Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

М. Я. Мазалов

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ ГАРМОНИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ НА КОМПАКТАХ В $\mathbb{R}^3$

§1. Введение

Пусть $X \subset \mathbb{R}^3$ – компакт, X^o – множество всех внутренних точек компакта X, Δ – оператор Лапласа в $\mathbb{R}^3$, $h(X)$ и $H(X)$ – следующие классы функций:

$$h(X) = C(X) \cap \{\Delta f = 0 \text{ в } X^o\};$$

$H(X)$ – замыкание в $C(X)$ множества функций

$$\{f|_X : \Delta f = 0 \text{ в некоторой окрестности } X\}.$$

Ясно, что $H(X) \subset h(X)$. Естественно возникает задача описания функций f, принадлежащих классу $H(X)$.

Далее считаем, не ограничивая общности, что функция f продолжена по теореме Уитни [1, гл. 6, п. 2.2 (8)] на все пространство $\mathbb{R}^3$ как непрерывная и финитная. Пусть $\omega_{f,X}$ – модуль непрерывности функции f на компакте X, а ω_f – модуль непрерывности продолженной функции f в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $Q(a, s)$ – куб со сторонами, параллельными осям координат (a – центр, s – длина стороны). Следующая гипотеза аналогична по форме утверждению, установленному А. Г. Витушкиным [2, гл. 4, §2, лемма 1] в случае равномерных аналитических приближений.

Гипотеза 1. *Пусть для произвольного открытого куба Q и произвольной функции $\psi \in C_0^2(Q)$ выполнена оценка*

$$\Big| \int_Q f(x)\Delta\psi(x)dm_x \Big| \leqslant A\omega_f(s)\|\nabla^2\psi\|_{\mathrm{L}_\infty} s^2 \mathrm{Cap}(Q \setminus X), \tag{1.1}$$

где $A > 0$ – абсолютная постоянная, $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, m_x – мера Лебега в $\mathbb{R}^3$. Тогда $f \in H(X)$.

Ключевые слова: равномерные приближения, гармонические функции, емкость, схема Витушкина.

Работа выполнена при частичной поддержке грантом НШ-3476.2010.1 программы поддержки ведущих научных школ.

Необходимость условия (1.1) для включения $f \in H(X)$ – стандартный факт (см. лемму 2.3); однако вопрос о достаточности этого условия для $f \in H(X)$ оказывается значительно глубже, чем в случае аналитических функций (например, [3], [4, гл. 5, 1.1]).

Основной результат настоящей работы – теорема 1, доказанная в §4, в которой установлена достаточность для $f \in H(X)$ условия (1.1) при одном ограничении: модуль непрерывности $\omega_{f,X}$ удовлетворяет условию Дини; последнее означает сходимость для $\delta > 0$ интеграла $\int_0^\delta \frac{\omega_{f,X}(s)}{s} ds$, из которой нетрудно вывести, что ω_f также удовлетворяет условию Дини (см. §4, формулы (4.1)–(4.3)).

Доказательство теоремы 1 проводится с помощью усовершенствованной схемы А. Г. Витушкина разделения особенностей и приближения функции по частям: функция f представляется в виде конечной суммы локализаций (функций с локализованными особенностями), а затем строятся функции, уравнивающие (с соответствующими оценками) у локализаций коэффициенты ряда Лорана при E и при $\partial E/\partial x_m$ $(m = 1, 2, 3)$, где E – фундаментальное решение лапласиана. Заметим, что вопрос оценки и уравнивания коэффициентов при первых производных функции E потребовал существенно иного подхода, чем в [2] (см. §4), а лемма о приближении функции по частям (см. §3) “на порядок” сильнее, чем лемма 1 в [2, гл. 2, §4].

Доказательство теоремы 1 “геометрично”, оно иллюстрирует трудности, возникающие в случае невыполнения условия Дини. Эти трудности обусловлены неограниченностью операторов Кальдерона–Зигмунда в пространстве L_∞, из-за чего задачи равномерного приближения, как правило, сложнее аналогичных задач приближения в классах Липшица дробного порядка и BMO (см., например, [5, §1.1]). Условие Дини понадобится только в §4 при доказательстве леммы 4.1. Доказательство леммы 4.1 полностью конструктивно, и его схема может быть полезной в других задачах теории приближений.

Отметим, что теорему 1 и ее доказательство нетрудно перенести на гармонические функции в $\mathbb{R}^d$, $d > 3$.

Отметим также, что из (1.1) следует $f \in H(X)$ для функций f, не обязательно Дини-непрерывных, в случае выполнения дополнительного условия: для любого шара $B(x,r)$ с центром $x \in \mathbb{R}^3 \setminus X^o$ радиуса r имеет место оценка $\mathrm{Cap}(B(x,2r) \setminus X) \leqslant A\mathrm{Cap}(B(x,r) \setminus X)$; см. [6].

§2. Подготовительные результаты

Напомним определение гармонической емкости. Пусть $K \subset \mathbb{R}^3$ – компакт. Тогда

$$\operatorname{Cap}(K) \overset{def}{=} \sup_{\mu} \Big\{ \|\mu\| : \Big\| \mu * \frac{1}{|x|} \Big\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 1 \Big\}, \tag{2.1}$$

где $\|\mu\|$ – полная масса неотрицательной меры Радона μ, распределенной на K. Как показано в [7, §3], определение (2.1) равносильно следующему:

$$\operatorname{Cap}(K) \overset{def}{=} (4\pi)^{-1} \sup_{g} \{ |\langle \Delta g | 1 \rangle| : \\ \|g\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 1,\ \lim_{x\to\infty} g(x) = 0,\ \operatorname{Spt}(\Delta g) \subset K \}. \tag{2.2}$$

В формуле (2.2) в угловых скобках записано действие распределения Δg с компактным носителем на пробную функцию $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, такую, что $\psi(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности множества $\operatorname{Spt}(\Delta g)$, то есть

$$\langle \Delta g | 1 \rangle = \int g(x) \Delta \psi(x) dm_x$$

($\operatorname{Spt}(\cdot)$ – замыкание носителя распределения).

Заметим также, что если в определении (2.1) дополнительно потребовать выполнения условия $\mu * \dfrac{1}{|x|} \in C(\mathbb{R}^3)$, то получится равносильное определение; см. [8, гл. 5, лемма 12].

Для ограниченного множества U полагаем

$$\operatorname{Cap}(U) \overset{def}{=} \sup_{K \subset U} \operatorname{Cap}(K),$$

где K пробегает компактные подмножества в U.

Так как исходная функция f финитна, имеет место представление

$$f = E * (\Delta f), \tag{2.3}$$

понимаемое в обобщенном смысле (где $E = -1/4\pi|x|$ – фундаментальное решение лапласиана в $\mathbb{R}^3$). Заметим, что представление (2.3) имеет место и при более слабых ограничениях: носитель $\operatorname{Spt}(\Delta f)$ компактен и $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Действительно, функция $g = E * (\Delta f) - f$ удовлетворяет условиям $\Delta g \equiv 0$ в $\mathbb{R}^3$ и $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$; поэтому в силу теоремы Лиувилля $g \equiv 0$ в $\mathbb{R}^3$.

Пусть $\{\varphi_j\}$ – разбиение единицы на $\mathrm{Spt}(\Delta f)$, под которым будем понимать конечное семейство неотрицательных функций $\varphi_j \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$, таких, что $\sum_j \varphi_j(x) \equiv 1$ в некоторой окрестности множества $\mathrm{Spt}(\Delta f)$. Тогда функция f представляется в виде конечной суммы *локализаций*:

$$f = \sum_j f_j, \quad \text{где} \quad f_j = V_{\varphi_j} f = E * (\varphi_j \Delta f). \tag{2.4}$$

Далее $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ – мультииндекс,

$$|\alpha| = \sum_{k=1}^{3} \alpha_k, \qquad \partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \partial x_3^{\alpha_3}},$$

$$\alpha! = \alpha_1! \alpha_2! \alpha_3!, \qquad x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}.$$

Для куба $Q = Q(a,s)$ при $\lambda > 0$ положим $\lambda Q = Q(a, \lambda s)$. *Двоичными кубами* называем (замкнутые) кубы вида

$$Q = Q_k^{m_1,m_2,m_3} = [m_1 2^{-k}, (m_1+1)2^{-k}] \times [m_2 2^{-k}, (m_2+1)2^{-k}] \times [m_3 2^{-k}, (m_3+1)2^{-k}], \tag{2.5}$$

где k, $m_1, m_2, m_3 \in \mathbb{Z}$.

Положительные абсолютные постоянные обозначаем через A, A_0, A_1, $\dots$. Значения этих постоянных в разных соотношениях могут быть различными.

Рассматривая покрытия компактов конечными семействами двоичных кубов, всегда будем считать, что кубы раздельные (не имеют общих внутренних точек). Будем использовать следующую лемму о покрытии.

Лемма 2.1. *Пусть $\{Q_j\}$ – конечное семейство раздельных двоичных кубов. Тогда существует $\{\varphi_j\}$ – разбиение единицы на $\bigcup_j Q_j$, такое, что $\mathrm{Spt}\varphi_j \subset (9/8)Q_j$ и $\|\partial^\alpha \varphi_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A_0 (s(Q_j))^{-|\alpha|}$ при $|\alpha| \leqslant 2$.*

Лемма 2.1 по существу следует из известной леммы о покрытии Р. Харви и Дж. Полкинга [9, лемма 3.1] (и доказывается точно так же); ограничимся пояснениями к доказательству. Упорядочим кубы Q_j по невозрастанию $s(Q_j)$. Возьмем функции $\phi_j \in \mathrm{C}_0^\infty((9/8)Q_j)$ такие, что $\phi_j \equiv 1$ на $(17/16)Q_j$ и $\|\partial^\alpha \phi_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A(s(Q_j))^{-|\alpha|}$ при $|\alpha| \leqslant 2$. Положим $\varphi_1 = \phi_1$, а при $j \geqslant 2$ возьмем $\varphi_j = \phi_j \prod_{k=1}^{j-1}(1 - \phi_k)$ (откуда следует, что $\sum_j \varphi_j = 1$ в некоторой окрестности множества $\bigcup_j Q_j$), а нужные оценки частных производных функций φ_j получаются из того, что кубы упорядочены по невозрастанию длин сторон и кратность пересечений кубов $(9/8)Q_j$ одного размера не превосходит 8.

