Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 389, 2011 г.

Е. А. Лебедева

О ПРИНЦИПЕ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ДЛЯ ВСПЛЕСК-ФУНКЦИЙ МЕЙЕРА

1. Постановка задачи

Система всплесков Мейера построена И. Мейером в 1986 г. [1] и является исторически одним из первых примеров базисов всплесков. Напомним ее определение. Пусть $\theta = \theta(\omega)$ – определенная на прямой нечетная, абсолютно непрерывная функция, равная $\pi/4$ при $\omega \geq \pi/3$. Рассмотрим вспомогательную четную функцию

$$\lambda(\omega)\big|_{[0,\infty]} = \begin{cases} \frac{\pi}{4} + \theta(\omega - \pi), & \omega \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right], \\ \frac{\pi}{4} - \theta(\frac{\omega}{2} - \pi), & \omega \in \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right], \\ 0, & \omega \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right] \bigcup \left[\frac{8\pi}{3}, +\infty\right). \end{cases}$$

Тогда *всплеск-функция Мейера* ψ и ее образ Фурье

$$\widehat{\psi}(\omega) := \int_{\mathbb{R}} \psi(t) e^{-i\omega t}\, dt$$

определяются так:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)\omega\right) \sin(\lambda(\omega))\, d\omega, \quad \widehat{\psi}(\omega) = e^{-\frac{i\omega}{2}} \sin(\lambda(\omega)). \tag{1}$$

Одним из преимуществ системы всплесков Мейера является их хорошая время-частотная локализованность, понимаемая как быстрое убывание функции (локализованность по времени) и ее образа Фурье (локализованность по частоте) на бесконечности. Количественной характеристикой этого свойства служит *константа неопределенности*

Ключевые слова: всплеск-функция Мейера, константа неопределенности, сплайн-функции, выпуклая вариационная задача.

Работа поддержана грантом РФФИ 09-01-00162 и грантом МК-7413.2010.1.

$J = \Delta_\psi \Delta_{\hat\psi}$, где

$$\Delta_\psi^2 = \frac{1}{\|\psi\|^2_{L^2(R)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (t-t_0)^2 \, |\psi(t)|^2 \, dt,$$

$$\Delta_{\hat\psi}^2 = \frac{1}{\|\,\widehat{\psi}\,\|^2_{L^2(R)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (\omega-\omega_0)^2 \left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2 d\omega,$$

$$t_0 \;=\; \frac{1}{\|\psi\|^2_{L^2(R)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} t\,|\psi(t)|^2 \, dt, \quad \omega_0 \;=\; \frac{1}{\|\,\widehat{\psi}\,\|^2_{L^2(R)}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \omega \left|\widehat{\psi}(\omega)\right|^2 d\omega.$$

Известный из квантовой механики принцип неопределенности Гейзенберга утверждает, что константа неопределенности ограничена снизу: в выбранной нормировке выполняется неравенство $J \geq 1/2$. Чем меньше множитель Δ_ψ ($\Delta_{\hat\psi}$), тем лучше функция ψ локализована по времени (по частоте). Различные обобщения принципа неопределенности можно найти в обзоре [2]. Для первой известной системы всплесков, системы Хаара, справедливы равенства $\Delta_\psi = \sqrt{5/6}$, $\Delta_{\hat\psi} = \infty$ [3]. Система Мейера стала первым примером всплеск-функций с конечной константой неопределенности.

В работе [5] получено упрощенное выражение для квадрата константы неопределенности всплеск-функции Мейера:

$$I(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{14\pi}{3} - \frac{21}{\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} t\sin x(t)\,dt\right)\int\limits_0^{\frac{\pi}{3}} \big(x'(t)\big)^2\,dt, \tag{2}$$

где

$$x \in W_2^1\left[0, \frac{\pi}{3}\right], \quad x(0) = 0, \quad x\,(\pi/3) = \pi/2. \tag{3}$$

Функция x связана со вспомогательной функцией θ так: $x = 2\theta$.

