilon_j$ выглядит следующим образом:

$$
\begin{aligned}
W_y^\delta &= \int\limits_{I_y} \left(\left| \frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)} \right| + \left| \tau \cdot \left(\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)} \right)' \right| + \left| \tau^2 \cdot \left(\frac{\widehat{\Phi_\delta}(\tau)}{\widehat{\Psi_y}(\tau)} \right)'' \right| \right) d\tau \\
&\le C_0 \int\limits_{I_y} \left(\left| \frac{e^{-\delta|\tau|} \tau}{\widehat{\phi}(\varepsilon_j \tau)} \right| + \left| \tau \cdot \left(\frac{e^{-\delta|\tau|} \tau}{\widehat{\phi}(\varepsilon_j \tau)} \right)' \right| + \left| \tau^2 \cdot \left(\frac{e^{-\delta|\tau|} \tau}{\widehat{\phi}(\varepsilon_j \tau)} \right)'' \right| \right) d\tau \\
&\le C \int\limits_{I_y} e^{-\delta|\tau|} \Big(|\tau| + \tau^2 \delta + |\tau|^3 \delta^2 + \left| \widehat{\phi}'(\varepsilon_j \tau) \right| (\tau^2 \varepsilon_j + |\tau|^3 \varepsilon_j \delta) \\
&+ \left| \widehat{\phi}''(\varepsilon_j \tau) \right| |\tau|^3 \varepsilon_j^2 \Big) d\tau.
\end{aligned}
$$

Применяя теорему 1, мы (аналогично (20)) получаем, что нам достаточно доказать неравенство

$$
\int\limits_0^1 y W_y^\delta P_{(y+\delta)} \, d\delta \le C P_{(y)}, \quad y \in (0,1]. \tag{25}
$$

Полагая $y \asymp \varepsilon_j$, имеем

$$\begin{aligned}
&\int\limits_0^1 y W_y^\delta P_{(y+\delta)}\, d\delta \\
&\le C \int\limits_0^1 P_{(y+\delta)} \int\limits_{I_y} e^{-\delta|\tau|}\varepsilon_j \Big(|\tau| + \tau^2\delta + |\tau|^3\delta^2 + \Big|\widehat{\phi}'(\varepsilon_j\tau)\Big| (\tau^2\varepsilon_j + |\tau|^3\varepsilon_j\delta) \\
&+ \Big|\widehat{\phi}''(\varepsilon_j\tau)\Big| |\tau|^3\varepsilon_j^2\Big)\, d\tau\, d\delta \\
&\le C \int\limits_0^1 P_{(y+\delta)} \int\limits_{I_y} e^{-\delta|\tau|} \Big(\tau\delta + |\tau|^2\delta^2 + \Big|\widehat{\phi}'(\varepsilon_j\tau)\Big| (1+|\tau|\delta) + \Big|\widehat{\phi}''(\varepsilon_j\tau)\Big|\Big)\, d\tau\, d\delta \\
&\le C \int\limits_y^1 P_{(y)} \frac{\delta}{y} \int\limits_{I_y} e^{-\delta|\tau|} \Big(\tau\delta + |\tau|^2\delta^2 + \Big|\widehat{\phi}'(\varepsilon_j\tau)\Big| (1+|\tau|\delta) + \Big|\widehat{\phi}''(\varepsilon_j\tau)\Big|\Big)\, d\tau\, d\delta \\
&+ C_1 \int\limits_0^y P_{(y)} \int\limits_{I_y} e^{-\delta|\tau|} \Big(\tau\delta + |\tau|^2\delta^2 + \Big|\widehat{\phi}'(\varepsilon_j\tau)\Big| (1+|\tau|\delta) + \Big|\widehat{\phi}''(\varepsilon_j\tau)\Big|\Big)\, d\tau\, d\delta \\
&\le C_3 P_{(y)} \int\limits_{\mathbb{R}} \Big(|\widehat{\phi}'(t)|(1+|t|) + |\widehat{\phi}'(t)|\Big)\, dt \le C_4 P_{(y)}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Оценка (18b) доказана. □