Следующее утверждение о свойствах локализаций аналогично лемме 1 в [2, гл. 2,§3].

Лемма 2.2. *Пусть* $Q = Q(a,s)$ *– открытый куб;* $\psi \in C_0^2(Q)$, $g \in C(\mathbb{R}^3)$. *Тогда для локализации* $V_\psi g = E * (\psi \Delta g)$ *имеет место следующее:*

a) $\Delta(V_\psi g) = \psi \Delta g$ *и, следовательно,* $\mathrm{Spt}(\Delta(V_\psi g)) \subset (\mathrm{Spt}\psi \bigcap \mathrm{Spt}(\Delta g))$*;*

b) $V_\psi g \in C(\mathbb{R}^3)$*;*

c) *выполнена оценка*

$$\|V_\psi g\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A\omega_g(s)\|\nabla^2\psi\|_{\mathrm{L}_\infty} s^2.$$

Так как доказательство леммы 2.2 стандартно (см., например, [10, лемма 4.1] или [11, лемма 14.10]), ограничимся пояснениями. Утверждение a) очевидно; b) и c) получаются с помощью интегрирования по частям в $V_\psi g = E * (\psi \Delta g)$ с учетом того, что E – фундаментальное решение и того, что функции E и $\partial E/\partial x_m$, $m = 1, 2, 3$, локально интегрируемы.

Для оценки локализаций вне $Q(a,s)$ используется разложение в ряд Лорана по частным производным фундаментального решения. Именно [11, §7, п. 2^o], [12, 1B], функция $V_\psi g$ разлагается в *ряд Лорана*, сходящийся в C^∞ всюду вне шара $B(a, 6s)$:

$$V_\psi g(x) = \sum_{|\alpha| \geqslant 0} c_\alpha \partial^\alpha E(x-a), \tag{2.6}$$

где

$$c_\alpha(V_\psi g, a) = \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\langle \psi(y)\Delta g(y) | (y-a)^\alpha \rangle. \tag{2.7}$$

Ясно, что коэффициент c_0 не зависит от центра разложения. Из леммы 2.2 и определения (2.2) сразу же следует оценка

$$|c_0(V_\psi g)| \leqslant A\omega_g(s)\|\nabla^2\psi\|_\infty s^2 \mathrm{Cap}(\mathrm{Spt}\psi \bigcap \mathrm{Spt}(\Delta g)). \tag{2.8}$$

Лемма 2.3. *Пусть* $f \in H(X)$. *Тогда имеет место оценка* (1.1).

Доказательство. Возьмем произвольный открытый куб $Q = Q(a,s)$ и произвольную функцию $\varphi \in C_0^2(Q)$. Так как $f \in H(X)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует функция F, такая, что в некоторой окрестности множества X выполнены условия $\Delta F = 0$ и $|f(x) - F(x)| \leqslant \varepsilon \leqslant \omega_f(s)$ (продолжив разность $f - F$ по теореме Ч. Уитни [1, гл. 6, п. 2.2 (8)], будем считать, что это неравенство выполняется всюду в $\mathbb{R}^3$). Оценив с помощью леммы 2.2 локализацию $V_\psi f = E * (\psi\Delta f)$ и разность $E * (\psi\Delta(f - F))$, получим соответствующую оценку и для функции $V_\psi F$:

$$\|V_\psi F\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A\omega_f(s)\|\nabla^2\psi\|_{\mathrm{L}_\infty} s^2. \tag{2.9}$$

Так как $\Delta(V_\psi F) = \psi\Delta F$ и, следовательно, $\mathrm{Spt}(\Delta(V_\psi F)) \subset (Q \setminus X)$, из (2.8) и (2.9) получим:

$$\begin{aligned}\Big|\int_Q F(x)\Delta\psi(x)dm_x\Big| &= |\langle\psi\Delta F|1\rangle| = |c_0(V_\psi F)| \\ &\leqslant A\omega_f(s)\|\nabla^2\psi\|_{\mathrm{L}_\infty} s^2 \mathrm{Cap}(Q \setminus X),\end{aligned}$$

что в силу неравенства $|f(x) - F(x)| \leqslant \varepsilon$ и произвольности ε приводит к такой же оценке и для левой части формулы (1.1). Лемма доказана. □

Всюду в дальнейшем будем рассматривать локализации $V_\varphi f$ относительно функций φ, таких, что $\mathrm{Spt}\varphi \subset (9/8)Q$ для подходящего двоичного куба Q, и при этом $\|\partial^\alpha\varphi\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A_0(s(Q))^{-|\alpha|}$ при $|\alpha| \leqslant 2$ с фиксированной постоянной A_0 из леммы 2.1. Для краткости такие функции φ будем называть функциями φ из леммы 2.1.

В следующей лемме даются "достаточно грубые" оценки локализаций и их лорановских коэффициентов.

Лемма 2.4. *Пусть $g \in C(\mathbb{R}^3)$, $Q = Q(a, s)$ – двоичный куб, φ – функция из леммы* 2.1, *соответствующая кубу Q, $V_\varphi g$ – локализация. Тогда:*

(1) *при всех $\alpha \geqslant 0$ выполнены оценки*

$$|c_\alpha(V_\varphi g, a)| \leqslant A(\alpha!)^{-1}\omega_g(s)(2s)^{|\alpha|+1}; \tag{2.10}$$

(2) *если $n \leqslant 3$ и $c_\alpha(V_\varphi g, a) = 0$ при $|\alpha| < n$, то при всех x имеем*

$$|V_\varphi g(x)| \leqslant A\omega_g(s)\min\Big(1, \frac{s^{n+1}}{|x - a|^{n+1}}\Big). \tag{2.11}$$

Доказательство. Оценка (2.10) вытекает из (2.7) с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned}|c_\alpha(V_\varphi g, a)| &\leqslant \frac{1}{\alpha!}\int\limits_{y\in(5/4)Q(a,s)} |(g(y) - g(a))\Delta(\varphi(y)(y - a)^\alpha)|dm_y \\ &\leqslant A(\alpha!)^{-1}\omega_g(s)(2s)^{|\alpha|+1}.\end{aligned}$$

Оценка (2.11) вытекает из леммы 2.2, формул (2.6), (2.10) и оценок

$$|\partial^\alpha E(x)| \leqslant \frac{\alpha!(3\sqrt{3})^{|\alpha|}}{|x|^{1+|\alpha|}} \tag{2.12}$$

(см. [10, лемма 3.2]) суммированием геометрической прогрессии. Лемма доказана. □

В следующей лемме уточним оценки леммы 2.4 в предположении (1.1). Всюду в дальнейшем для двоичного куба Q будем обозначать $\mathrm{Cap}((5/4)Q \setminus X)$ через $\beta(Q)$; Дини-непрерывности исходной функции f пока не требуем.

Лемма 2.5. *Пусть для функции f, непрерывной и финитной в $\mathbb{R}^3$ и гармонической в X^o, выполнена оценка* (1.1)*, куб $Q(a,s)$ и функция φ – те же, что и в лемме* 2.4*; $V_\varphi f = E * (\varphi\Delta f)$. Тогда:*

(1) *выполнены оценки* ($s = s(Q)$)

$$|c_\alpha(V_\varphi f, a)| \leqslant A(\alpha!)^{-1}\omega_f(s)(2s)^{|\alpha|}\beta(Q); \tag{2.13}$$

(2) *при $|x-a| \geqslant 20s$ имеет место оценка*

$$|V_\varphi f(x)| \leqslant A\omega_f(s)\frac{\beta(Q)}{|x-a|}. \tag{2.14}$$

Доказательство. Оценка (2.13) в силу (2.7) следует из оценки (1.1), примененной к функции $\psi = (y-a)^\alpha\varphi$ с учетом элементарной оценки $\|\nabla^2\psi\|_{\mathrm{L}_\infty} s^2 \leqslant A_1(2s)^{|\alpha|}$. Оценка (2.14) следует из (2.6), (2.12) и (2.13) суммированием геометрической прогрессии. Лемма доказана. □

Следствие леммы 2.5. *В условиях леммы* 2.5 *для $V_\varphi f$ существует функция F_Q, такая, что:*

(1) $\mathrm{Spt}\Delta F_Q \subset ((5/4)Q \setminus X)$, $\lim_{x\to\infty} F_Q(x) = 0$, $\|F_Q\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A\omega_f(s)$;

(2) $c_0(V_\varphi f) = c_0(F_Q)$, $|c_\alpha(V_\varphi f - F_Q)| \leqslant A\omega_f(s)s\,\beta(Q)$ *при* $|\alpha| = 1$;

(3) *при всех x имеет место оценка $|V_\varphi f(x) - F_Q(x)| \leqslant A_1\omega_f(s)$, а при $|x-a| \geqslant 20s$ справедливо неравенство*

$$|V_\varphi f(x) - F_Q(x)| \leqslant A_1\omega_f(s)\beta(Q)\frac{s}{|x-a|^2}. \tag{2.15}$$

Доказательство. Существование функции F_Q, для которой имеет место условие (1) и равенство $c_0(V_\varphi f) = c_0(F_Q)$, немедленно вытекает из определения емкости (2.2), представления F_Q по (2.3) и представления $c_0(F_Q)$ по (2.7). Так как для F_Q условие (1.1) тривиально выполняется (см. лемму 2.3), все остальные условия следствия леммы 2.5 получаются из оценок (2.13)–(2.14), примененных к $V_\varphi f$ и F_Q; в силу равнства $c_0(V_\varphi f - F_Q) = 0$ коэффициенты $c_\alpha(V_\varphi f - F_Q)$ при $|\alpha| = 1$ не зависят от центра разложения в ряд Лорана. Следствие доказано. $\square$

Смысл следствия леммы 2.5: условие (1.1) позволяет автоматически уравнять у каждой локализации, полученной по разбиению единицы из леммы 2.1, коэффициент c_0 с соответствующими оценками.

Следующая лемма об оценке емкости будет использоваться в §4.