В работе [6] численно найдена оптимальная всплеск-функция Мейера, имеющая наименьшую константу неопределенности, когда x пробегает пространство W_2^1, и в этом смысле обладающая наилучшей

время-частотной локализацией. Задача минимизации константы неопределенности сведена к выпуклой вариационной задаче:

$$F(x) = -\int\limits_0^{\pi/3} t \sin x(t)\, dt \to \min, \quad x \in M_a^0, \tag{4}$$

где

$$M_a^0 = \left\{ x \in W_2^1\,[0,\, \pi/3] \,\middle|\, G(x) = a, x(0) = 0, x(\pi/3) = \pi/2 \right\},$$

$$G(x) = \int\limits_0^{\pi/3} \left(x'(t)\right)^2 dt,$$

и показано, что решение этой задачи существует и удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению. А именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1 (см. [6]). *Существует функция $\tilde{x}(t)$, доставляющая абсолютный минимум функционала* (2) *при условиях* (3), *а также минимум вариационной задачи* (4). *Функция $\tilde{x}(t)$ является аналитической возрастающей вогнутой функцией на отрезке $\left[0\,,\, \frac{\pi}{3}\right]$ и удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$x''(t) \;=\; -p\, t \cos x(t) \tag{5}$$

при некотором значении параметра $p \geq 0$.

Однако уравнение (5) является нелинейным неавтономным дифференциальным уравнением, его решение аналитическими методами (в виде сколько-нибудь явной формулы) неизвестно.

В данной работе построено приближенное решение уравнения (5), а именно, последовательность очень простых дифференциальных уравнений, допускающих решение аналитическими методами. При этом найденные решения равномерно сходятся к решению исходного уравнения (5). Для этого доказано, что любая минимизирующая последовательность для задачи (4) равномерно сходится к решению этой задачи. Далее построен пример минимизирующей последовательности $\tilde{x}_n$. Он получается как решение вспомогательных дифференциальных уравнений (10) — уравнений Эйлера–Лагранжа для вспомогательных вариационных задач (9). Таким образом, вспомогательные для системы Мейера функции $\tilde{x}_n = 2\tilde{\theta}_n$ задают с помощью формул (1)

последовательность всплеск-функций Мейера, равномерно приближающих всплеск-функцию Мейера, имеющую наименьшую возможную константу неопределенности.

Рассмотрим вариационную задачу

$$K(u) \to \inf, \ u \in U. \tag{6}$$

Наименьшее значение функционала K будем обозначать тем же символом, снабженным нижней звездочкой: $K_* = \inf_{u \in U} K(u)$, множество всех решений задачи (6) обозначим через $U_* = \{u \in U : K(u) = K_*\}$.

Как обычно, последовательность $(\tau_n)_{n \in \mathbb{N}}$ будем называть *минимизирующей* для задачи (6), если $\lim_{n \to \infty} K(\tau_n) = K_*$.

В дальнейшем будет использован следующий результат.

Теорема 2 ([4, гл. 1, §3, теорема 6])**.** *Пусть U — выпуклое, замкнутое, ограниченное множество из рефлексивного банахова пространства B, функционал K – выпуклый и полунепрерывный снизу на U. Тогда $K_* > -\infty$, U_* – непусто, выпукло, замкнуто, ограничено, и любая минимизирующая последовательность слабо сходится к какому-либо элементу из U_*.*

2. Основные результаты

Обозначим

$$M_a := \left\{ x \in W_2^1 \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \,\middle|\, G(x) \le a, \ x(0) = 0, \ x\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{2}, \ 0 \le x(t) \le \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Теорема 3. *Решение задачи* (4) *существует, единственно, любая минимизирующая последовательность слабо сходится к решению в $W_2^1[0; \pi/3]$, а также сходится к решению равномерно.*

Доказательство. В работе [6] доказано, что решения задачи (4) и задачи

$$F(x) \to \min, \quad x \in M_a, \tag{7}$$

совпадают, поэтому будем доказывать теорему 3 для задачи (7).