Следствие 3.3. *Пусть функция* Φ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{gathered}
\Phi \in L^1(\mathbb{R}); \quad \widehat{\Phi} \in C^3(\mathbb{R}); \quad \widehat{\Phi}(0) = 0; \\
\Big|\int\limits_{\frac{|\tau|}{2}}^{|\tau|} \frac{\widehat{\Phi}(u)\, du}{u}\Big| > C_1, \quad |\tau| \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right];
\end{gathered} \tag{27}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \Big(|\widehat{\Phi}|(\tau) + |\tau||\widehat{\Phi}'|(\tau) + |\tau|^2|\widehat{\Phi}''|(\tau)\Big)\, d\tau < \infty,$$

где C_1 *– положительная постоянная.*
Тогда для любого заряда μ *на* $\mathbb{R}$ *верна оценка*

$$\begin{aligned}\frac{1}{C}\int\limits_0^1 \left(\left|\mu * \frac{1}{y}\Phi_{(y)}\right| * P_{(y)}\right)(x)\,dy &\le (\operatorname{Mvar}\mu)(x) + 1\\ &\le C\left(\int\limits_0^1 \left(\left|\mu * \frac{1}{y}\Phi_{(y)}\right| * P_{(y)}\right)(x)\,dy + 1\right), \quad x \in \mathbb{R},\end{aligned} \tag{28}$$

где $C = C(C_1, \Phi)$.

Замечание. Здесь мы полагаем

$$\Phi_\delta := \frac{1}{\delta}\Phi_{(\delta)};$$
$$\Psi_y := \frac{\partial}{\partial y}P_{(y)}$$

для доказательства левого неравенства и

$$\Phi_\delta := \frac{\partial}{\partial \delta}P_{(\delta)};$$
$$\Psi_y := \frac{1}{y}\Phi_{(y)}$$

для доказательства правого.

Следствие 3.4. *Пусть последовательность функций* $\phi_j, j \in \mathbb{N}$, *удовлетворяет условиям следствия* 3.2. *Положим*

$$\lambda_{j,k}(x) = 2^{-j} \cdot P_{(2^{-j})}(x - k \cdot 2^{-j}), \quad j \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad x \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Тогда для любого заряда μ *на* $\mathbb{R}$ *верна оценка*

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \lambda_{j,k}(x)|\mu * \phi_j|(k \cdot 2^{-j}) \le C(\operatorname{Mvar}\mu)(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{30}$$

Замечание. Здесь функции Φ_δ и Ψ_y определяются как в доказательстве следствия 3.2, теорема 1 применяется для точек t вида $k\cdot 2^{-|j|}$.

Литература

1. Ж. Бургейн, *Ограниченность вариации свёрток мер.* — Матем. заметки **54**, No. 4 (1993), 25–34.
2. J. Bourgain, *On the radial variation of bounded analytic functions on the disk.* — Duke Math. J. **69**, No. 3 (1993), 671–682.

3. П. А. Мозоляко, *Замечания к определению точек Бургейна.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **355** (2008), 219–236.
4. П. А. Мозоляко, *Усиленная сходимость аппроксимативных единиц и точки Бургейна ограниченных функций.* — Докл. РАН **422**, No. 6 (2008), 738–740.
5. П. А. Мозоляко, *Точки Бургейна на множестве канторовского типа.* Препринт.

Mozolyako P. A. On the definition of B-points of a Borel charge on the real line.

Let μ be a Borel charge (i.e., a real Borel measure) on $\mathbb{R}$, and let $P_{(y)}(t) = \frac{y}{\pi(y^2+t^2)}$, $y > 0$, $t \in \mathbb{R}$, denote the Poisson kernel. Bourgain proved in [1, 2] that for a nonnegative μ and for numerous $x \in \mathbb{R}$ the variation of the function $y \mapsto \left(\mu * P_{(y)}\right)(x)$ on $(0, 1]$ is finite. This is true in particular for the so-called B-points x (see e.g., [4]). In the present article new descriptions of B-points are given adjusted to some applications of this notion.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: pmzlcroak@gmail.com

Поступило 20 июня 2011 г.