Лемма 2.6. *Пусть Q – двоичный куб, $\{Q_j\}$ – конечное множество двоичных кубов, таких, что $Q_j \subset Q$ (допускается, что кубы Q_j пересекаются); $\widetilde{Q}$ и $\widetilde{Q}_j$ – проекции кубов Q и Q_j на плоскость $x_3 = 0$.*

Пусть $\lambda_j = \lambda(Q_j) \geqslant 0$, причем для всех $x \in \widetilde{Q}$ и некоторого $M > 0$ имеет место неравенство

$$\sum_j \lambda_j \chi(\widetilde{Q}_j)(x) \leqslant M, \tag{2.16}$$

где $\chi(\cdot)$ – характеристическая функция.

Тогда имеет место оценка

$$\sum_j \lambda_j \beta(Q_j) s(Q_j) \leqslant A_1 M \beta(Q) s(Q). \tag{2.17}$$

Доказательство. В силу определения емкости достаточно установить оценку

$$(s(Q))^{-1} \Big\| \sum_j \lambda_j s(Q_j) h_j \Big\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A_2 M, \tag{2.18}$$

где $|h_j(x)| \leqslant 2$, $\mathrm{Spt}(\Delta h_j) \subset ((5/4)Q_j \setminus X)$, $c_0(h_j) = \beta(Q_j)$. Так как в силу (2.11) имеет место оценка

$$|h_j(x)| \leqslant A_3 \min\Big(1, \frac{s(Q_j)}{|x - a_j|}\Big), \tag{2.19}$$

где a_j – центр куба Q_j, то левая часть в формуле (2.18) не превосходит величины

$$A_4 (s(Q))^{-1} \Big\| \sum_j \lambda_j \int_{Q_j} \frac{d\sigma_j(z)}{|z - x|} \Big\|_{\mathrm{L}_\infty},$$

где σ_j – мера с полной массой $(s(Q_j))^2$, равномерно распределенная в квадрате, получающемся в пересечении куба Q_j и плоскости, проходящей через a_j и параллельной плоскости $x_3 = 0$. В силу условия (2.16) последнее выражение не превосходит величины

$$A_5 M (s(Q))^{-1} \Big\| \int_{\widetilde{Q}} \frac{d\sigma(y)}{|y - \widetilde{x}|} \Big\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A_2 M,$$

где мера σ с полной массой $(s(Q))^2$ равномерно распределена на $\widetilde{Q}$, $y \in \widetilde{Q}$, $\widetilde{x}$ – проекция точки x на плоскость $x_3 = 0$.

Оценка (2.18) установлена, следовательно, получена и оценка (2.17). Лемма 2.6 доказана. □

§3. Лемма о приближении функции по частям

Следующее утверждение о приближении функции по частям аналогично теореме 2 из [13]; в его доказательстве Дини-непрерывности функции f не требуется.

Лемма 3.1. *Пусть f – функция, непрерывная и финитная в $\mathbb{R}^3$ и гармоническая в X^o, и существует функция $\varepsilon(r)$, $r \in (0,1]$, $\varepsilon \searrow 0$ при $r \searrow 0$, такая, что имеет место следующее.*

Для любого двоичного куба $Q(a,s)$, $s \leqslant 1$, и локализации $V_\varphi f$ с функцией φ из леммы 2.1 существует функция $F_{Q,2} \in C(\mathbb{R}^3)$ со следующими свойствами:

(1) $\mathrm{Spt}(\Delta F_{Q,2}) \subset (4Q \setminus X)$;

(2) $\|F_{Q,2}\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant \varepsilon(s)$, $\lim_{x\to\infty} F_{Q,2}(x) = 0$;

(3) $c_\alpha(F_{Q,2}, a) = c_\alpha(V_\varphi f, a)$ *при* $|\alpha| \leqslant 1$.

Тогда $f \in H(X)$.

Доказательство. Не умаляя общности рассуждений, будем считать, что при $t \in (0,1]$ функция $\varepsilon(t)$ выпукла вверх и выполнены условия $\varepsilon(t) \geqslant \omega_f(t)$ и $\varepsilon(t) \geqslant t$. Пусть $r = V_\varphi f - F_{Q,2}$; из условий леммы 3.1 и формулы (2.11) вытекает следующая оценка:

$$|r(x)| \leqslant A\varepsilon(s) \min\Big(1, \frac{s^3}{|x-a|^3}\Big). \tag{3.1}$$

Для доказательства леммы 3.1 понадобится лемма 3.2 – частный случай теоремы об отделимости выпуклых множеств в нормированном пространстве.

Лемма 3.2. *Пусть* $\mathbf{D}$ *– куб в* $\mathbb{R}^3$*;* ψ_1*,* ψ_2*,…,* ψ_p *– конечное множество неотрицательных функций из* $C(\mathbf{D})$*;* $b > 0$ *– постоянная.*

Если для любой неотрицательной функции $\nu \in \mathrm{L}_1(\mathbf{D}, dm)$*,*

$$\int_{\mathbf{D}} \nu(x)dm_x = 1,$$

найдется номер $n = n(\nu)$*, такой, что* $\int_{\mathbf{D}} \psi_n(x)\nu(x)dm_x \leqslant b$*, то для некоторой выпуклой комбинации* $\psi = \sum_{n=1}^{p} \lambda_n\psi_n$ *(то есть,* $\lambda_n \geqslant 0$ *и* $\sum_{n=1}^{p} \lambda_n = 1$*) будет выполнена оценка* $\max_{x\in\mathbf{D}} \psi(x) \leqslant b$*.*

Доказательство леммы 3.2. Пусть $C(\mathbf{D})$ – пространство вещественнозначных функций h, непрерывных на $\mathbf{D}$, с равномерной нормой $\|h\| = \max_{x\in\mathbf{D}} |h(x)|$. По теореме Ф. Рисса сопряженным к $C(\mathbf{D})$ является пространство вещественных борелевских мер (зарядов) μ с носителями на $\mathbf{D}$ (где $\|\mu\|$ – полная вариация меры).

Обозначим через W_1 замкнутый шар $\{h : \|h\| \leqslant b\}$ в $C(\mathbf{D})$, а через W_2 – выпуклую оболочку множества функций $\psi_1, \ldots, \psi_p$. Рассуждая от противного, допустим, что W_1 и W_2 не пересекаются. Тогда по теореме об отделимости выпуклых множеств (например, [14, теорема 3.4 б)]) найдется мера μ, такая, что для любой функции $\psi \in W_2$ будет выполнено неравенство

$$\sup_{h\in W_1} \Big(\int h(x)d\mu_x \Big) = b\|\mu\| < \int \psi(x)d\mu_x.$$

В частности, будет выполнено неравенство $\min_n \int \psi_n(x)d\mu_x > b\|\mu\|$; так как функции ψ_n неотрицательны, в этом неравенстве, очевидно, можно заменить μ на неотрицательную меру μ_+ – верхнюю вариацию меры μ (где $\mu = \mu_+ + \mu_-$ – разложение Жордана). Так как множество функций $\{\psi_n\}$ конечно, такое же неравенство выполняется и для подходящей неотрицательной абсолютно непрерывной меры на $\mathbf{D}$ (регуляризации μ_+), что противоречит условию. Лемма доказана. □

Следующее утверждение сводит лемму 3.1 к лемме 3.2.

Лемма 3.3. *Пусть* $n_0 \in \mathbb{N}$*, причем* $\delta = 2^{-n_0}$ *столь мало, что* $\varepsilon(\delta) < 1$*;* $\mathbf{D}$ *– (достаточно большой) куб, такой, что* $X \subset \mathrm{Spt} f \subset (1/4)\mathbf{D}$*.*

Тогда для любой неотрицательной функции $\nu \in \mathrm{L}_1(\mathbf{D})$,

$$\int_{\mathbf{D}} \nu(x) dm_x = 1,$$

существует покрытие $\{Q_j(a_j, s_j)\} = \mathbf{Cover}(\nu)$ *компакта* $\operatorname{Spt}(\Delta f)$, *для которого выполнены следующие условия:*

(1) $\delta \leqslant s(Q_j) \leqslant \varepsilon(\delta) < 1$;

(2) *пусть* $f_j = V_{\varphi_j} f$ *– локализации по соответствующему разбиению единицы* $\{\varphi_j\}$ *из леммы* 2.1, $F_j = F_{Q_j,2}$ *– функции из леммы* 3.1, $r_j = f_j - F_j$; *тогда имеет место оценка*

$$\int_{\mathbf{D}} \Big| \sum_j r_j(x) \Big| \nu(x) dm_x < \varepsilon_1, \text{ где } \varepsilon_1 = \varepsilon_1(\varepsilon, \delta) \text{ и } \lim_{\delta \to 0} \varepsilon_1 = 0.$$

Действительно, пусть параметр $p \in \mathbb{N}$ из леммы 3.2 равен $\mathbf{Cover}(\nu)$, где ν удовлетворяет условию (1) леммы 3.3; пусть n – номер покрытия, такого, что для функции $\psi_n = \Big| \sum_j r_{j,n} \Big|$ (где функции $r_j = r_{j,n} = f_{j,n} - F_{j,n}$ соответствуют этому покрытию) выполнено условие (2) леммы 3.3. Тогда в силу леммы 3.2 для всех $x \in \mathbf{D}$ и некоторого набора $\{\lambda_n\}$, $n = 1, 2, \ldots, p$, такого, что $\lambda_n \geqslant 0$ и $\sum\limits_{n=1}^{p} \lambda_n = 1$, имеет место оценка

$$\Big| f(x) - \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \sum_j F_{j,n}(x) \Big| \leqslant \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \Big| f(x) - \sum_j F_{j,n}(x) \Big|$$

$$= \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \Big| \sum_j (f_{j,n}(x) - F_{j,n}(x)) \Big| \leqslant \sum_{n=1}^{p} \lambda_n \Big| \sum_j r_{j,n}(x) \Big| < \varepsilon_1 \qquad (3.2)$$

и, следовательно (так как ε_1 может быть как угодно малым), $f \in H(X)$. Таким образом, для окончания доказательства леммы 3.1 достаточно доказать лемму 3.3.

Замечание. Если оценка (3.2) выполнена на $\mathbf{D}$, то, в силу принципа максимума модуля, она имеет место при всех x. Функция ε_1 будет определена в (3.3).