Проверим, что задача (7) удовлетворяет всем условиям теоремы 2, если в качестве пространства B взять $W_2^1[0, \pi/3]$. Действительно, так как $W_2^1[0, \pi/3]$ – гильбертово пространство, то оно является рефлексивным и банаховым. Далее, пусть $x \in M_a$, тогда $\|x\|^2_{W_2^1} = \int_0^{\pi/3} x^2(t)\,dt + \int_0^{\pi/3} x'^2(t)\,dt \le \frac{\pi}{3}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + a$. Следовательно, M_a – ограниченное множество. По построению M_a получено как пересечение выпуклых множеств, поэтому M_a является выпуклым множеством.

Докажем, что M_a – замкнутое множество. Пусть $x_k \in M_a$ и

$$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_0\|_{W_2^1} = 0.$$

Тогда $x_0 \in W_2^1[0,\, \pi/3]$. Далее, из неравенства Минковского для пространства $L_2[0,\, \pi/3]$ и определения нормы пространства $W_2^1[0,\, \pi/3]$ последовательно имеем

$$\left(\int\limits_0^{\pi/3} x_0'^2(t)\,dt\right)^{1/2} \le \left(\int\limits_0^{\pi/3} (x_n' - x_0')^2(t)\,dt\right)^{1/2} + \left(\int\limits_0^{\pi/3} x_n'^2(t)\,dt\right)^{1/2}$$
$$\le \varepsilon + \sqrt{a},$$

где число ε может быть сделано сколь угодно малым, начиная с некоторого n. Следовательно, $\int_0^{\pi/3} x_0'^2(t)\,dt \le a$. Докажем, что $0 \le x_0 \le \pi/2$. Предположим противное: найдется точка $t_0 \in [0,\, \pi/3]$, для которой $x_0(t_0) > \pi/2 + A$ или $x_0(t_0) < -A$, где $A > 0$. Так как $x_0 \in W_2^1[0,\, \pi/3]$, то x_0 — абсолютно непрерывная функция. Поэтому существует окрестность $\delta(t_0)$ точки t_0, для которой неравенства $x_0(t_0) > \pi/2 + A$, $x_0(t_0) < -A$ сохраняются, и при $t \in \delta(t_0)$ в обоих случаях выполняется неравенство $|x_n(t) - x_0(t)| > A$. Тогда, с одной стороны, найдется такой номер n_0, что для $n \ge n_0$ выполняется неравенство $\int_0^{\pi/3} (x_n - x_0)^2(t)\,dt \le A^2 m\delta(t_0)/2$, где $m\delta(t_0)$ — мера множества $\delta(t_0)$. С другой стороны, $\int_0^{\pi/3} (x_n - x_0)^2(t)\,dt = \int_{\delta(t_0)} (x_n - x_0)^2(t)\,dt + \int_{[0,\,\pi/3]\setminus\delta(t_0)} (x_n - x_0)^2(t)\,dt > A^2 m\delta(t_0)$. Полученное противоречие доказывает неравенство $0 \le x_0 \le \pi/2$. Аналогично, предполагая противное и пользуясь непрерывностью функции x_0, устанавливаются равенства $x_0(0) = 0$ и $x_0(\pi/3) = \pi/2$. Итак, $x_0 \in M_a$. Следовательно, M_a — замкнутое множество.

Так как функция sin является строго вогнутой на отрезке $[0,\, \pi/2]$, то

$$F\left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}\right) \le \frac{F(x_1(t)) + F(x_2(t))}{2},$$

причем данное неравенство обращается в равенство только при $x_1 = x_2$. Поэтому F – строго выпуклый функционал.

Докажем, что функционал F непрерывен на множестве M_a относительно нормы пространства $W_2^1[0,\, \pi/3]$. Пусть $x_1,\, x_2 \in W_2^1[0,\, \pi/3]$. Тогда из равенства $\sin x_1 - \sin x_2 = 2\sin(x_1/2 - x_2/2)\cos(x_1/2 + x_2/2)$,