Доказательство леммы 3.3. Идея доказательства состоит в следующем. Если $\nu(x) \leqslant 1/\varepsilon(\delta)$ при всех x, то в качестве требуемого покрытия возьмем совокупность кубов координатной сетки с длиной стороны δ. Там, где значения функции ν достаточно велики, кубы покрытия увеличим, используя стандартную процедуру Кальдерона–Зигмунда, причем это можно будет сделать так, чтобы было выполнено условие (2) леммы 3.3. При этом будем существенно использовать тот факт, что вторые производные функции E, задающие асимптотику функций r_j, представляют собой “хорошие ядра”, свертки с которыми ограничены в пространстве $\mathrm{L}_2 = \mathrm{L}_2(\mathbb{R}^3, dm)$.

Сначала определим нужное покрытие $\mathbf{Cover}(\nu)$. Не нарушая общности рассуждений, будем считать, что $\mathbf{D}$ – объединение конечного числа двоичных кубов с длиной стороны, равной $1 = \int_{\mathbf{D}} \nu(x)dm_x$ (совокупность которых назовем *первым поколением кубов*). Зафиксируем $M = 1/\varepsilon(\delta)$; в силу выбора δ имеем $M > 1$.

Применим к $\mathbf{D}$, ν и M двоичное разложение Кальдерона – Зигмунда (см., например, [1, глава 1, §3]), в результате которого куб $\mathbf{D}$ будет покрыт конечным семейством двоичных кубов, разбитых на два непересекающихся класса: так называемых *хороших* кубов D^g и *плохих* кубов D^b.

Указанные классы определяются индуктивно по номеру поколения, именно, пусть D – куб какого-либо поколения, и $s(D) > \delta$, тогда:

если $\dfrac{1}{m(D)} \displaystyle\int_D \nu(x)dm_x > M$, то D объявляется “плохим” и более не делится (фиксируется), в противном случае он делится на 8 двоичных кубов следующего поколения с длиной стороны $s(D)/2$;

если $s(D) = \delta$, то куб D объявляется “хорошим” и фиксируется.

Нетрудно проверить выполнение следующих свойств семейства $\{D^g\} \cup \{D^b\}$ (см., например, [1, глава 1, 3.4]).

(1) Для любого куба D имеет место оценка $\dfrac{1}{m(D)} \displaystyle\int_D \nu(x)dm_x \leqslant 8M$.

(2) Сумма $m(D)$ по всем кубам D^b не превосходит $1/M$.

Построение покрытия $\mathbf{Cover}(\nu)$.

Для каждого куба D^b рассмотрим множество, состоящее из 27 кубов, именно, из D^b и 26 касающихся D^b двоичных кубов того же размера; назовем указанное множество оболочкой куба D^b. Сначала покроем компакт $\mathrm{Spt}(\Delta f)$ сеткой двоичных кубов с длиной стороны δ, затем с каждым кубом Q сетки сделаем следующее. Пусть D_Q – максимальный куб среди всех кубов оболочек D^b, содержащих Q, тогда в покрытии заменим Q на D_Q; если ни один куб оболочек D^b не содержит Q, то оставим Q без изменения. Полученное множество кубов и образует покрытие $\mathbf{Cover}(\nu)$.

Назовем кубы Q покрытия $\mathbf{Cover}(\nu)$ при $s(Q) = \delta$ *белыми*, а при $s(Q) > \delta$ – *красными*. Заметим, что семейство "плохих" кубов и семейство "красных" кубов существенно различаются. "Красный" куб – обязательно куб оболочки "плохого" куба, но он сам может не быть "плохим". Если "плохой" куб D является собственной частью куба оболочки другого "плохого" куба D', то D не может быть "красным".

Из построения и свойств семейства "плохих" и "хороших" кубов вытекают следующие свойства покрытия $\mathbf{Cover}(\nu)$.

($1'$) Если куб Q покрытия $\mathbf{Cover}(\nu)$ имеет общую внутреннюю точку с кубом $3D^b$ для какого-либо куба D^b, то Q – красный, причем $s(Q) \geqslant s(D^b)$ (иначе Q был бы заменен на соответствующий куб оболочки D^b).

($2'$) Сумма $m(Q)$ по всем красным кубам Q не превосходит $27/M$ (это следует из свойства (2) семейства $\{D^b\}$ и определения оболочек D^b).

Напомним, что $M = 1/\varepsilon(\delta)$. Для покрытия $\mathbf{Cover}(\nu)$ докажем оценку:

$$\int_{\mathbf{D}} \Big|\sum_j r_j(x)\Big| \nu(x)dm_x \leqslant A\Big(\varepsilon(\delta)(m(\mathbf{D})M)^{1/2} + \varepsilon(M^{-1/3})\Big), \qquad (3.3)$$

правая часть которой представляет собой функцию ε_1 из условия (2) леммы 3.3.

Определим для каждого куба D из семейства $\{D^g\} \cup \{D^b\}$ следующую неотрицательную функцию: $\widetilde{\nu}_D(x) \overset{def}{=} \dfrac{\chi_D(x)}{m(D)} \displaystyle\int_D \nu(y)dm(y)$, где χ_D – характеристическая функция куба D, и пусть $\widetilde{\nu}$ – сумма функций $\widetilde{\nu}_D$ по всем таким D. Ясно, что для любого куба D из $\{D^g\} \cup \{D^b\}$ выполнено равенство $\displaystyle\int_D (\widetilde{\nu}(x) - \nu(x))dm_x = 0$, причем $\widetilde{\nu}(x) \leqslant 8M$ и $\displaystyle\int_{\mathbf{D}} \widetilde{\nu}(x)dm_x = 1$.

Сетка двоичных кубов со стороной δ преобразовывалась в покрытие $\mathbf{Cover}(\nu)$ для того, чтобы можно было "с контролируемой погрешностью" заменить ν на $\widetilde{\nu}$ в левой части формулы (3.3). В следующей лемме оценим эту погрешность.

Лемма 3.4. *Имеет место оценка:*

$$\left| \int_{\mathbf{D}} \Big| \sum_j r_j(x) \Big| (\nu(x) - \widetilde{\nu}(x)) dm_x \right| \leqslant A\varepsilon(M^{-1/3}). \tag{3.4}$$

Доказательство леммы 3.4. Рассмотрим всевозможные пары кубов (Q_j, D_p), где Q_j из покрытия $\mathbf{Cover}(\nu)$, а D_p из $\{D^g\} \cup \{D^b\}$ (центры кубов обозначим, соответственно, через a_j и a'_p). Так как $m(D^b) \leqslant 1/M$, то $s(Q) \leqslant M^{-1/3}$ для любого куба Q из $\mathbf{Cover}(\nu)$.

В силу условия $\displaystyle\int_{D_p} (\widetilde{\nu}(x) - \nu(x)) dm_x = 0$ левая часть неравенства (3.4) равна

$$\Big| \sum_p \int_{D_p} \Big(\Big| \sum_j r_j(x) \Big| - \Big| \sum_j r_j(a'_p) \Big| \Big) (\nu(x) - \widetilde{\nu}(x)) dm_x \Big|$$

и не превосходит (в силу элементарных свойств модуля) величины

$$\sum_p \int_{D_p} \left| \Big| \sum_j r_j(x) \Big| - \Big| \sum_j r_j(a'_p) \Big| \right| |\nu(x) - \widetilde{\nu}(x)| dm_x$$

$$\leqslant \sum_j \sum_p \int_{D_p} |(r_j(x) - r_j(a'_p))(\nu(x) - \widetilde{\nu}(x))| dm_x.$$

Для доказательства неравенства (3.4) достаточно установить, что

$$\sum_j \sum_p \int_{D_p} |(r_j(x) - r_j(a'_p))(\nu(x) - \widetilde{\nu}(x))| dm_x \leqslant A\varepsilon(M^{-1/3}). \tag{3.5}$$

Оценку (3.5) докажем “по частям”.

1) Сначала рассмотрим такие пары номеров j и p, что кубы $2Q_j$ и $2D_p$ не пересекаются. Воспользовавшись неравенством $|\nabla r_j(x)| \leqslant A\varepsilon(s_j) \dfrac{(s_j)^3}{|a'_p - a_j|^4}$ при $x \in D_p$, вытекающим из (3.1), получим:

$$\int_{D_p} |(r_j(x) - r_j(a'_p))(\nu(x) - \widetilde{\nu}(x))| dm_x \leqslant A\varepsilon(s_j) \frac{(s_j)^3 s(D_p)}{|a'_p - a_j|^4} \int_{D_p} \nu(x) dm_x. \tag{3.6}$$

Зафиксируем p и просуммируем неравенства (3.6) по всем соответствующим j. Получим:

$$\sum_{\{j|2Q_j\cap 2D_p=\varnothing\}}\int_{D_p}|(r_j(x)-r_j(a'_p))(\nu(x)-\widetilde{\nu}(x))|dm_x$$
$$\leqslant A_2\varepsilon(M^{-1/3})s(D_p)\int_{|x|\geqslant s(D_p)}\frac{dm_x}{|x|^4}\int_{D_p}\nu(x)dm_x$$
$$\leqslant A_3\varepsilon(M^{-1/3})\int_{D_p}\nu(x)dm_x,$$

откуда суммированием по p получается оценка (3.5).

2) Рассмотрим теперь все пары (j,p), такие, что $2Q_j$ и $2D_p$ пересекаются. Прежде всего из свойства $(1')$ покрытия $\mathbf{Cover}(\nu)$ следует, что $s(Q_j)\geqslant s(D_p)$ (именно с этой целью вводились оболочки кубов D^b). Так как $s(D_p)\leqslant s(Q_j)$ и $2D_p\cap 2Q_j\neq\varnothing$, то из геометрических соображений ясно, что $D_p\subset 5Q_j$.

2а) Пусть куб Q_j красный. Тогда из свойства (1) семейства $\{D^g\}\cup\{D^b\}$, определения функции $\widetilde{\nu}$ и неравенства $|r_j(x)-r_j(a'_p)|\leqslant A\varepsilon(s(Q_j))$ (см. (3.1)) следует:

$$\sum_{\{p|D_p\subset 5Q_j,\ Q_j-\text{ красный}\}}\int_{D_p}|(r_j(x)-r_j(a'_p))(\nu(x)-\widetilde{\nu}(x))|dm_x$$
$$\leqslant A_4\varepsilon(M^{-1/3})m(Q_j)M,$$

откуда в силу свойства $(2')$ покрытия $\mathbf{Cover}(\nu)$ получим (3.5).

2б) Пусть куб Q_j белый. Тогда его размер минимален ($s(Q_j)=\delta$), и то же касается соответствующих кубов D_p; поэтому каждый куб (Q_j или D_p) суммируется не более 27 раз. Следовательно,

$$\sum_{\{j|Q_j-\text{ белый}\}}\sum_{\{p|D_p\subset 5Q_j\}}\int_{D_p}|(r_j(x)-r_j(a'_p))(\nu(x)-\widetilde{\nu}(x))|dm_x$$
$$\leqslant A_5\varepsilon(\delta).$$

Лемма 3.4 доказана. □

Вернемся к доказательству оценки (3.3), заменив в силу леммы 3.4 функцию ν на $\widetilde{\nu}$. Будем рассматривать производные $\partial^\alpha E$ при $|\alpha|=2$ как ядра сингулярных интегральных операторов (далее до конца параграфа всюду $|\alpha|=2$). Это "хорошие" ядра:

1) функции $\partial^\alpha E$ вещественно аналитичны в $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ и однородны степени -3;

2) преобразования Фурье $F[\partial^\alpha E](x) = \dfrac{x^\alpha}{|x|^2}$ равномерно ограничены.

Пусть $\psi \in \mathrm{C}_0^1(\mathbb{R}^3)$, $\mathrm{T}^\alpha\psi$ – следующие интегральные операторы:

$$\mathrm{T}^\alpha\psi(x) = \lim_{r\to 0}\int_{|x-y|>r}\partial^\alpha E(x-y)\psi(y)dm(y). \tag{3.7}$$

Из свойств производных $\partial^\alpha E$ следует, что функции $\mathrm{T}^\alpha\psi(x)$ непрерывны в $\mathbb{R}^3$, $\mathrm{T}^\alpha\psi(x) = O(|x|^{-3})$ при $x \to \infty$ и (см., например, [1, гл. 2]) имеют место оценки $\|\mathrm{T}^\alpha\psi\|_{\mathrm{L}_2} \leqslant A\|\psi\|_{\mathrm{L}_2}$.

Теперь для каждой функции r_j определим видоизмененную функцию $\widetilde{r_j}$ по следующей формуле:

$$\widetilde{r_j} = \sum_{|\alpha|=2}\frac{c_\alpha(r_j)}{m(Q_j)}\mathrm{T}^\alpha\psi_j, \tag{3.8}$$

где $\psi_j(x) \geqslant 0$, $\psi_j \in \mathrm{C}_0^1(Q_j)$, $\displaystyle\int_{Q_j}\psi_j(x)dm_x = m(Q_j)$, $\|\psi_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A$ и $\|\mathrm{T}^\alpha\psi_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A$ (в качестве ψ_j достаточно взять “сглаженную” характеристическую функцию куба Q_j, такую, что $\|\nabla\psi_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A_1(s_j)^{-1}$).

Функции $\widetilde{r_j}$ подобраны так, что в соответствии с (2.6) при $x \to \infty$ имеет место асимптотика $r_j(x) - \widetilde{r_j}(x) = O(|x|^{-4})$. Так как при $|\alpha| = 2$ в силу (2.13) имеют место оценки $|c_\alpha(r_j)|/m(Q_j) \leqslant A_1\varepsilon(s_j)$, из (3.1) вытекает оценка

$$|r_j(x) - \widetilde{r_j}(x)| \leqslant A\varepsilon(s_j)\min\Big(1, \frac{(s_j)^4}{|x-a_j|^4}\Big). \tag{3.9}$$

Используя следующую лемму, заменим в (3.3) не только ν на $\widetilde{\nu}$, но и r_j на $\widetilde{r_j}$.

Лемма 3.5. *Имеет место оценка*

$$\sum_j\int_{\mathbf{D}}|r_j(x) - \widetilde{r_j}(x)|\widetilde{\nu}(x)dm_x \leqslant A\varepsilon(M^{-1/3}). \tag{3.10}$$

Доказательство леммы 3.5. 1) Пусть куб Q_j – красный. Тогда из (3.9) и неравенства $\widetilde{\nu}(x) \leqslant 8M$ следует:

$$\int_{\mathbf{D}}|r_j(x) - \widetilde{r_j}(x)|\widetilde{\nu}(x)dm_x \leqslant AMm(Q_j)\varepsilon(M^{-1/3})$$

(напомним, что $s_j \leqslant M^{-1/3}$). Отсюда в силу свойства (2) покрытия $\{Q_j\}$ получим:

$$\sum_{\{j|Q_j - \text{красный}\}} \int_{\mathbf{D}} |r_j(x) - \widetilde{r}_j(x)|\widetilde{\nu}(x)dm_x \leqslant A_1\varepsilon(M^{-1/3}).$$

2) Рассмотрим случай белых кубов Q_j. Так как $s_j = \delta$, из (3.9) аналогично доказательству леммы 1 в [2, гл. 2, §4] получим, что для любого x справедливо неравенство

$$\sum_{\{j|Q_j - \text{белый}\}} |r_j(x) - \widetilde{r}_j(x)| \leqslant A\varepsilon(\delta).$$

Осталось заметить, что $\int_{\mathbf{D}} \widetilde{\nu}(x)dm_x = 1$. Лемма 3.5 доказана. □

Завершим доказательство оценки (3.3). Обозначим через $\sum'$ сумму по всем индексам j белых кубов, а через $\sum''$, соответственно, красных кубов.

Применив неравенство Коши-Буняковского, оценку $0 \leqslant \widetilde{\nu}(x) \leqslant 8M$ и равенство $\int_{\mathbf{D}} \widetilde{\nu}(x)dm_x = 1$, получим:

$$\int_{\mathbf{D}} \Big|\sum_j \widetilde{r}_j(x)\Big|\widetilde{\nu}(x)dm_x \leqslant \Big(\Big\|\sum_j{}' \widetilde{r}_j\Big\|_{\mathrm{L}_2} + \Big\|\sum_j{}'' \widetilde{r}_j\Big\|_{\mathrm{L}_2}\Big)(8M)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Воспользовавшись формулой (3.8), L_2-ограниченностью операторов T^α и оценкой $|c_\alpha(r_j)|/m(Q_j) \leqslant A\varepsilon(s_j)$, получим:

$$\Big\|\sum_j{}' \widetilde{r}_j\Big\|_{\mathrm{L}_2} \leqslant A_1\varepsilon(\delta)\Big(\sum_j{}' m(Q_j)\Big)^{1/2},$$

$$\Big\|\sum_j{}'' \widetilde{r}_j\Big\|_{\mathrm{L}_2} \leqslant A_1\varepsilon(M^{-1/3})\Big(\sum_j{}'' m(Q_j)\Big)^{1/2}.$$

Так как в силу свойства (2′) покрытия $\mathbf{Cover}(\nu)$ выполнена оценка

$$\sum_j{}'' m(Q_j) \leqslant \frac{27}{M},$$

то правая часть (3.11) не превосходит величины

$$A\Big(\varepsilon(\delta)(m(\mathbf{D})M)^{1/2} + \varepsilon(M^{-1/3})\Big).$$

Таким образом, в силу лемм 3.4 и 3.5 оценка (3.3) доказана. Вместе с ней доказаны, соответственно, лемма 3.3 и лемма 3.1. □

§4. Теорема 1 и ее доказательство

Подведем некоторые итоги. Условие (1.1) автоматически дает для каждой локализации $V_\varphi f$ относительно φ из леммы 2.1 функцию F_Q из следствия леммы 2.5, уравнивающую коэффициент $c_0(V_\varphi f)$; однако в силу леммы 3.1 для доказательства гипотезы 1 нужна функция $F_{Q,2}$, уравнивающая коэффициенты $c_\alpha(V_\varphi f)$, $|\alpha| \leqslant 1$. В настоящем параграфе покажем, как конструктивно построить $F_{Q,2}$, если модуль непрерывности $\omega_{f,X}$ удовлетворяет условию Дини; в результате получим следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть имеет место оценка* (1.1), *а модуль непрерывности $\omega_{f,X}$ удовлетворяет условию Дини. Тогда $f \in H(X)$.*

Доказательство теоремы 1. Прежде всего заметим, что после продолжения с компакта X по теореме Уитни модуль непрерывности ω_f продолженной функции f также удовлетворяет условию Дини. Этот факт неявно устанавливается в доказательстве теоремы 3 в [1, гл. 6, п.2.2]. Действительно, имеют место следующие оценки.

1. Пусть $x \notin X$, $y \in X$; тогда аналогично формуле (15) из [1, гл. 6, п. 2.2] имеем
$$|f(x) - f(y)| \leqslant A_1 \omega_{f,X}(A|x-y|). \tag{4.1}$$

2. При $x \notin X$ функция $f(x)$ дифференцируема, и аналогично формуле (14) из [1, гл. 6, п. 2.2] имеем
$$|\nabla f(x)| \leqslant A_1 \frac{\omega_{f,X}(A\mathrm{dist}(x,X))}{\mathrm{dist}(x,X)}. \tag{4.2}$$

Из (4.1) и (4.2) сразу же следует, что
$$\omega_f(s) \leqslant A_1 \sup_{k\in\mathbb{Z}_+} \frac{\omega_{f,X}(A2^k s)}{2^k}. \tag{4.3}$$

В силу оценки (4.3) из сходимости ряда $\sum_{k=0}^\infty \omega_{f,X}(2^{-k})$ следует сходимость ряда $\sum_{k=0}^\infty \omega_f(2^{-k})$, что равносильно выполнению условия Дини для ω_f.

Для ω_f, очевидно, имеет место неравенство $\omega_f(2\delta) \leqslant 2\omega_f(\delta)$. Пусть

$$\epsilon(\delta) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega_f(2^{-k}\delta); \tag{4.4}$$

так как для ω_f выполнено условие Дини, имеем

$$\epsilon(\delta) < \infty \quad \text{и} \quad \lim_{\delta \to 0} \epsilon(\delta) = 0.$$

Теорема 1 вытекает из леммы 3.1 и следующей леммы 4.1; для упрощения обозначений лорановские коэффициенты локализаций при $(\partial E/\partial x_m)$ (то есть, c_α, $|\alpha| = 1$) будем обозначать через c_m^1, $m = 1, 2, 3$, а функцию $V_\varphi f$ – через g.