неравенства $|\sin x| < |x|$ и неравенства Коши–Буняковского последовательно имеем

$$|F(x_1) - F(x_2)| = \left| \int\limits_0^{\pi/3} t\,(\sin(x_1(t)) - \sin(x_2(t)))\ dt \right|$$

$$\leq 2 \int\limits_0^{\pi/3} t \left| \sin\left(\frac{x_1(t) - x_2(t)}{2}\right) \right| dt \leq \frac{\pi}{3} \int_0^{\pi/3} |x_1(t) - x_2(t)|\, dt$$

$$\leq \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} \left(\int\limits_0^{\pi/3} (x_1(t) - x_2(t))^2\, dt + \int\limits_0^{\pi/3} (x_1'(t) - x_2'(t))^2\, dt \right)^{1/2}$$

$$= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} \|x_1 - x_2\|_{W_2^1[0,\,\pi/3]}.$$

Итак, все условия теоремы 2 выполнены применительно к задаче (7). Следовательно, множество решений вариационной задачи (4) непусто, выпукло, замкнуто, ограничено, и любая минимизирующая последовательность слабо сходится к решению в пространстве $W_2^1[0,\,\pi/3]$. Так как функционал F – строго выпуклый, то множество решений вариационной задачи (4) состоит из единственной точки. Из слабой сходимости последовательности в пространстве $W_2^1[0,\,\pi/3]$ следует ее сходимость к тому же пределу по равномерной норме (см. [4, с. 169]) $\square$

3. Пример минимизирующей последовательности

Рассмотрим сплайны первой степени f_n, интерполирующие функцию sin на равномерном разбиении отрезка $[0,\,\pi/2]$ с шагом $h = \pi(2n)^{-1}$ и узлами $\tau_k = kh$, $k = 0, \ldots, n$:

$$f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} (d_k(t - \tau_k) + \sin(\tau_k))\chi_{[\tau_{k-1},\,\tau_k]}(t), \tag{8}$$

где $d_k = (\sin\tau_k - \sin\tau_{k-1})/h$ и $\chi_{[a,\,b]}$ – характеристическая функция отрезка $[a,\,b]$.

Рассмотрим последовательность задач:

$$H_n(x) = \int\limits_0^{\pi/3} (-t\, f_n(x(t)))\, dt \to \min, \quad x \in M_a^0. \tag{9}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 1. *Для каждого n существует единственная функция $\tilde{x}_n(t)$, доставляющая абсолютный минимум вариационной задачи* (9).

Доказательство. Существование и единственность решения могут быть получены из теоремы 2 подобно доказательству теоремы 3. Действительно, задача (9) может быть решена по той же схеме, что и задача (4) в работе [6]. Дословно, с точностью до обозначений повторяя доказательство леммы 1 работы [6] для задачи (9), получаем, что задача (9) эквивалентна задаче $H_n(x) \to \min$, $x \in M_a$. Выпуклость, замкнутость и ограниченность множества M_a уже установлены в теореме 3.

Так как f_n — сплайн первой степени, интерполирующий функцию sin на отрезке $[0,\, \pi/2]$, и sin является строго вогнутой функцией на указанном отрезке, то f_n – строго вогнутая функция, поэтому

$$H_n\left(\frac{x_1(t) + x_2(t)}{2}\right) \le \frac{H_n(x_1(t)) + H_n(x_2(t))}{2},$$

причем данное неравенство обращается в равенство только при $x_1 = x_2$. Поэтому H_n – строго выпуклый функционал.

Докажем, что функционал H_n непрерывен на множестве M_a относительно нормы пространства $W_2^1[0,\, \pi/3]$. Пусть $x_1,\, x_2 \in W_2^1[0,\, \pi/3]$. Тогда из кусочной непрерывной дифференцируемости функции f_n и неравенства Коши–Буняковского последовательно имеем

$$\begin{aligned} |H_n(x_1) - H_n(x_2)| &\le \frac{\pi}{3} \max_{x \in [0,\, \pi/2]} f_n'(x) \int\limits_0^{\pi/3} |x_1(t) - x_2(t)|\, dt \\ &= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{3\sqrt{3}} \max_{x \in [0,\, \pi/2]} f_n'(x)\ \|x_1 - x_2\|_{W_2^1[0,\, \pi/3]}. \end{aligned}$$

Из оценки

$$\max_{x\in[0,\,\pi/2]} f_n'(x) = \max_{k=1,\dots,n} d_k = \max_{k=1,\dots,n} \frac{\sin\tau_k - \sin\tau_{k-1}}{h}$$
$$= \max_{k=1,\dots,n} \frac{2}{h}\sin\frac{h}{2}\cos\frac{\tau_k+\tau_{k-1}}{2} \le 1$$

получаем непрерывность функционала H_n.