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathbf{Q} = Q(a, \mathbf{s})$ *– двоичный куб;* g *– локализация из леммы* 3.1 (*напомним, что* $\mathrm{Spt}(\Delta g) \subset ((9/8)\mathbf{Q} \setminus X^o)$), *выполнено условие* (1.1).

Тогда существуют 6 *функций* $G_m^p \in C(\mathbb{R}^3)$ $(m = 1, 2, 3,\ p = 1, 2)$, *таких, что:*

(1) $\mathrm{Spt}(\Delta G_m^p) \subset (4\mathbf{Q} \setminus X)$ $(p = 1, 2)$, $g - G_m^1(x) = O(|x|^{-2})$ *и* $G_m^2(x) = O(|x|^{-2})$ *при* $x \to \infty$;

(2) $c_m^1(G_m^2) \geqslant A \sum_{j=1}^3 |c_j^1(g - G_m^1)|$;

(3) $c_m^1(G_m^2) \geqslant (11/5) \max_{j \neq m} |c_j^1(G_m^2)|$;

(4) $\max\left(\|G_m^1\|_{\mathrm{L}_\infty}, \|G_m^2\|_{\mathrm{L}_\infty}\right) \leqslant A\epsilon(\mathbf{s})$, *где* ϵ *из* (4.4).

Используя лемму 4.1, легко добиться выполнения условий леммы 3.1 (при этом в качестве $\varepsilon(r)$ берется функция $A\epsilon(r)$ для ϵ из (4.4)), чего достаточно для доказательства теоремы 1. Действительно, пусть m_0 – индекс, при котором сумма $\sum_{j=1}^3 |c_j^1(g - G_m^1)|$ минимальна среди всех m. Тогда нужная функция из леммы 3.1, уравнивающая у g все коэффициенты c_1^m, строится в виде $G_{m_0}^1 + \sum_{m=1}^3 t_m G_m^2$, где t_m, $m = 1, 2, 3$, – вещественные коэффициенты. Нахождение коэффициентов t_m, очевидно, сводится к решению системы из трех линейных уравнений. Для матрицы $(a_{i,j})$ этой системы (где $i = 1, 2, 3$ и $j = 1, 2, 3, 4$), в силу условий (2) и (3) леммы 4.1 и выбора индекса m_0, при $i = 1, 2, 3$ имеют место неравенства $a_{i,i} \geqslant (11/5) \max_{m \neq i} |a_{m,i}|$ и $a_{i,i} \geqslant \sum_{m=1}^3 |a_{m,4}|$, что влечет выполнение оценок $|t_m| \leqslant A$, $m = 1, 2, 3$.

Таким образом, теорема 1 сводится к лемме 4.1.

Доказательство леммы 4.1. Считаем, что $((9/8)\mathbf{Q}\setminus X^o) \neq \varnothing$, иначе $g \equiv 0$ и лемма 4.1 тривиальна. При этом, очевидно, компакт $(8/7)\mathbf{Q}\setminus X^o$ имеет непустую внутренность.

Построим пару функций (G_3^1, G_3^2), удовлетворяющих условиям леммы 4.1; построение пар (G_m^1, G_m^2), где $m = 1, 2$, опускаем, так как оно проводится совершенно аналогично.

Сначала укажем общую структуру функций G_3^1 и G_3^2.

Функция G_3^1**.** Будут проведены подходящее покрытие компакта $(8/7)\mathbf{Q} \setminus X^o$ конечным семейством раздельных двоичных кубов и соответствующее разбиение единицы из леммы 2.1, после чего функция G_3^1 будет суммой всех F_Q из следствия леммы 2.5.

Функция G_3^2 будет строиться как конечная линейная комбинация функций $h_{2,1}$ из (4.5) с положительными коэффициентами; сначала дадим ряд определений.

Вертикальным рядом назовем множество двоичных кубов (2.5), таких, что p, m_1 и m_2 фиксированы (кубы имеют одинаковый размер и расположены вдоль оси x_3).

Двоичные кубы Q_1 и Q_2 назовем *согласованными* (*согласованной парой*), если они одного размера, расположены в одном вертикальном ряду, выполнено неравенство $4 \leqslant m_3(Q_2) - m_3(Q_1) \leqslant 13$ (в частности, куб Q_2 всегда расположен “выше” куба Q_1) и $\beta(Q_j) = \mathrm{Cap}((5/4)Q_j \setminus X) > 0$ (где $j = 1, 2$).

В силу определения емкости существуют функции h_j $(j = 1, 2)$ вида $h_j = E * \mu_j$, где меры μ_j неотрицательны, $\mathrm{Spt}(\mu_j) \subset ((5/4)Q_j \setminus X)$, $\|\mu_j\| = c_0(h_j) = \beta(Q_j)$, такие, что $h_j \in C(\mathbb{R}^3)$ и $\|h_j\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant 2$. Рассмотрим функцию

$$h_{2,1} = \lambda_2 h_2 - \lambda_1 h_1, \tag{4.5}$$

где постоянные λ_1 и λ_2 определим так: в случае $\beta(Q_2) \leqslant \beta(Q_1)$ возьмем $\lambda_1 = \lambda_1(Q_1) = \beta(Q_2)/\beta(Q_1)$ и $\lambda_2 = \lambda_2(Q_2) = 1$, а в случае $\beta(Q_2) > \beta(Q_1)$, соответственно, $\lambda_2 = \beta(Q_1)/\beta(Q_2)$ и $\lambda_1 = 1$. При этом, очевидно, выполнено следующее условие:

$$\lambda_1 \beta(Q_1) = \lambda_2 \beta(Q_2) = \min(\beta(Q_1), \beta(Q_2)), \tag{4.6}$$

а в силу расположения кубов Q_1 и Q_2 имеем:

$$(11/4)s \min(\beta(Q_1), \beta(Q_2)) \leqslant c_3^1(h_{2,1}) \leqslant 15s \min(\beta(Q_1), \beta(Q_2)) \tag{4.7}$$

(s – длина стороны любого из кубов в согласованной паре).

Замечание 4.1. Из определения согласованных пар следует, что для функций $h_{2,1}$ выполнено условие (3) леммы 4.1 (в силу неотрицательности мер μ_j его достаточно проверить для разностей $E(x-a_2)-E(x-a_1)$, где $a_j \in (5/4)Q_j$, $j=1,2$; "крайний случай" расположения точек на границах кубов $(5/4)Q_j$ дает постоянную $11/5=(11/4)/(5/4)$). Для функции G_3^2, имеющей вид линейной комбинации функций $h_{2,1}$ с положительными коэффициентами, следовательно, также выполнено условие (3) леммы 4.1.

Продолжим доказательство леммы 4.1. Проведем геометрическую конструкцию, результатом которой будет следующее утверждение.

Лемма 4.2. *В условиях леммы* 4.1 *существуют* **Cover** *– конечное семейство раздельных двоичных кубов, покрывающее компакт* $(8/7)\mathbf{Q}\setminus X^o$, **Pair** *– конечный набор согласованных пар двоичных кубов* (Q_1,Q_2) *и соответствующий ему набор* $\mathbf{H}(\mathbf{Pair})$ *функций* $h_{2,1}$ *вида* (4.5)*, такие, что выполнены следующие условия.*

(1) *Пусть* C_{cover} *– сумма величин* $\omega_f(s(Q))\beta(Q)s(Q)$ *по всем кубам* Q *покрытия* **Cover***,* $C_{\mathrm{vert}}(\mathbf{H})$ *– сумма величин* $\omega_f(s)c_3^1(h_{2,1})$ *по всем функциям* $h_{2,1}$ *из* $\mathbf{H}(\mathbf{Pair})$ *(где* s *– длина стороны куба в согласованной паре). Тогда имеет место оценка* $C_{\mathrm{cover}}\leqslant A_1C_{\mathrm{vert}}(\mathbf{H})$*.*

(2) *Пусть* Q' *– произвольный двоичный куб. Тогда сумма* $\beta(Q)s(Q)$ *по всем кубам* Q *покрытия* **Cover***, содержащимся в* Q'*, и сумма коэффициентов* $c_3^1(h_{2,1})$ *по всем функциям* $h_{2,1}$ *из* $\mathbf{H}(\mathbf{Pair})$*, для которых хотя бы один куб согласованной пары содержится в* Q'*, не превосходят* $A_2(s(Q'))^2$*.*

Докажем лемму 4.2, а затем выведем из нее лемму 4.1.

Доказательство леммы 4.2. Конструкцию проведем индукцией по номеру поколения кубов. При $n=1,2,\dots$, кубы поколения n – двоичные кубы с длиной стороны $\mathbf{s}/2^{n-1}$, которые строятся на шаге n. По окончании каждого шага куб может либо фиксироваться, либо делиться на 8 двоичных кубов следующего поколения.

В конструкции будет строиться невозрастающая последовательность покрытий $\mathbf{Cover}(n)$ компакта $(8/7)\mathbf{Q}\setminus X^o$ (невозрастание означает, что каждый куб покрытия $\mathbf{Cover}(n)$ содержится в некотором кубе из $\mathbf{Cover}(n-1)$, возможно, совпадая с ним); процесс будет завершен на некотором шаге, для определения которого будут введены "условия глобальной остановки". Покрытия $\mathbf{Cover}(n)$ будут состоять из кубов последнего поколения и ранее зафиксированных кубов.

На шаге n также строятся согласованные пары кубов поколения n и соответствующие им функции $h_{2,1}$ (семейства которых добавляются к аналогичным семействам, построенным на предыдущих шагах).

Все кубы Q с $\beta(Q) > 0$, использующиеся в конструкции, будут разбиты на *вертикальные группы*, которые определяются по индукции. При этом все кубы одной вертикальной группы содержатся в одном вертикальном ряду, и произвольный двоичный куб не может содержаться в различных вертикальных группах. При построении функции $h_{2,1}$ согласованные кубы Q_1 и Q_2 обязательно содержатся в одной вертикальной группе; куб вертикальной группы с максимальным значением β будем называть *главным* (если таких кубов несколько, главный выбирается из них произвольно).

Шаг 1. Рассмотрим 27 кубов с длиной стороны $\mathbf{s}$, составляющих $3\mathbf{Q}$. Указанные кубы объединены в тройки, содержащиеся в 9 вертикальных рядах. В тройках образуем вертикальные группы из кубов Q с $\beta(Q) > 0$ (если в тройке таких кубов нет, вертикальную группу не рассматриваем). Получаем не более 9 вертикальных групп, в каждой из которых не более 3 кубов; в качестве $\mathbf{Cover}(1)$ возьмем совокупность тех из них, которые пересекают компакт $(8/7)\mathbf{Q} \setminus X^o$. На шаге 1 согласованных пар в вертикальных группах, очевидно, нет, и функции $h_{2,1}$ не строим; кубы не фиксируем.

Прежде чем проводить индукционный переход, сформулируем два условия, которому удовлетворяют вертикальные группы, получаемые в процессе построения.

(1) В каждом вертикальном ряду находится не более одной вертикальной группы.

(2) Индекс m_3 кубов вертикальной группы (см. формулу (2.5) и определение согласованных пар) различается не более, чем на 13; в частности, в вертикальных группах не более, чем по 14 кубов.

Выполнение указанных условий после шага 1 очевидно; в дальнейшем оно будет проверяться по индукции.

Индукционный переход. Перед каждым шагом $n \geqslant 2$ имеем два следующих конечных множества двоичных кубов (возможно, второе из этих множеств пусто).

1. Множество незафиксированных кубов поколения $n-1$, объединенных в вертикальные группы, причем в каждом вертикальном ряду находится не более одной вертикальной группы, а индекс m_3 кубов в

каждой вертикальной группе различается не более, чем на 6 (в частности, в вертикальных группах не более, чем по 7 кубов).

2. Множество зафиксированных ранее кубов поколений не выше $n-1$.

На шаге n делаем следующее. Разбиваем каждый незафиксированный куб поколения $n-1$ на 8 двоичных кубов поколения n. Тем самым, из вертикального ряда поколения $n-1$ получаем 4 вертикальных ряда поколения n и, следовательно, из вертикальной группы поколения $n-1$ – не более 4 вертикальных групп поколения n, в которых индекс m_3 различается не более, чем на 13.

a) *покрытие* $\mathbf{Cover}(n)$.

В качестве покрытия $\mathbf{Cover}(n)$ возьмем совокупность тех ранее зафиксированных кубов и полученных кубов поколения n, которые пересекают компакт $(8/7)\mathbf{Q} \setminus X^o$.

Оставшаяся часть действий на шаге n состоит в построении функций $h_{2,1}$ для согласованных пар поколения n, фиксировании отдельных кубов поколения n, *локальной остановке* (то есть фиксировании некоторых вертикальных групп поколения n) и, возможно, завершении конструкции.

b) *фиксирование кубов поколения n и построение функций* $h_{2,1}$.

Пусть T – произвольная вертикальная группа кубов поколения n, $Q = Q(T)$ – ее главный куб. Построим всевозможные согласованные пары, которые Q образует с неглавными кубами Q' из T, и соответствующие функции $h_{2,1}$ из (4.5), после чего зафиксируем все указанные неглавные кубы Q'. В силу определения согласованных пар имеем $4 \leqslant |m_3(Q) - m_3(Q')| \leqslant 13$ и, следовательно, таких кубов Q' в T не более 10, а индекс m_3 остальных (незафиксированных) кубов в T может отличаться от $m_3(Q)$ не более, чем на 3.

С этого момента уменьшим каждую вертикальную группу T поколения n, оставив в ней только незафиксированные кубы. В силу построения, так же, как и непосредственно перед шагом n, индекс m_3 незафиксированных кубов в T различается не более, чем на 6 (если шаг n не последний, то сразу же после перехода к следующему поколению кубов этот индекс будет различаться не более, чем на 13). Таким образом, условия (1)–(2), которым удовлетворяют вертикальные группы, при переходе от шага $n-1$ к шагу n сохраняются.

Прежде чем рассматривать условие локальной остановки, заметим, что в силу построения имеет место следующее.

Каждая вертикальная группа кубов поколения n при $n > 1$ вложена в соответствующую вертикальную группу кубов поколения $n-1$ (вложение группы T в группу T' означает, что каждый куб из T содержится в некотором кубе из T'). Если из двух вертикальных групп одна не вложена в другую, то проекции групп на плоскость $x_3 = 0$ не имеют общих внутренних точек.

Обозначим через $\Lambda(Q)$ сумму всех коэффициентов (λ_1 или λ_2), полученных главным кубом Q при построении всех функций $h_{2,1}$. Так как Q входит не более, чем в 10 согласованных пар и $\max(\lambda_1, \lambda_2) \leqslant 1$, то $\Lambda(Q) \leqslant 10$. Рассмотрим функцию

$$L_T(x) = \Lambda(Q)\chi(\widetilde{Q})(x), \tag{4.8}$$

где $\widetilde{Q}$ – проекция куба Q (или проекция группы кубов T, что то же самое) на плоскость $x_3 = 0$.

c) *условие локальной остановки.*

Пусть T_0 – вертикальная группа поколения n, $\mathbf{T}$ – множество вертикальных групп, состоящее из T_0 и вертикальных групп предыдущих поколений, в которые вложена группа T_0. Если всюду на проекции группы T_0 на плоскость $x_3 = 0$ выполнено неравенство

$$\sum_{\{T\in\mathbf{T}\}} L_T(x) \geqslant 1,$$

то T_0 фиксируется (вместе с вертикальной группой T_0 фиксируются все ее кубы).

Значение условия локальной остановки для доказательства леммы 4.2 дает следующее утверждение, вытекающее из леммы 2.6.

Лемма 4.3. *Пусть $\mathcal{T}$ – множество всех построенных вертикальных групп поколений не выше n, $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}$ – множество вертикальных групп поколений не выше n, зафиксированных в силу условия локальной остановки.*

Тогда имеет место неравенство

$$\sum_m \omega_f(s(Q_m))\beta(Q'_m)s(Q'_m) \leqslant A\sum_j \Lambda(Q_j)\omega_f(s(Q_j))\beta(Q_j)s(Q_j), \tag{4.9}$$

где в левой части рассматриваются все кубы Q'_m всех вертикальных групп из $\mathcal{T}_1$, в правой части – главные кубы всех вертикальных групп из $\mathcal{T}$.

Доказательство. Для произвольной вертикальной группы T из $\mathcal{T}$ с главным кубом Q и всех кубов Q'_m вертикальных групп из $\mathcal{T}_1$, вложенных в T (что равносильно вложению проекций $\widetilde{Q'_m} \subset \widetilde{Q}$), так как проекции групп из $\mathcal{T}_1$ на плоскость $x_3 = 0$ попарно раздельны и емкость $\beta(Q)$ максимальна по всем кубам T, из формулы (2.17) получим:

$$\sum_{\{m|\widetilde{Q'_m}\subset\widetilde{Q}\}} \beta(Q'_m)s(Q'_m) \leqslant A\beta(Q)s(Q)$$

(в (2.17) можно взять $M = 14$, так как в вертикальных группах не более, чем по 14 кубов); следовательно, тем более

$$\sum_{\{m|\widetilde{Q'_m}\subset\widetilde{Q}\}} \omega_f(s(Q_m))\beta(Q'_m)s(Q'_m) \leqslant A\omega_f(s(Q))\beta(Q)s(Q).$$

После умножения на $\Lambda(Q)$ сложим такие же неравенства по всем T из $\mathcal{T}$ и учтем, что на каждой проекции вертикальной группы из $\mathcal{T}_1$ сумма всех $\Lambda(Q)$ не меньше 1. В обозначениях (4.9) получим:

$$\begin{aligned}
&\sum_m \omega_f(s(Q_m))\beta(Q'_m)s(Q'_m) \\
&\quad\leqslant \sum_m \omega_f(s(Q_m))\beta(Q'_m)s(Q'_m) \sum_{\{j|\widetilde{Q'_m}\subset\widetilde{Q}_j\}} \Lambda(Q_j) \\
&\quad= \sum_j \Lambda(Q_j) \sum_{\{m|\widetilde{Q'_m}\subset\widetilde{Q_j}\}} \omega_f(s(Q_m))\beta(Q'_m)s(Q'_m) \\
&\quad\leqslant A\sum_j \Lambda(Q_j)\omega_f(s(Q_j))\beta(Q_j)s(Q_j).
\end{aligned}$$

Лемма 4.3 доказана. □

Теперь рассмотрим два условия глобальной остановки.

Условие 1. Если зафиксированы все вертикальные группы кубов поколения n, то конструкция завершена.

Условие 2. Пусть s_n – длина стороны кубов поколения n. Если выражение $\omega_f(s_n)\mathbf{s}^2$ не превосходит суммы $\omega_f(s)c_3^1(h_{2,1})$ по всем функциям $h_{2,1}$ из $\mathbf{H}(\mathbf{Pair})$, построенным ранее, то конструкция завершена.

Ясно, что условие 2 будет выполнено для всех достаточно больших n. Действительно, если построена хотя бы одна функция $h_{2,1}$, это очевидно из соотношения $\lim_{n\to\infty}\omega_f(s_n) = 0$. В противном случае нет ни одного зафиксированного куба поколений не выше n (кубы фиксируются только после построения функций $h_{2,1}$), и поэтому компакт $(8/7)\mathbf{Q} \setminus X^o$ с непустой внутренностью содержится в объединении кубов вертикальных групп последнего поколения, что невозможно для достаточно больших n, так как проекции этих групп на плоскость $x_3 = 0$ не имеют общих внутренних точек и в группах не более, чем по 14 кубов.

Если ни одно из условий глобальной остановки не выполнено, то переходим к следующему шагу $n + 1$, в противном случае конструкция завершена (причем $\mathbf{Cover} = \mathbf{Cover}(n)$, $\mathbf{Pair}$ – множество всех построенных согласованных пар, $\mathbf{H}(\mathbf{Pair})$ – множество всех построенных функций $h_{2,1}$).

Описание конструкции закончено; осталось доказать, что по завершении конструкции выполнены условия леммы 4.2.