Итак, все условия теоремы 2 выполнены применительно к задаче $H_n(x) \to \min$, $x \in M_a$. Как отмечалось в начале доказательства, решения задачи $H_n(x) \to \min$, $x \in M_a$, и задачи (9) совпадают. Поэтому множество решений вариационной задачи (9) непусто, выпукло, замкнуто, ограничено, и любая минимизирующая последовательность слабо сходится к решению. Так как функционал H_n — строго выпуклый, то множество решений вариационной задачи (9) состоит из единственной точки. □

Лемма 2. *Функция $\tilde{x}_n(t)$, доставляющая абсолютный минимум вариационной задачи* (9), *является решением дифференциального уравнения*

$$x'' = -p_n\, t\, f_n'(x) \tag{10}$$

для некоторого $p_n \ge 0$ и имеет вид

$$\tilde{x}_n(t) = \sum_{r=1}^{n}\left(-\frac{p_n d_r t^3}{6} + C_r t + D_r\right)\cdot \chi_{[t_{r-1},\,t_r]}(t), \tag{11}$$

где параметры C_r, D_r, t_r определяются из условий $\tilde{x}_n(t_r) = \tau_r$, $t_r < t_{r+1}$, $r = 0,\dots,n$, $t_0 = 0$, $t_n = \pi/3$, $\tilde{x}_n \in C^1[0,\,\pi/3]$.

Доказательство. Как отмечалось в начале доказательства леммы 1, задача (9) эквивалентна задаче $H_n(x) \to \min$, $x \in M_a$, к которой применима теорема Куна-Таккера. В результате получаем уравнение (10).

Из определения (8) функции f_n следует, что

$$f_n'(x) = \sum_{k=1}^{n} d_k \chi_{[\tau_{k-1},\,\tau_k]}(x).$$

Пусть числа t_k, $k = 0,\dots,n$, определены условиями $x(t_k) = \tau_k$, $t_0 = 0$, $t_n = \pi/3$. Тогда на каждом интервале $[t_{k-1},\,t_k]$ решение x_n уравнения (10) совпадает с решением простейшего дифференциального уравнения с разделяющимися переменными

$$x_{n,k}'' = -p_n\, t\, d_k\,,$$

общее решение которого имеет вид

$$x_{n,k}(t) = -\frac{p_n d_k t^3}{6} + C_k t + D_k,$$

где C_k, D_k, $k = 1, \dots, n$, — постоянные. Таким образом, решение $\tilde{x}_n$ уравнения (10) представимо в виде

$$\tilde{x}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{p_n d_k t^3}{6} + C_k t + D_k \right) \cdot \chi_{[t_{k-1},\, t_k]}(t).$$

Параметры C_k, D_k, $k = 1, \dots, n$, и t_k, $k = 1, \dots, n-1$, находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} -p_n d_k t_k^3/6 + C_k t_k + D_k = \tau_k, & k = 1, \dots, n, \\ -p_n d_k t_{k-1}^3/6 + C_k t_{k-1} + D_k = \tau_{k-1}, & k = 1, \dots, n, \\ -p_n d_k t_k^2/2 + C_k = -p_n d_{k+1} t_k^2/2 + C_{k+1} & k = 1, \dots, n-1. \end{cases} \tag{12}$$

Уравнения с первого по n-е следуют из условия $x_{n,k}(t_k) = \tau_k$, уравнения с $n+1$-го по $2n$-е – из равенства $x_{n,k+1}(t_k) = \tau_k$, уравнения с $2n+1$-го по $3n-1$-е – из условия $x'_{n,k}(t_k) = x'_{n,k+1}(t_k)$. Существование и единственность решения системы следует из леммы 1. □