Рассмотрим условие (1). Нужно доказать, что $A_1 C_{vert}(\mathbf{H})$ оценивает сверху:

а) сумму $\omega_f(s(Q))\beta(Q)s(Q)$ по всем неглавным кубам вертикальных групп, фиксируемым при построении функций $h_{2,1}$ – это следует из (4.5)–(4.7), так как у неглавного куба при построении функции $h_{2,1}$ коэффициент (λ_1 или λ_2) равен 1;

б) сумму $\omega_f(s(Q))\beta(Q)s(Q)$ по всем кубам вертикальных групп, фиксируемых в силу условия локальной остановки – как следует из (4.9), указанная сумма не превосходит суммы

$$A\Lambda(Q_j)\omega_f(s(Q_j))\beta(Q_j)s(Q_j)$$

по всем главным кубам вертикальных групп, которая, в свою очередь, в силу определения величины $\Lambda(Q)$ и (4.6)–(4.7), не превосходит числа $A_1 C_{vert}(\mathbf{H})$;

в) сумму $\omega_f(s(Q))\beta(Q)s(Q)$ по всем кубам вертикальных групп, фиксируемых в силу условия 2 глобальной остановки – это следует из неравенства $\sum (s(Q))^2 \leqslant 14\mathbf{s}^2$ при суммировании по всем кубам Q последнего поколения, оценки $\beta(Q) \leqslant 2s(Q)$ и достаточной малости числа $\omega_f(s_n)$.

Условие (1) установлено.

Рассмотрим условие (2). Прежде всего заметим, что для всех x, принадлежащих плоскости $x_3 = 0$, при суммировании по всем вертикальным группам T выполнено неравенство

$$\sum_T L_T(x) \leqslant 44, \tag{4.10}$$

где L_T из (4.8). Для доказательства неравенства (4.10) заметим, что число проекций зафиксированных вертикальных групп, содержащих x, не более 4 (в каждой точке могут пересекаться не более четырех раздельных двоичных квадратов), причем сумма $L_T(x)$ по вложенной цепочке вертикальных групп, проекции которых содержат x, не более 11 (действительно, для зафиксированной группы T имеем $L_T(x) \leqslant 10$, а в силу условия локальной остановки сумма $L_T(x)$ по всем группам предыдущих поколений не превосходит 1). Таким образом, левая часть формулы (4.10) не превосходит $44 = 4(10 + 1)$.

В силу формулы (4.10) и леммы 2.6, для произвольного двоичного куба Q' сумма выражений $\lambda(Q)\beta(Q)s(Q)$ по всем главным кубам вертикальных групп, содержащихся в Q', не превосходит $A\beta(Q')s(Q')$ и, следовательно, не превосходит $2A(s(Q'))^2$. Так как для каждого неглавного куба согласованной пары, содержащегося в Q', другой (главный) куб содержится в $30Q'$, в силу равенства (4.6) сумма выражений $\lambda_1\beta(Q_1)s(Q_1)+\lambda_2\beta(Q_2)s(Q_2)$ по согласованным парам (Q_1, Q_2), для которых хотя бы один куб содержится в Q', не превосходит $A_1(s(Q'))^2$. Следовательно, в силу (4.7) сумма коэффициентов $c_3^1(h_{2,1})$ по всем функциям $h_{2,1}$ из $\mathbf{H}(\mathbf{Pair})$, для которых хотя бы один куб согласованной пары содержится в Q', не превосходит $A_2(s(Q'))^2$.

Теперь рассмотрим сумму $\beta(Q)s(Q)$ по всем кубам покрытия **Cover**, содержащимся в Q'. Напомним, что кубы покрытия **Cover** – это:

а) неглавные кубы, зафиксированные при построении функций $h_{2,1}$ – то, что сумма $\beta(Q)s(Q)$ по ним не превосходит $A_2(s(Q'))^2$, следует из установленной выше оценки для $\lambda_1\beta(Q_1)s(Q_1) + \lambda_2\beta(Q_2)s(Q_2)$ (коэффициенты λ_1 или λ_2 неглавных кубов в функциях $h_{2,1}$ равны 1);

б) кубы вертикальных групп, зафиксированных в силу условия локальной остановки или условия 2 – то, что сумма $\beta(Q)s(Q)$ по ним не превосходит $A(s(Q'))^2$, следует из того, что в каждом вертикальном ряду не более одной зафиксированной вертикальной группы, проекции которых на плоскость $x_3 = 0$ попарно раздельны, и в группах не более, чем по 14 кубов.

Условие (2) установлено. Лемма 4.2 доказана. $\square$

Для завершения доказательства теоремы 1 осталось построить функции G_3^1 и G_3^2, для которых выполнены условия (1)–(4) леммы 4.1.

Пусть $\{Q_j\}$ – множество кубов покрытия **Cover**; построим подчиненное ему разбиение единицы $\{\varphi_j\}$ из леммы 2.1 и разложим g в конечную сумму (повторных) локализаций $g_j = V_{\varphi_j} g = E * (\varphi\varphi_j \Delta f)$. Для каждой функции g_j возьмем функцию F_{Q_j} из следствия леммы 2.5 и положим $G_3^1 = \sum_j F_{Q_j}$. Возьмем в качестве G_3^2 сумму $\omega_f(s)h_{2,1}$ по по всем функциям $h_{2,1}$ из $\mathbf{H}(\mathbf{Pair})$, где s – длина стороны (любого из) кубов согласованной пары, по которой построена функция $h_{2,1}$.

Проверим выполнение условий (1)–(4) леммы 4.1.

Условие (1) очевидно из построения.

Условие (2) следует из оценки (1) леммы 4.2 и условия (2) следствия леммы 2.5 (напомним, что $g = V_\varphi f$).

Условие (3) следует из замечания 4.1 к оценке (4.7).

Рассмотрим условие (4) леммы 4.1; покажем, что $\|g - G_3^1\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A_1\epsilon(\mathbf{s})$ (что равносильно неравенству $\|G_3^1\|_{\mathrm{L}_\infty} \leqslant A\epsilon(\mathbf{s})$). Пусть $r_j = g_j - F_{Q_j}$; зафиксируем произвольную точку x из $\mathbb{R}^3$. Достаточно показать, что

$$\sum_j |r_j(x)| \leqslant A\epsilon(\mathbf{s}). \tag{4.11}$$

Назовем куб $Q_j \in \mathbf{Cover}$ *близким* к x, если $x \in 40Q_j$ и *далеким* от x в противном случае. Для кубов, близких к x, оценка (4.11) следует из неравенства $|r_j(x)| \leqslant A\omega_f(s(Q_j))$ (см. условие (1) следствия леммы 2.5 и условие c) леммы 2.2), того, что число кубов одного размера, близких к x, не превосходит абсолютной постоянной, и определения ϵ в (4.4).

Для кубов, далеких от x, оценка (4.11) следует из (2.15), условия (2) леммы 4.2 и формулы (4.4), так как при суммировании величин $|r_j(x)|$ по всем далеким кубам Q_j, таким, что $2^{-k} \leqslant \operatorname{dist}(Q_j, x) \leqslant 2^{-k+1}$, сумма не превосходит $A\omega_f(2^{-k})$.

То, что сумма $\omega_f(s)|h_{2,1}(x)|$ по всем функциям $h_{2,1}$ из $\mathbf{H}(\mathbf{Pair})$ не превосходит $A\epsilon(\mathbf{s})$, доказывается так же, как и для суммы $|r_j(x)|$. Здесь учитываем условие (2) леммы 4.2, формулу (4.7) и асимптотику функций $\omega_f(s)h_{2,1}$, совершенно аналогичную правой части (2.15), в которой Q – неглавный куб согласованной пары с центром a.

Лемма 4.1 доказана; доказательство теоремы 1 завершено. $\square$

Литература

1. И. М. Стейн, Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М., Мир, 1973.
2. А. Г. Витушкин, *Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений.* — УМН **22**, No. 6 (1967), 141–199.
3. A. G. O'Farrell, *Uniform approximation by harmonic functions.* — Lect. Notes Math. **1574** (1994), 121.
4. J. Verdera, *Removability, capacity and approximation.* — NATO Adv. Sci. Int. Ser. C Math. Phys. Sci., 439 Kluwer. Dordrecht. (1994), 419–473.
5. J. Mateu, Y. Netrusov, J. Orobitg, J. Verdera, *BMO and Lipschitz approximation by solutions of elliptic equations.* — Ann. Inst. Fourier **46**, No. 4 (1996), 1057–1081.
6. М. Я. Мазалов, *О задаче равномерного приближения гармонических функций.* — Алгеба и анализ **23**, No. 4 (2011), 136–178.
7. R. Harvey, J. Polking, *A notion of capacity which characterizes removable singularities.* — Trans. Amer. Math. Soc. **169** (1972), 183–195.
8. М. В. Келдыш, *О разрешимости и устойчивости задачи Дирихле.* — УМН No. 8 (1941), 171–231.
9. R. Harvey, J. Polking, *Removable singularities of solutions of linear partial differential equations.* — Acta Math. **125** (1970.), 39–56.
10. П. В. Парамонов, *О гармонических приближениях с* C^1*-норме.* — Матем. сборник **181**, No. 10 (1990), 1341–1365.
11. Н. Н. Тарханов, Ряд Лорана для решений эллиптических систем. Новосибирск: Наука, 1991.
12. J. Verdera, C^m *approximation by solutions of elliptic equations, and Calderon-Zygmund operators.* — Duke Math. J. **55** (1987), 157–187.
13. М. Я. Мазалов, *Критерий равномерной приближаемости на произвольных компактах для решений эллиптических уравнений.* — Матем. сборник. **199**, No. 1 (2008), 15–46.
14. У. Рудин, Функциональный анализ. М., Мир, 1975.

Mazalov M. Ya. Uniform approximation by harmonic functions on compact subsets of $\mathbb{R}^3$.

We consider uniform approximation by harmonic functions on compact subsets in $\mathbb{R}^3$. Under an additional assumption that an approximated function is Dini-continuous, we prove a natural analog of Vitushkin's well-known uniform approximation lemma for an individual analytic function.

Военная академия
войсковой ПВО ВС РФ
им. маршала Советского Союза
А. М. Василевского,
ул. Котовского, 2, Смоленск 214027, Россия
E-mail: maksimmazalov@yandex.ru

Поступило 11 июня 2011 г.