Лемма 3. *Последовательность* $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *является минимизирующей для задачи* (4); *имеет место сходимость* $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_C \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. Установим, что равномерно по $x \in M_a$ выполняется соотношение

$$|F(x) - H_n(x)| \to 0 \text{ при } n \to \infty. \tag{13}$$

Из определения сплайнов f_n следует (см. [7, гл. 2, §2, теорема 2.1]), что оценка интерполяции имеет вид:

$$\|f_n - \sin\|_{C[0,\pi/2]} \le \pi^2 (32n^2)^{-1} \|\sin\|_\infty \le \pi^2 (32n^2)^{-1}.$$

Поэтому формула (13) устанавливается с помощью оценки

$$|F(x) - H_n(x)| = \left| \int_0^{\frac{\pi}{3}} t(\sin(x(t)) - f_n(x(t)))\, dt \right|$$
$$\le \frac{\pi^2}{18} \|f_n - \sin\|_{C[0,\,\pi/2]} \le \frac{\pi^4}{18 \cdot 32n^2}.$$

Докажем равенство

$$\lim_{n\to\infty} H_{n*} = F_*. \tag{14}$$

На основании сходимости (13) и определения нижней грани получим

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (H_{n*} - F_*) \\
&= \lim_{n\to\infty} (H_{n*} - H_n(x) + H_n(x) - F(x) + F(x) - F_*) \\
&\le \lim_{n\to\infty} (H_n(x) - F(x) + F(x) - F_*) \le F(x) - F_*.
\end{aligned}$$

Так как эта цепочка неравенств верна для любого $x \in M_a$, то имеет место неравенство $\lim_{n\to\infty} (H_{n*} - F_*) \le 0$.

Применяя повторно утверждение (13) и определение нижней грани, имеем

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} (F_* - H_{n*}) \\
&= \lim_{n\to\infty} (F_* - F(x) + F(x) - H_n(x) + H_n(x) - H_{n*}) \\
&\le \lim_{n\to\infty} (F(x) - H_n(x) + H_n(x) - H_{n*}) \le \lim_{n\to\infty} (H_n(x) - H_{n*}).
\end{aligned}$$

Эта цепочка неравенств верна для всех $x \in M_a$. В силу определения нижней грани существуют функции x_n такие, что $0 < H_n(x_n) - H_{n*} < \varepsilon_n$, где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} (F_* - H_{n*}) \le \lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0,$$

и (14) доказано.

Далее из утверждений (13) и (14) получаем

$$|F(\tilde{x}_n) - F_*| = |F(\tilde{x}_n) - F(\tilde{x})| \le |F(\tilde{x}_n) - H_n(\tilde{x}_n)| + |H_n(\tilde{x}_n) - F(\tilde{x})|.$$

Первое слагаемое стремится к нулю с ростом n в силу (13), второе слагаемое стремится к нулю с ростом n вследствие (14). Таким образом, $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ является минимизирующей последовательностью для задачи (4), и поэтому по теореме 3 имеет место сходимость $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_C \to 0$ при $n \to \infty$. □

Для численного нахождения параметров функций $\tilde{x}_n$ предложим следующую схему. Система (12) линейна относительно переменных

C_k, D_k, $k = 1, \ldots, n$, и может быть переписана в виде

$$\begin{cases} C_k = (\tau_k - \tau_{k-1})(t_k - t_{k-1})^{-1} \\ \qquad +p_n d_k (t_k^2 + t_k t_{k-1} + t_{k-1}^2)/6, & k = 1, \ldots, n, \\ D_k = \tau_k + p_n d_k t_k^3/6 - C_k t_k, & k = 1, \ldots, n, \\ -p_n(d_k - d_{k+1}) t_k^2/2 = C_{k+1} - C_k & k = 1, \ldots, n-1. \end{cases} \tag{15}$$

Подставляя коэффициенты C_k, D_k, $k = 1, \ldots, n$, выраженные из (15) с помощью переменных $p_n, t_1, \ldots, t_{n-1}$, в сплайн (11), а сам сплайн в функционал

$$I_n(x) = \frac{1}{4}\left(\frac{14\pi}{3} + \frac{21}{\pi} H_n(x)\right) G(x),$$

получаем рациональную функцию от n переменных

$$I_n(x) = J_n(p_n, t_1, \ldots, t_{n-1}).$$

Минимизируя данную функцию численно (используя какой-либо математический пакет) с $n-1$ ограничением (последняя группа уравнений системы (15)):

$$-p_n(d_k - d_{k+1}) t_k^2/2 = C_{k+1}(p_n, t_1, \ldots, t_{n-1}) - C_k(p_n, t_1, \ldots, t_{n-1}),$$
$$k = 1, \ldots, n-1,$$

находим параметры p_n, t_k, $k = 1, \ldots, n-1$, C_r, D_r, $r = 1, \ldots, n$, определяющие искомую функцию $\tilde{x}_n$. Например, с помощью пакета MathCAD 14 при $n = 4$ получено: $p_4 = 0,674$, $t_1 = 0,250$, $t_2 = 0,506$, $t_3 = 0,772$, $C_1 = 1,578$, $C_2 = 1,575$, $C_3 = 1,553$, $C_4 = 1,481$, $D_1 = 0$, $D_2 = 3,288 \times 10^{-4}$, $D_3 = 7,428 \times 10^{-3}$, $D_4 = 0,044$. Значение константы неопределенности $I_n(\tilde{x}_4) = 6,898$. Расстояние между $\tilde{x}_4$ и $\tilde{x}$ равно $\|\tilde{x}_4 - \tilde{x}\|_C = 8.852 \times 10^{-4}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. 1. *Для каждого n существует единственная функция $\tilde{x}_n(t)$, доставляющая абсолютный минимум вариационной задачи* (9); *функция $\tilde{x}_n(t)$ является решением дифференциального уравнения* (10) *и имеет вид*

$$\tilde{x}_n(t) = \sum_{r=1}^{n} \left(-\frac{p_n d_r t^3}{6} + C_r t + D_r\right) \cdot \chi_{[t_{r-1},\, t_r]}(t),$$

где параметры C_r, D_r, t_r определяются из условий $\tilde{x}_n(t_r) = \tau_r$, $t_r < t_{r+1}$, $r = 0, \ldots, n$, $t_0 = 0$, $t_n = \pi/3$, $\tilde{x}_n \in C^1[0, \pi/3]$.

2. *Последовательность* $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *является минимизирующей для задачи* (4).
3. *Имеет место сходимость* $\|\tilde{x}_n - \tilde{x}\|_C \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Замечание 1. Отметим, что также получена последовательность $\tilde{x}_n$ простых по структуре функций (кубических сплайнов), равномерно сходящихся к решению нелинейного неавтономного дифференциального уравнения (5).

Литература

1. Y. Meyer, *Principe d'incertitude, bases Hilbertiennes et algèbras d'opérateurs*, Seminaire Bourbaki 1985/86, N. 145–146, Soc. Math. France, Paris, 1987, P. 209–223.
2. G. B. Folland and A. Sitaram, *The uncertainty principle: a mathematical survey.* — J. Fourier Anal. Appl. **3** (1997), 207–238.
3. И. Я. Новиков, В. Ю. Протасов, М. А. Скопина, *Теория всплесков.* Физматлит, М. (2005). 614 с.
4. Ф. П. Васильев, *Методы решения экстремальных задач.* Наука, М. (1981). 400 с.
5. Е. А. Лебедева, *Минимизация константы неопределенности семейства всплесков Мейера.* — Матем. заметки **81**, No. 4 (2007), 553–560.
6. Е. А. Лебедева, В. Ю. Протасов, *Всплески Мейера с наименьшей константой неопределенности.* — Матем. заметки **84**, No. 5 (2008), 732–740.
7. Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко, *Методы сплайн-функций.* Наука, М. (1980). 352 с.

Lebedeva E. A. On the uncertainty principle for Meyer wavelets.

A sequence of Meyer wavelets is constructed. This sequence approximates uniformly the Meyer wavelet with the smallest uncertainty constant.

СПбГПУ, кафедра высшей математики,
Политехническая 29,
195251 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ealebedeva2004@gmail.com

Поступило 28 апреля 2011 г.